

УДК 533.6 (075.8)

## ВЛИЯНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ МОЛЕКУЛ НА СКОРОСТЬ ЗВУКА В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОМ ДВУХАТОМНОМ ГАЗЕ

Ю. Н. Ворошилова, М. А. Рыдалевская

Санкт-Петербургский государственный университет, 198504 Санкт-Петербург  
E-mail: rydalevska@rambler.ru

На основе методов кинетической теории газов выведена формула для скорости звука, справедливая не только для баротропных газов. Полученная формула конкретизирована для различных стадий релаксации высокотемпературного двухатомного газа в приближении модели ангармонических осцилляторов. Установлена зависимость между заселенностями колебательных уровней молекул и скоростью звука.

**Ключевые слова:** скорость звука, ангармонические осцилляторы, колебательная релаксация, заселенности колебательных уровней.

Скорость звука, являющаяся одной из наиболее важных характеристик газообразных сред, как правило, рассматривается в качестве скорости распространения малых возмущений. В безвихревых потоках квадрат скорости звука идентифицируется с коэффициентом в волновом уравнении для потенциала скорости (см., например, [1, 2]). При этом в интеграле Лагранжа для безвихревого потока баротропного газа, движущегося в поле консервативных сил, не зависящих от времени, квадратом скорости пренебрегается, полученное выражение дифференцируется по времени и используется уравнение неразрывности, в котором отбрасываются члены второго порядка малости. В результате получаем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{dp}{d\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{dp}{d\rho} \Delta \varphi,$$

где  $\mathbf{v}$  — макроскопическая скорость газа;  $\varphi$  — ее потенциал;  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность. На основе сказанного выше имеем  $a^2 = dp/d\rho$  ( $a$  — скорость звука).

В большинстве случаев газ с протекающими в нем физико-химическими процессами нельзя считать баротропным. В этих условиях для выбора определяющих макропараметров и замыкания системы газодинамических уравнений могут быть использованы методы кинетической теории газов [3–5].

Столкновения молекул, сопровождающиеся обменом энергией и элементарными химическими актами, происходят с различной частотой [6], поэтому помимо локально-равновесных течений необходимо рассматривать различные релаксационные режимы течений в приближении идеальной жидкости.

Предельные решения  $f_i^0$  кинетических уравнений, соответствующие различным стадиям релаксации газа, запишем в виде [5]

$$f_i^0 = \frac{s_i m_i^3}{h^3} \exp \left[ \gamma_0 \left( \frac{m_i c^2}{2} + \tilde{\varepsilon}_i \right) + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \gamma_{\lambda} \psi_i^{\lambda} \right], \quad i = \overline{1, I}. \quad (1)$$

Здесь  $f_i^0$  — функция распределения макрочастиц (атомов и молекул)  $i$ -го сорта (индекс  $i$  определяет сорт частицы и набор квантовых чисел, характеризующих уровень ее внутренней энергии);  $h$  — постоянная Планка;  $m_i, s_i$  — масса и статистический вес  $i$ -й молекулы;  $\mathbf{c} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$  — собственная (тепловая) скорость  $i$ -й молекулы;  $\mathbf{u}$  — скорость микрочастицы в общей (неподвижной) системе координат;  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  — ее локальная газодинамическая скорость;  $\tilde{\varepsilon}_i$  — внутренняя энергия молекулы, которая может переходить в поступательную (и обратно) при столкновениях, участвующих в формировании распределений (1);  $\psi_i^0 = m_i c^2/2 + \tilde{\varepsilon}_i$ ,  $\psi_i^\lambda$  ( $\lambda = \overline{1, \Lambda}$ ) — независимые аддитивные инварианты таких столкновений (набор инвариантов  $\psi_i^\lambda$  зависит от состава газа и рассматриваемой стадии релаксации);  $\gamma_\lambda$  ( $\lambda = \overline{0, \Lambda}$ ) — параметры, зависящие от координат и времени.

