

**ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНВЕРСНОЙ ЗАСЕЛЕННОСТИ
И КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ ГАЗА ПРИ АДИАБАТИЧЕСКОМ
РАСШИРЕНИИ В СОПЛЕ**

Г. В. Гембаржевский

(Москва)

В работе получены приближенные аналитические выражения для мощности и коэффициента усиления слабого сигнала газодинамического лазера в более общих предположениях, чем использовались ранее. Так, для получения простой теоретической оценки коэффициента усиления слабого сигнала в [1] были сделаны следующие допущения: всюду в потоке газа заселенность третьей моды CO_2 постоянна и равна заселенности в горле сопла, а заселенность двух других мод CO_2 находится в равновесии с поступательным движением. Приблизительно такие же результаты получены в [2], но как следствие предположения о бесконечно большой скорости охлаждения газа в сопле по сравнению со скоростью колебательной релаксации. Поэтому [2] позволяет найти область применимости результатов, полученных в [1], которая оказывается ограниченной относительно низкими температурой и давлением торможения.

Закон подобия для коэффициента усиления газодинамического лазера в области сравнительно высоких давлений торможения предложен в [3]. Решение модельной задачи о колебательной релаксации с постоянными скоростями реакций позволило получить закон подобия лишь с точностью до неизвестной функции от температуры торможения, показателя адиабаты газа и конфигурации сопла. Для определения этой функции необходим численный расчет системы кинетических и газодинамических уравнений для сопла [4-6].

Вследствие пренебрежения изменением скорости колебательной релаксации вдоль сопла область применимости полученных результатов [1-3] существенно ограничена: так, в [1, 2] требуется ограничить сверху параметры торможения, а в [3] фиксируются конфигурация сопла, температура торможения и показатель адиабаты газа.

В настоящей статье с помощью учета зависимости коэффициентов кинетических уравнений от времени предполагается получить аналитические выражения для зависимости мощности и коэффициента усиления газодинамического лазера от формы и размеров сопла, параметров торможения и состава газа, справедливые в широкой области изменения этих параметров.

Примем обычные допущения, используемые в численных расчетах [4-6]: существуют колебательные температуры T_i отдельных мод смеси (индекс $i = 1, 2, 3$ относится к модам CO_2 , $i = 4$ — к азоту), вращательная температура равна поступательной T , газодинамическое течение квазиодномерно и пренебрежем эффектами вязкости и теплопроводности. Кроме того, примем еще два малосущественных допущения: характеристическая температура третьей моды CO_2 равна характеристической температуре четвертой моды, т. е. азота $\theta_3 = \theta_4$, скорость обмена между первой и второй модами CO_2 выше скорости охлаждения газа, т. е. $Y_1 = Y_2^2 \exp \cdot (-78/T) \approx Y_2^2$, где $Y_i = \exp(-\theta_i/T_i)$ — величина, определяющая заселенность моды i , а θ_i — характеристическая температура моды i . Это допущение используется в работах [3, 6], а в [5] показано, что оно выполняется с высокой степенью точности даже при низких давлениях.

И, наконец, основным допущением является следующее: зависимость газодинамических величин от времени в коэффициентах кинетических уравнений можно аппроксимировать зависимостью для течения газа с постоянным показателем адиабаты γ . Действительно, данные, приведенные в [6], позволяют утверждать, что точность расчета инверсной заселенности

с использованием последнего предположения лежит в пределах $\pm 25\%$. Погрешность в расчете тем ниже, чем меньше начальный запас колебательной энергии, т. е. чем ниже температура торможения и чем больше относительные концентрации гелия Ψ_2 и азота Ψ_2 .

