

**ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ДВИЖУЩЕГОСЯ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ КЛИНА
С ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА ДВУХ ГАЗОВ**

Р. Я. Тугазаков

(Жуковский)

Задача взаимодействия движущихся тел с неодиородностями (ударными волнами, контактными разрывами), встречающимися в потоке газа, достаточно сложна. Это нелинейная нестационарная задача, в которой реализуется серия взаимодействий между ударными волнами, контактными разрывами и волнами разрежения. Поэтому аналитическое решение данной проблемы рассматривается авторами только в линейной постановке, например, в [1—3].

В общем случае решение задачи взаимодействия находится лишь численно [4—6]. В отдельных случаях можно найти точные ее решения. Так, в [7, 8] получены точные решения, описывающие обтекание движущегося клина падающей на него ударной волной.

В данной работе найден класс точных решений, описывающих взаимодействие движущегося в идеальном газе со сверхзвуковой скоростью клина с границей раздела двух газов. Среда считалась невязкой.

1. Рассмотрим клин с углом полураствора θ (фиг. 1), движущийся со сверхзвуковой скоростью q_0 в среде, где величины давления, плотности и показателя адиабаты соответственно равны $p_0 = 1$, $\rho_0 = 1$, γ_0 . Пусть на клин под некоторым углом β к оси движения набегает поверхность контактного разрыва DBF , где DB — часть поверхности контактного разрыва, еще не испытавшей взаимодействия, BF — новая поверхность контактного разрыва, ABC — головной скачок, BE — ударная волна, отраженная от поверхности контактного разрыва, φ — угол скачка. Исследуем картину течения на верхней поверхности клина при условии, что от поверхности контактного разрыва отражается ударная волна BE . Случай с волной разрежения не рассматривается.

В общем случае картина взаимодействия намного сложнее, чем на фиг. 1. При падении ударной волны BC на контактный разрыв BD отраженная ударная волна BE в свою очередь отражается от поверхности клина и взаимодействует с другими разрывами. Головной скачок ABC в точке B должен преломиться. Контактный разрыв BF отражается от поверхности тела волной сжатия или разрежения. Если же потребовать, чтобы ударная волна BE была перпендикулярна к поверхности клина, в области 2 и 3 скорости были равны и головной скачок ABC не преломлялся, то реализуется простая картина течения, изображенная на фиг. 1. При этом скорость во всех указанных областях относительно системы координат, связанной с точкой B , должна быть сверхзвуковой.

Найдем связи, которые необходимо наложить на параметры течения в областях 0 и 1, чтобы получить картину течения, изображенную на фиг. 1.

В окрестности точки B реализуется картина общей регулярной рефракции ударной волны ABC на контактном разрыве DBF . В отличие от теории обычной регулярной рефракции ударной волны на границе двух сред [9] в данной работе имеется разрыв скорости на первоначальном контактном разрыве. Это вводит дополнительный произвольный параметр в решение рефракционной задачи. Обычно для описания физического состояния в двух областях, разделенных поверхностью контактного разрыва, используются следующие параметры: отношения теплоемкостей γ_0 , γ_1 , скорости звука a_0 , a_1 и давления p_0 и p_1 . При равновесии $p_0 = p_1$.

В данной работе учитывается разрыв скорости на поверхности раздела и для описания состояния газа в двух областях используются еще скорости q_0 , q_1 . Сформулируем математически задачу в системе координат, связанной с тройной точкой B и движущейся с постоянной скоростью q . Величины компонент ее на оси x и y равны

$$q_x = \frac{q_0 \sin \beta \cdot \cos \varphi}{\sin \omega}, \quad q_y = \frac{q_0 \sin \beta \cdot \sin \varphi}{\sin \omega}.$$

Здесь φ — угол головного скачка; ω — угол между поверхностью раздела двух газов и ударной волной ABC ; β — угол, образуемый поверхностью раздела с осью x , совпадающей с осью симметрии клина.

В дальнейших выкладках величины скоростей q и углы отклонения θ в областях $0-4$, вычисленные в системе координат, связанной с подвижной точкой B , будут отличаться от тех же величин, вычисленных в системе координат, связанной с носком клина, чертой сверху.

Из анализа картины обтекания (см. фиг. 1) следует, что для решения задачи необходимо найти компоненты скоростей, величины давле-

ния и плотности в областях $2-4$. Для этого имеются 12 соотношений на скачках AB , BC и BE . Кроме того, в задаче есть 6 неизвестных величин ω , β , ω_4 , u_1 , v_1 , p_1 , для определения которых в задаче имеются дополнительные условия. Здесь ω_4 — угол, образованный скачком BE и направлением вектора скорости газа в областях 4 , u_1 , v_1 — компоненты скорости q , на оси x и y в системе координат, связанной с носком клина.

Из геометрических соображений следует, что величина угла β выражается в виде

$$(1.1) \quad \beta = 180^\circ - \varphi - \omega.$$

Условие того, что волна BE перпендикулярна поверхности клина, накладывает на угол ω_4 следующую связь;

$$(1.2) \quad \omega_4 = 90^\circ + \bar{\theta}_4 - \varphi - \omega,$$

где $\bar{\theta}_4$ — угол отклонения потока за волной BC .

Кроме этих двух геометрических связей, на контактных поверхностях BD и BF должны выполняться еще 4 условия между геометрическими и газодинамическими характеристиками течения.