Как правило, функции распределения (1) нормируются на величины  $\psi_0 = \tilde{\varepsilon}$ ,  $\psi_\lambda$ ,  $\lambda = \overline{1, \Lambda}$  (плотности суммарных значений энергии рассмотренных выше видов и инвариантов  $\psi_i^\lambda$ ):

$$\psi_0(\mathbf{r}, t) = \tilde{\varepsilon} = \sum_i \int f_i^0 \left( \frac{m_i c^2}{2} + \tilde{\varepsilon}_i \right) d\mathbf{c} = \sum_i n_i^0 \left( -\frac{3}{2} \frac{1}{\gamma_0} + \tilde{\varepsilon}_i \right); \quad (2)$$

$$\psi_\lambda(\mathbf{r}, t) = \sum_i \int f_i^0 \psi_i^\lambda d\mathbf{c} = \sum_i n_i^0 \psi_i^\lambda, \quad \lambda = \overline{1, \Lambda}; \quad (3)$$

$$n_i^0 = \int f_i^0 d\mathbf{c} = s_i \exp \left( \gamma_0 \tilde{\varepsilon}_i + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \gamma_\lambda \psi_i^\lambda \right) \left( -\frac{2\pi m_i}{\gamma_0 h^2} \right)^{3/2}. \quad (4)$$

Из правой части соотношения (2) следует равенство  $\gamma_0 = -1/(kT)$  ( $k$  — постоянная Больцмана;  $T$  — температура газа).

Плотности экстенсивных макропараметров  $\psi_\lambda$  ( $\lambda = \overline{0, \Lambda}$ ) и скорость  $\mathbf{v}$  удовлетворяют уравнениям, которые выводятся из кинетических уравнений и имеют вид [7]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p; \quad (5)$$

$$\frac{d\tilde{\varepsilon}}{dt} + (\tilde{\varepsilon} + p) \operatorname{div} \mathbf{v} = \Delta \tilde{\varepsilon}; \quad (6)$$

$$\frac{d\psi_\lambda}{dt} + \psi_\lambda \operatorname{div} \mathbf{v} = \Delta \psi_\lambda, \quad \lambda = \overline{1, \Lambda}. \quad (7)$$

Здесь

$$p = \frac{1}{3} \sum_i \int f_i^0 m_i c^2 d\mathbf{c} = -\frac{n^0}{\gamma_0} = n^0 kT, \quad (8)$$

$\mathbf{F}$  — внешняя сила, действующая на единицу массы газа;  $n^0 = \sum_i n_i^0$ ;  $\Delta \tilde{\varepsilon}$ ,  $\Delta \psi_\lambda$  — релаксационные члены, характеризующие изменение определяющих макропараметров в результате неравновесных процессов на данной стадии релаксации.

Следует отметить, что массовую плотность  $\rho$  можно представить в виде линейной комбинации параметров  $\psi_\lambda$  ( $\lambda = \overline{1, \Lambda}$ ). Действительно, часть аддитивных инвариантов  $\psi_i^\lambda$  соответствует условию сохранения микрочастиц, не изменяющихся при столкновениях, формирующих рассматриваемое квазистационарное состояние. В этом случае массовая плотность  $\rho$  равна сумме величин  $\psi_\lambda$ , представляющих собой произведение плотностей этих частиц и их массы  $m_\lambda$ . При этом уравнение неразрывности следует из уравнения (7).

Из сказанного выше и соотношений (2)–(4), (8) следует, что зависимость параметров, входящих в уравнения (5)–(7), от координат и времени определяется функциями  $\gamma_0(\mathbf{r}, t)$  (или  $T(\mathbf{r}, t)$ ),  $\gamma_1(\mathbf{r}, t), \dots, \gamma_\Lambda(\mathbf{r}, t)$ .