Используя указанные выше допущения, получим систему

$$dY_2/dX_2 = A_{21}(Y_2 - X_2) - mA_{31}(Y_3 - Y_2^3 X_2^{-3} X_3) \quad (1)$$

$$dY_3/dX_3 = A_{31}(Y_3 - Y_2^3 X_2^{-3} X_3) - A_{32}(Y_4 - X_3) \quad (2)$$

$$dY_4/dX_4 = A_{41}(Y_4 - X_4) - rA_{32}(Y_3 - Y_4) \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения: X_i — равновесные значения Y_i

$$X_i = \exp(-\theta_i/T), \quad A_{ij} = N_* W_{ij} R_{ij} H^{-1} X_i^{-1}$$

$$W_{21} = 0.5\theta_2^{-1} \sum_{\alpha=1}^3 P_{21}^{\alpha} P_{\alpha} \sigma_{\alpha}^1 U_{\alpha}^1 / C$$

$$W_{31} = \theta_3^{-1} \sum_{\alpha=1}^3 P_{31}^{\alpha} P_{\alpha} \sigma_{\alpha}^1 U_{\alpha}^1 / C$$

$$W_{41} = \theta_4^{-1} \sum_{\alpha=1}^3 P_{41}^{\alpha} P_{\alpha} \sigma_{\alpha}^2 U_{\alpha}^2 / C$$

$$W_{32} = \theta_3^{-1} P_{32}^2 \Psi_2 \sigma_2^1 U_2^1 / C$$

N_* — значение плотности газа в горле сопла; Ψ_{α} — относительная концентрация вещества α (индекс α принимает значения 1, 2, 3, что обозначает углекислый газ, азот и гелий соответственно); σ_{α}^1 — сечение столкновения молекулы CO_2 и молекулы α согласно данным работы [7]; σ_{α}^2 — сечение столкновения молекулы N_2 и молекулы α согласно [7]; U_{α}^1 — средняя относительная скорость молекул α и CO_2 ; U_{α}^2 — средняя относительная скорость молекул α и N_2 ; C — скорость звука P_{i1}^{α} (P_{32}^2) — вероятности соответствующих колебательных переходов при единичном столкновении с молекулой α (N_2). В соответствии с [5,7] здесь приняты следующие значения:

$$P_{21}^1 = 450T^{-1/2} \exp(-110T^{-1/3} + 100T^{-2/3})$$

$$P_{21}^2 = 3.0P_{21}^1, \quad P_{21}^3 = 10T^{-1/2} \exp(-50T^{-1/3})$$

$$P_{31}^1 = 2.5 \exp(-80T^{-1/3} + 60T^{-2/3}), \quad P_{31}^2 = 0.4P_{31}^1$$

$$P_{31}^3 = 0.16P_{31}^1, \quad P_{41}^{\alpha} = 1.4 \cdot 10^5 \exp(-280T^{-1/3})$$

$$P_{32}^2 = 4 \cdot 10^{-9} (1100 - T)^2 + 6 \cdot 10^{-4}$$

$$R_{21} = (1 - Y_2)^{4/3} (1 - Y_2^2) (1 - Y_3) [1 + 2Y_2 (1 + Y_2)^{-2}]^{-1}$$

$$R_{31} = (1 - Y_2)^2 (1 - Y_2^2) (1 - Y_3)^3, \quad R_{41} = (1 - Y_4)^3$$

$$R_{32} = (1 - Y_2)^2 (1 - Y_2^2) (1 - Y_3)^3 (1 - Y_4)$$

$$m = 5.25 (1 - Y_2)^2 (1 - Y_3)^{-2} [1 + 2Y_2 (1 + Y_2)^{-2}]^{-1} \exp \times \\ \times (-2420 \cdot T^{-1})$$

$$r = \Psi_1 \Psi_2^{-1} (1 - Y_4)^2 (1 - Y_3)^{-2}$$

$$H = \frac{dS}{dl} \frac{[1 + 2k(1-t)]^2}{S_* (1-t) t^{1/2} T k (1+2k)}$$

где $S = S(l)$ — сечение сопла на расстоянии l от горла, S_* — сечение сопла в горле, T_* — поступательная температура в горле, $t = T/T_*$, $k = (\gamma - 1)^{-1}$, γ — показатель адиабаты смеси.

Допустим, что область «замораживания» третьей и двух других мод CO_2 разделены, тогда $Y_3 - Y_2^3 X_2^{-3} X_3 \approx Y_3 - X_3$. Ниже показано, что

это действительно так в интересных с точки зрения получения инверсной заселенности случаях.

Рассматривая систему уравнений (1) — (3), отметим, что коэффициенты A сильно зависят от X , так что в горле сопла $AX \gg 1$, а в конце сопла $AX \ll 1$, т. е. вначале скорость охлаждения газа меньше скорости колебательной релаксации, а затем картина меняется на обратную. Предполагая, что $dY/dX \approx Y/X$ (подобное допущение использовалось в работе [8]), можно найти решения системы в обоих предельных случаях — $AX \gg 1$. Наконец, сшивая решения в точке X^+ , где $AX^+ = 1$, получим замороженные значения Y^+ . Начальные условия не влияют на Y^+ , если в горле сопла выполнено условие $AX \gg 1$.

Конкретные результаты следующие.

1°. Суммарная скорость колебательной релаксации N_2 и третьей моды CO_2 определяется переходом A_{31} , т. е. пусть $A_{31}(X_{331}^+) < rA_{32}(X_{331}^+)$ где X_{331}^+ определяется как корень уравнения $X_3 A_{31}(X_3) = 1$, тогда

$$Y_3^+ \simeq Y_4^+ \simeq \left[\left(\frac{2r+1}{rA_{31}} + \frac{1}{r(r+1)A_{32}} \right) \left(1 + \frac{A_{41}}{rA_{31}} + \frac{A_{41}}{rA_{32}} \right)^{-1} \right]_{X_3=X_{331}^+} \quad (4)$$

Здесь и в формулах (5, 6) выражение в квадратных скобках берется в точках, указанных за скобками.

2°. Ограничивающим переходом является переход A_{32} . Пусть

$$rA_{32}(X_{332}^+) < A_{31}(X_{332}^+), \quad A_{41}(X_{332}^+) < rA_{31}(X_{332}^+), \quad X_{352}^{++} < X_{331}^+ < X_{332}^+$$

где X_{331}^+ определено выше, X_{332}^{++} и X_{332}^+ — соответственно меньший и больший корни уравнения $X_3 rA_{32}(X_3) = 1$. В этом случае

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{1}{rA_{31}} + \frac{2}{r(r+1)A_{32}} \right) \left(1 + \frac{A_{41}}{rA_{31}} + \frac{A_{41}}{rA_{32}} \right)^{-1} \right]_{X_3=X_{332}^+} \leq Y_3^+ \simeq \\ & \simeq Y_4^+ \leq \left[\left(\frac{1+r}{rA_{31}} + \frac{2}{r(r+1)A_{32}} \right) \left(1 + \frac{A_{41}}{rA_{31}} + \frac{A_{41}}{rA_{32}} \right)^{-1} \right]_{X_3=X_{332}^+} \end{aligned} \quad (5)$$

В обоих указанных выше случаях для замороженного значения Y_2^+ получаем

$$Y_2^+ = [2A_{21}^{-1} (1 + mA_{31}Y_3^+)]_{X_2=X_2^+} \quad (6)$$

где X_2^+ определяется уравнением $X_2 A_{21}(X_2) = 1$.

Отметим следующее важное обстоятельство: замороженная заселенность первой и второй мод CO_2 $Y_1^+ = (Y_2^+)^2$ может быть сделана сколь угодно малой за счет подбора формы сопла $S_*^{-1} dS/dl$ ниже сечения, где замораживается третья мода CO_2 ($X_3 \approx X_{332}^+$), если в этой области сопла выполняется неравенство $W_{21}R_{21} \gg W_{31}R_{31}$. Для этого оказывается достаточно 30—40% гелия в смеси согласно принятым значениям вероятностей процессов. Тем самым обосновано допущение о разделе областей замораживания третьей и двух других мод CO_2 .

Учитывая сказанное выше относительно заселенности первой и второй мод CO_2 , будем считать, что максимальная мощность P , которую можно извлечь из газовой смеси в виде когерентного излучения, определяется мощностью, запасенной в третьей моде CO_2 и в азоте, т. е.

$$P = h(\nu_3 - \nu_1) S_* U_* N_* [\Psi_1 Y_3^+ (1 - Y_3^+)^{-1} + \Psi_2 Y_4^+ (1 - Y_4^+)^{-1}] \quad (7)$$

где $h(\nu_3 - \nu_1)$ — энергия кванта излучения, $S_* U_* N_*$ — расход газа.