В работе [5] при исследовании энтропии Больцмана, соответствующей различным квазистационарным состояниям газовых смесей, показано, что величины  $\gamma_\lambda$  являются интенсивными параметрами, сопряженными экстенсивным параметрам, плотности которых  $\psi_\lambda$  определены в (2)–(4). Там же показано, что якобиан перехода от экстенсивных параметров к интенсивным положителен:

$$\det = \frac{D(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_\Lambda)}{D(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\Lambda)} > 0. \quad (9)$$

Следовательно, систему (5)–(7) можно рассматривать в качестве системы дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $\gamma_0(\mathbf{r}, t)$  (или  $T(\mathbf{r}, t)$ ),  $\gamma_1(\mathbf{r}, t), \dots, \gamma_\Lambda(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  [8].

В случае, когда неравновесные процессы “заморожены” или течение является локально-равновесным, правые части уравнений (6), (7) равны нулю. При этом система уравнений (5)–(7), записанная в терминах интенсивных параметров, имеет вид [8]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{1}{\gamma_0} \left( \tilde{H} \nabla \gamma_0 + \sum \Psi_\lambda \nabla \gamma_\lambda \right); \quad (10)$$

$$\frac{d\gamma_\lambda}{dt} = -\chi_\lambda \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \lambda = \overline{0, \Lambda}. \quad (11)$$

В (10), (11)  $\tilde{H} = (\tilde{e} + p)/\rho$  — удельная энтальпия газа;  $\Psi_\lambda = \psi_\lambda/\rho$  — удельные значения суммарных аддитивных инвариантов  $\psi_\lambda$  ( $\lambda = \overline{1, \Lambda}$ );  $\chi_\lambda = \det_\lambda / \det$ ;  $\det$  — определитель (9);  $\det_\lambda$  — определители (9), в которых столбцы производных по  $\gamma_\lambda$  заменены столбцом коэффициентов при  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  в уравнениях (6), (7).

Из уравнений (6), (7) с нулевыми правыми частями, выражения (8) для давления  $p$  и уравнения неразрывности получаем интегралы движения [7]

$$\Psi_\lambda = \psi_\lambda/\rho = \text{const}, \quad \lambda = \overline{1, \Lambda}; \quad (12)$$

$$\gamma_0 \tilde{H} + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \gamma_\lambda \Psi_\lambda = \text{const}. \quad (13)$$

Отметим, что равенство (13) можно рассматривать как обобщение адиабаты.

В случае безвихревых течений при  $\mathbf{F} = -\nabla U$  получаем интеграл Лагранжа в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U + \tilde{H} = 0. \quad (14)$$

При исследовании скорости звука в качестве скорости распространения малых возмущений скорость газа полагается малой, остальные газодинамические параметры включая  $\gamma_\lambda$  ( $\lambda = \overline{0, \Lambda}$ ) — отличающимися от постоянных значений малыми величинами.

Ограничиваясь величинами первого порядка малости и пренебрегая членами вида  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \gamma_\lambda$  в (11) и  $v^2/2$  в (14), имеем

$$\frac{\partial \gamma_\lambda}{\partial t} = -\chi_\lambda \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \lambda = \overline{0, \Lambda}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U + \tilde{H} = 0. \quad (16)$$

Используя традиционный подход [1, 2], соотношение (16) продифференцируем по времени. В предположении, что потенциал  $U$  не зависит от времени, получим равенство

$\partial^2\varphi/\partial t^2 + \partial\tilde{H}/\partial t = 0$ . Далее, используя для вычисления  $\partial\tilde{H}/\partial t$  интегралы движения (12), (13), заменяя входящие в полученную формулу частные производные  $\partial\gamma_\lambda/\partial t$  выражениями (15) и учитывая соотношение  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \Delta\varphi$ , получаем волновое уравнение [8]

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\gamma_0} \left( \tilde{H}\chi_0 + \sum_{\lambda} \Psi_{\lambda\chi\lambda} \right) \Delta\varphi, \quad (17)$$

в котором коэффициент можно отождествить с квадратом скорости звука  $a$ .

Представляя входящие в уравнение (17) удельные значения энтальпии  $\tilde{H}$  и суммарных аддитивных инвариантов  $\Psi_{\lambda}$  в виде отношений плотностей соответствующих величин  $\tilde{e} + p$  и  $\psi_{\lambda}$  к массовой плотности газа  $\rho$ , умножая и деля правую часть (17) на общее число частиц  $n^0$  в единице объема и используя для давления  $p$  формулу (8), получаем выражение для квадрата скорости звука в виде

$$a^2 = \varkappa \frac{p}{\rho}, \quad \varkappa = \langle \tilde{h} \rangle \chi_0 + \sum_{\lambda} \langle \psi_{\lambda} \rangle \chi_{\lambda} \quad (18)$$

( $\langle \tilde{h} \rangle = (\tilde{e} + p)/n^0$ ,  $\langle \psi_{\lambda} \rangle = \psi_{\lambda}/n^0$  — средние значения энтальпии и инвариантов  $\psi_i^{\lambda}$  на одну молекулу). Следует также отметить, что формула (8) для давления  $p$ , зависимость  $n^0 = \sum_i n_i^0$  от параметров  $\gamma_{\lambda}$  (см. (4)), уравнение неразрывности и уравнения (11) позволяют представить коэффициент при  $\Delta\varphi$  в уравнении (17) (а следовательно, величину  $a^2$ ) в виде  $a^2 = dp/d\rho$ . (Заметим, что в этом случае данное выражение представляет собой отношение полных дифференциалов давления и плотности.)

Химически однородный двухатомный газ, являясь достаточно простым объектом исследования, тем не менее позволяет изучить различные стадии поступательно-вращательной и колебательной релаксации. В связи с созданием молекулярных лазеров в последние десятилетия появилось большое количество работ, посвященных исследованию неравновесных состояний высокотемпературного двухатомного газа (см., например, работы [3–6] и библиографию к ним).

Известно, что при высоких температурах двухатомные молекулы обладают вращательными и колебательными степенями свободы, для описания последних, как правило, используется модель ангармонического осциллятора:

$$\varepsilon_v = v\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon v(v-1), \quad \varepsilon_1 = h\nu(1-2x), \quad \Delta\varepsilon = xh\nu, \quad v \in [0, v_d]. \quad (19)$$

Здесь  $\varepsilon_v$  — колебательная энергия молекулы, отсчитываемая от нулевого уровня;  $v$  — номер уровня колебательной энергии;  $\nu$  — частота колебаний атомов в молекуле;  $x \ll 1$  — постоянная ангармоничности;  $v_d$  — колебательный уровень, соответствующий энергии диссоциации.

При столкновениях молекул изменение их поступательной и вращательной энергии происходит значительно чаще, чем колебательные обмены:

$$(v) + (v_1) \rightleftharpoons (v') + (v'_1), \quad (20)$$

которые также могут происходить с различной частотой [6].

Согласно данным работ [9, 10] вероятность колебательного обмена (20) возрастает более чем на порядок при уменьшении в два раза величины  $\alpha = |\varepsilon_{v'} + \varepsilon_{v'_1} - \varepsilon_v - \varepsilon_{v_1}| / (\varepsilon_v + \varepsilon_{v_1})$ , которая представляет собой отношение дефекта резонанса колебательной энергии к ее значению до столкновения. В этих условиях процесс колебательной релаксации двухатомного газа можно разделить на несколько стадий и записать систему неравенств в виде [5]

$$\tau_{RT} \ll \tau_{VT}^{1/8} \ll \tau_{VT}^{1/4} \ll \tau_{VT}^{1/2} \ll \tau_{VRT}.$$

Здесь  $\tau_{RT}$  — время релаксации по поступательным и вращательным степеням свободы;  $\tau_{VT}^\alpha$  — времена частичной колебательной релаксации (на этих стадиях в процессе формирования квазистационарных состояний наряду с поступательно-вращательными переходами молекул участвуют переходы (20), при которых относительный дефект резонанса  $\alpha < 1/8, 1/4, 1/2$  соответственно);  $\tau_{VRT}$  — полное время релаксации (время установления термодинамического равновесия).