Анализируя формулы (4), (5), (7) (и считая независимыми переменными $S = S(l), T_*, X_3^+, \Psi_1, \Psi_1 + \Psi_2$), можно указать оптимальные условия для достижения максимальной мощности.

1. Угол β между осью и образующей осесимметричного сопла или половину угла между плоскостями клинового сопла следует выбрать максимально допустимыми, так как $P \sim \operatorname{tg} \beta$ (имеется в виду та часть сопла, где замораживается третья мода CO_2 , т. е. $X_3 \approx X_3^+$).

2. Так как $P \sim S_*^{1/2}$ для осесимметричного сопла, то при фиксированном суммарном критическом сечении следует использовать несколько сопел вместо одного (в соответствии с рекомендациями работы [4]), одновременно увеличивая плотность в критическом сечении пропорционально $S_*^{-1/2}$ (тогда все прочие параметры останутся неизменными, в частности число Рейнольдса). Для клинового сопла мощность пропорциональна его ширине.

3. Критическую температуру следует выбрать по возможности максимальной, так как $P \sim T_*^{1+k/2}$ для осесимметричного сопла и $P \sim T_*$ для клинового. Лишь процесс диссоциации ограничивает T_* сверху.

4. Мощность зависит от суммарной относительной концентрации CO_2 и N_2 не сильнее, чем $P \sim \Psi_1 + \Psi_2$. Величина $\Psi_1 + \Psi_2$ ограничивается относительной концентрацией He, требуемой для эффективной дезактивации первой и второй мод CO_2 ($\Psi_1 + \Psi_2 \leq 0.7$).

5. Для 1° зависимость P от X_{331}^+ обнаруживает пологий максимум в области $X_{331}^+ = 2 \cdot 10^{-2}$ и $2 \cdot 10^{-1}$ для осесимметричного и клинового сопла соответственно.

6. В случае 1° оптимальное значение $r = A_{31}(X_{331}^+) / A_{32}(X_{331}^+)$; $P \sim \Psi_1^{-1}$.

Рассмотрим теперь коэффициент усиления слабого сигнала газодинамического лазера g . Отметим, что наибольший интерес представляет не столько коэффициент усиления, сколько оптическая толщина на ширине сопла gd , определяемая равенством

$$\Delta I / I = \exp(gd) - 1$$

где $\Delta I / I$ есть относительное увеличение интенсивности света при прохождении слоя оптически активной среды толщиной d , равной ширине сопла.

Оказывается, что и оптическая толщина gd , и коэффициент усиления g как функции расстояния вдоль сопла достигают максимума в той точке, где плотность падает до значения $N_0 \approx 2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ (т. е. там, где лоренцовская форма линии сменяется на доплеровскую). Под g здесь понимается коэффициент усиления в центре колебательно-вращательной линии, причем вращательное квантовое число J выбирается оптимальным при данной температуре. Приведенный выше вывод справедлив, если замораживание первой и второй мод CO_2 заканчивается раньше, чем плотность газа падает до значения $N_0 \approx 2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Этого можно добиться всегда, увеличивая плотность газа N_* и уменьшая радиус критического сечения осесимметричного сопла или высоту клинового пропорционально N_*^{-1} , причем все остальные параметры остаются без изменения.