Поведение газодинамических параметров и заселенностей колебательных уровней на границах соответствующих релаксационных зон внутри области прямого скачка уплотнения, возникающего в равновесных и колебательно-неравновесных потоках двухатомного газа, и за ней исследовано в [11–13]. В этих работах для различных стадий релаксации двухатомного газа получены замкнутые системы газодинамических уравнений и изучены их свойства в условиях локального равновесия и в случаях, когда влиянием медленных физико-химических процессов можно пренебречь. В настоящей работе рассматривается изменение скорости звука на этих стадиях релаксации.

Конкретизируя формулу (18) для указанных выше стадий релаксации двухатомного газа, моделируемого ангармоническими осцилляторами, можно оценить влияние молекулярных столкновений различного типа на скорость звука.

На стадии завершения поступательно-вращательной релаксации аддитивными инвариантами, входящими в распределения (1), являются поступательно-вращательная энергия и номер уровня колебательной энергии молекулы, которым соответствуют определяющие макропараметры: плотность поступательно-вращательной энергии  $\tilde{e} = e_{RT}$ , заселенность колебательных уровней  $n_v$  ( $v = \overline{0, v_d}$ ) и среднемассовая скорость  $\mathbf{v}$ . Коэффициент  $\varkappa$  в формуле (18) имеет вид

$$\varkappa = \langle h_{RT} \rangle \chi_0 + \sum_{v=0}^{v_d} \langle n_v \rangle \chi_{v+1}. \quad (21)$$

Здесь  $\langle h_{RT} \rangle = (e_{RT} + p)/n$ ;  $\langle n_v \rangle = n_v/n$ ;  $n = \sum_{v=0}^{v_d} n_v$ ;  $n_v = Z_{RT}(\gamma_0) \exp \gamma_{v+1}$ ;  $Z_{RT}(\gamma_0)$  — статистическая сумма молекулы по поступательным и вращательным степеням свободы. Легко показать, что при классическом описании вращательных степеней свободы  $\varkappa = 7/5$  [7].

На стадиях завершения частичной колебательной релаксации  $VT(\alpha)$  ( $\alpha = 1/8, 1/4, 1/2$ ) в распределение (1) наряду с инвариантом, соответствующим полной (поступательно-вращательно-колебательной) энергии молекулы, и  $\psi_i^1 = 1$  входит дополнительный аддитивный инвариант  $\psi_i^2 = \psi_\alpha(v)\varepsilon_1$  ( $\Lambda = 2$ ), представляющий собой квазигармоническую аппроксимацию колебательной энергии (19) ангармонического осциллятора с относительной точностью  $\alpha$  (см. [5]). Определяющими макропараметрами являются плотность полной энергии  $\tilde{e} = e$ , число частиц  $n^0 = n$ , суммарное значение  $n\langle \psi_\alpha \rangle \varepsilon_1$  дополнительного аддитивного инварианта  $\psi_\alpha(v)\varepsilon_1$  ( $\langle \psi_\alpha \rangle$  — среднее значение величины  $\psi_\alpha(v)$  на одну молекулу) и скорость  $\mathbf{v}$ . Коэффициенты  $\varkappa$  в формуле (18) имеют вид

$$\varkappa = \langle h \rangle \chi_0 + \chi_1 + \langle \psi_\alpha \rangle \varepsilon_1 \chi_\alpha \quad (22)$$

( $\langle h \rangle = (e + p)/n$ ). Соотношения (22), (18) определяют аналитическую зависимость скорости звука от параметров  $\gamma_0$  (или  $T$ ),  $\gamma_1$  (или  $n$ ) и  $\gamma_2$ .

После завершения релаксационного процесса в распределение (1) входят лишь инварианты, соответствующие сохранению полной энергии и числа частиц. Определяющими макропараметрами являются  $e$ ,  $n$ ,  $\mathbf{v}$ . В этих условиях коэффициент  $\varkappa$  в (18) принимает вид

$$\varkappa = \langle h \rangle \chi_0 + \chi_1. \quad (23)$$

Соотношения (22), (23) позволяют определить зависимость скорости звука от колебательных заселенностей молекул.

На стадиях частичной колебательной релаксации относительные колебательные заселенности можно представить в виде  $x_v(\alpha) = n_v(\alpha)/n_0(\alpha) = \exp[\gamma_0\varepsilon_v + \gamma_2\psi_\alpha(v)\varepsilon_1]$ . На нижних колебательных уровнях кусочно-линейная функция  $\psi_\alpha(v) = v$ . При использовании равенства  $\gamma_0 = -1/(kT)$  и представления  $\gamma_2 = 1/(kT) - 1/(kT_1)$  ( $T_1$  — так называемая температура первого колебательного уровня) относительные заселенности  $x_v(\alpha)$  на этих уровнях соответствуют распределению Гринора [14]. Отношение температур  $T_1/T$  определяет степень колебательного возбуждения молекул газа. При  $T_1/T > 1$  заселенности колебательных уровней тем больше превышают больцмановские, чем больше значения  $T_1/T$  [5]. Наиболее существенно это проявляется на предпоследней стадии колебательной релаксации ( $t \sim \tau_{VT}^{1/2}$ ), которая представляет наибольший интерес, так как помимо локально-равновесных течений ( $\alpha \approx 1$ ) достаточно распространены неравновесные квазистационарные течения при  $\alpha < 1/2$ .

На рис. 1 показаны относительные заселенности колебательных уровней молекул азота  $y = \ln x_v/(\varepsilon_1/(kT_1))$  на стадии частичной колебательной релаксации  $VT(1/2)$  и в состоянии равновесия.

На рис. 2 представлены рассчитанная по формуле (22) зависимость коэффициента  $\varkappa(T)$  для молекулярного азота на стадии релаксации  $VT(1/2)$  при  $n = n_L$  ( $n_L$  — число Лошмидта) и различных значениях  $T_1$ , а также зависимость  $\varkappa(T)$  в состоянии термодинамического равновесия, рассчитанная по формуле (23).

На рис. 1, 2 на примере молекулярного азота показана зависимость между заселенностями колебательных уровней молекул и значением коэффициента  $\varkappa$ . В состоянии равновесия при достаточно низких температурах (когда возбуждением колебаний можно прене-

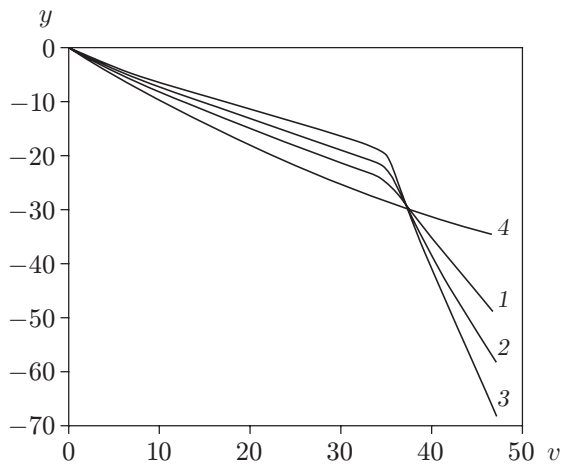


Рис. 1

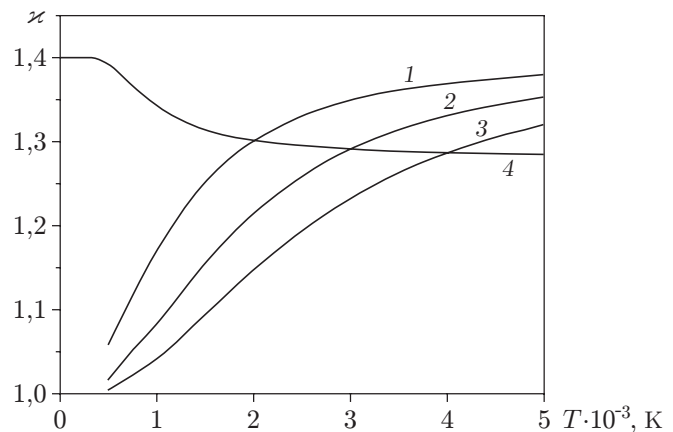


Рис. 2

Рис. 1. Относительные заселенности колебательных уровней молекул азота при различных значениях  $T_1/T$ :