Максимальный коэффициент усиления $\max g$ и максимальное значение усиления света по ширине осесимметричного сопла $\max gd$ определяются формулами

$$\max g \approx a \Psi_1 (Y_3^+ - Y_1^+) (1 - Y_1^+) (1 - Y_2^+)^2 (1 - Y_3^+) [T(N_0)]^{-1} \quad (8)$$

$$\max gd \approx \frac{2a \Psi_1 (Y_3^+ - Y_1^+) (1 - Y_1^+) (1 - Y_2^+)^2 (1 - Y_3^+) S_*^{1/2}}{\pi^{1/2} T(N_0) [t(N_0)]^{k/2} [1 + 2k - 2kt(N_0)]^{1/4}} \quad (9)$$

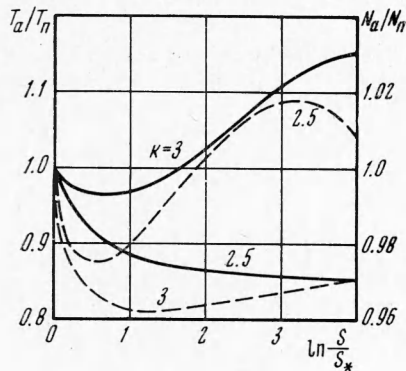
где $a = 3 \cdot 10^2, \text{ см}^{-1} \text{ град}$.

Анализируя формулы (4), (5), (8), (9) (и считая независимыми переменными $S = S(l)$, T_* , X_3^+ , Ψ_1 , $\Psi_1 + \Psi_2$), получаем следующие условия для достижения максимального усиления на ширине сопла.

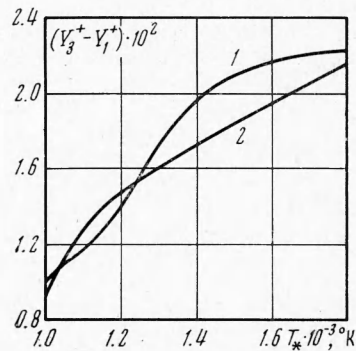
1. Угол β следует выбирать максимально допустимым, так как $\max gd \sim (\operatorname{tg} \beta)^{1/2+1/k}$, $\max g \sim (\operatorname{tg} \beta)^{1/k}$.

2. Для осесимметричного сопла $\max gd \sim S_*^{(k-2)/4k}$. Поэтому при фиксированном суммарном критическом сечении следует использовать несколько осесимметричных сопел вместо одного. В клиновом сопле следует увеличивать его ширину d и уменьшать высоту в критическом сечении h_* , так как $(\max g) d \sim dh_*^{-1/k}$.

3. Для осесимметричного сопла T_* следует выбирать максимально допустимой, так как $\max gd \sim T_*^{(n^2-k+2)/4k}$. Для клинового сопла максимум



Фиг. 1



Фиг. 2

усиления достигается при температуре, определяемой выражением

$$T_* \simeq -\theta_3 / \ln X_3^+$$

(т. е. замораживание третьей моды CO_2 должно происходить в горле сопла).

4. Соответствует п. 4 условий достижения максимальной мощности.

5. Для 1° оптимальное значение $X_{331}^+ = 3 \cdot 10^{-1}$ для клинового сопла, а для осесимметричного X_{331}^+ следует выбирать максимально допустимым, учитывая то, что процесс диссоциации ограничивает X_{331}^+ сверху. Максимум в зависимости оптической толщины от X_{331}^+ выражен слабо (пологий).

6. В 1° для осесимметричного сопла оптимальное значение $r = A_{31}(X_{331}^+) / A_{32}(X_{331}^+)$. Для клинового сопла оптимальное значение r бесконечно велико ($\Psi_2 = 0$).

7. Сравнивая эффективность клинового и ряда осесимметричных сопел, получаем следующий результат. При фиксированных параметрах ΣS_* , $\operatorname{tg} \beta$, T_* , X_3^+ , Ψ_1 , $\Psi_1 + \Psi_2$, N_* (ΣS_* — суммарное критическое сечение) отношение максимальных оптических толщин клинового и ряда осесимметричных сопел дается выражением

$$0.5\pi [-T(N_0) \ln X_3^+ / \theta_3]^{k/2}$$

Полученная выше оценка мощности и коэффициента усиления проверялась по численному расчету, опубликованному в работе [5]. Результаты сравнения приведены на графиках. Сплошными линиями на фиг. 1 представлена зависимость отношения поступательной температуры, рассчитанной аналитически (для $k = 2.5, 3$), к температуре, рассчитанной чис-