1–3 — стадии частичной колебательной релаксации  $VT(1/2)$  (1 —  $T_1/T = 4$ ; 2 —  $T_1/T = 6$ ; 3 —  $T_1/T = 8$ ); 4 — состояние равновесия

Рис. 2. Зависимость коэффициента  $\varkappa$  молекулярного азота от температуры при различных значениях  $T_1$ :

1–3 — стадии частичной колебательной релаксации  $VT(1/2)$  (1 —  $T_1 = 2 \cdot 10^3$  К; 2 —  $T_1 = 3 \cdot 10^3$  К; 3 —  $T_1 = 4 \cdot 10^3$  К); 4 — состояние равновесия

бречь)  $\kappa = 1,4$ . С повышением температуры и увеличением заселенностей колебательных уровней значение  $\kappa$  монотонно уменьшается, при достаточно высокой температуре приближаясь к некоторому постоянному значению. В неравновесных условиях при увеличении значений отношения  $T_1/T$  увеличивается заселенность нижних и средних колебательных уровней и уменьшается значение коэффициента  $\kappa$  в формуле (18), т. е. при одинаковых плотности и давлении скорость звука ниже. Подобные зависимости получены авторами данной работы и для других газов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973. Т. 2.
2. **Валландер С. В.** Лекции по гидроаэромеханике. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1978.
3. **Валландер С. В.** Некоторые вопросы кинетической теории химически реагирующей смеси газов / С. В. Валландер, Е. А. Нагнибеда, М. А. Рыдалевская. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1977.
4. **Нагнибеда Е. А.** Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов / Е. А. Нагнибеда, Е. В. Кустова. СПб.: Изд-во С.-Петербур. гос. ун-та, 2003.
5. **Рыдалевская М. А.** Статистические и кинетические модели в физико-химической газодинамике. СПб.: Изд-во С.-Петербур. гос. ун-та, 2003.
6. **Гордиец Б. Ф.** Кинетические процессы в газах и молекулярные лазеры / Б. Ф. Гордиец, А. И. Осипов, Л. А. Шелепин. М.: Наука, 1980.
7. **Рыдалевская М. А.** Аэродинамические свойства течений газа с физико-химическими процессами // Аэродинамика. СПб.: Изд-во Науч.-исслед. ин-та химии С.-Петербур. гос. ун-та, 2000. С. 45–65.
8. **Rydalevskaya M. A.** Kinetic foundation of nonextensive gas dynamics // Proc. of the 24th Intern. symp. on rarefied gas dynamics, Bari (Italy), July 10–16, 2004. Melville; N. Y.: S. n., 2005. P. 1073–1078.
9. **Никитин Е. Е., Осипов А. И.** Колебательная релаксация в газах. М.: ВИНТИ, 1977. (Итоги науки и техники. Сер. Кинетика и катализ; Т. 4).
10. **Осипов А. И., Уваров А. В.** Кинетические и газодинамические процессы в неравновесной молекулярной физике // Успехи физ. наук. 1992. Т. 162, № 11. С. 1–42.
11. **Рыдалевская М. А.** Газодинамические скачки в релаксирующем газе // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 92–97.
12. **Ворошилова Ю. Н., Рыдалевская М. А.** Прямые скачки уплотнения в колебательно-неравновесном газе // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 5. С. 26–31.
13. **Ворошилова Ю. Н.** Структура прямых скачков уплотнения в колебательно-неравновесном газе // Вестн. С.-Петербур. гос. ун-та. Сер. 1. 2005. Вып. 1. С. 70–78.
14. **Treanor C. E., Rich J. W., Rehm R. G.** Vibrational relaxation of anharmonic oscillators with exchange dominated collisions // J. Chem. Phys. 1968. V. 48, N 4. P. 1798–1807.

*Поступила в редакцию 24/V 2007 г.*