Во-первых, скорости q_0 и q_1 не могут быть произвольны. Поэтому на контактном разрыве BD должно выполняться равенство их нормальных составляющих. Это в системе координат, связанной с носком клина, равносильно условию

$$(1.3) \quad q_1 \sin(\beta - \theta_1) = q_0 \sin \beta,$$

где $\theta_1 = \operatorname{arctg} u_1/v_1$.

Во-вторых, на контактной поверхности должно выполняться условие равенства давления

$$(1.4) \quad p_2 = p_3.$$

В-третьих, на ней должно соблюдаться условие параллельности потоков

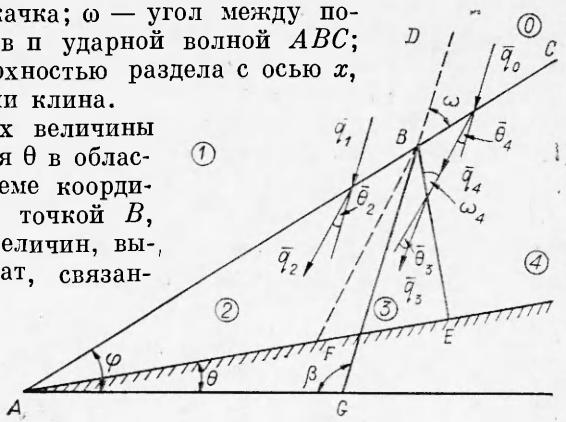
$$(1.5) \quad \bar{\theta}_4 - \bar{\theta}_3 = \bar{\theta}_2,$$

где $\bar{\theta}_2$ и $\bar{\theta}_3$ — углы отклонения потока за волнами AB и BE .

И, в-четвертых, по условию задачи должно выполняться равенство скоростей в областях 2 и 3 :

$$(1.6) \quad \bar{q}_2 = \bar{q}_3.$$

Уравнения (1.1)–(1.6) вместе с соотношениями, описывающими переход через ударные волны AB , BC и BE , составляют полное математическое решение задачи о взаимодействии движущегося клина с границей



Фиг. 1

раздела двух сред, т. е. при заданных параметрах $\gamma_0, \gamma_1, q_0, \theta, p_0, \rho_0$ полностью определяется конфигурация взаимодействующих волн и контактных поверхностей, а также определяются величины плотности и скорости и направление скорости в области I.

2. Рассмотрим решение системы уравнений (1.1) — (1.6). Уравнение (1.4) равносильно следующему соотношению:

$$(2.1) \quad (1 + \mu_1) M_1^2 \sin^2 \omega - \mu_1 = \xi_4 \{ (1 + \mu_0) M_4^2 \sin^2 \omega_4 - \mu_0 \} = \xi_2,$$

где ξ и η (с соответствующими индексами) обозначают интенсивность соответствующего скачка и отношение плотностей на этом скачке;

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1}; \quad \mu_1 = \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}; \quad M_4^2 = \frac{\bar{q}_4^2 \eta_4}{\gamma_0 \xi}; \\ \eta_4 &= \frac{\rho_4}{\rho_1} = \frac{\xi_4 + \mu_0}{\xi_4 \mu_0 + 1}; \quad \bar{q}_4^2 = \bar{q}_0^2 \sin^2 \omega \left(\operatorname{ctg}^2 \omega + \frac{1}{\eta_4^2} \right). \end{aligned}$$

В уравнениях (1.1) — (1.6), (2.1) и далее величины скоростей и углов, если специально не оговорено, взяты в системе координат, связанной с точкой B.

Уравнение (1.5) преобразуется в равенство

$$(2.2) \quad \frac{\operatorname{tg} \omega (\eta_4 - \eta_2)}{\eta_4 \eta_2 + \operatorname{tg}^2 \omega} = \frac{\operatorname{tg} \omega_4 (\eta_3 - 1)}{\eta_3 + \operatorname{tg}^2 \omega_4}.$$

Условие равенства скоростей в областях 2 и 3 приводит к дополнительному соотношению, связывающему величины скоростей в областях 0 и I:

$$(2.3) \quad \bar{q}_1^2 = \bar{q}_0^2 (\cos^2 \omega + \sin^2 \omega / \eta_4^2) (\cos^2 \omega_4 + \sin^2 \omega_4 / \eta_3^2) / (\cos^2 \omega + \sin^2 \omega / \eta_2^2).$$

Используя уравнения (1.2), (2.1), приводим (2.2) к трансцендентному уравнению относительно неизвестного ω , корни которого являются полным решением задачи. Величины ρ_1 и \bar{q}_1 находятся из соотношений (2.3) и левой части (2.1). Для нахождения направления и величины скорости q_1 в системе координат, связанной с носком клина, используется условие (1.3).

Корни уравнения (2.2) искались численно на ЭВМ. Рассмотрен широкий диапазон изменения начальных параметров: $1,1 \leq \gamma_0; \gamma_1 \leq 2,1$; $1,4 \leq q_0 \leq 4; 10^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$. Шаг изменения параметров γ_0 и γ_1 равнялся 0,1, величины скорости $q_0 \sim 0,5$, величины угла клина $\sim 10^\circ$. В расчетах обнаружено, что данное точное решение реализуется только при $\gamma_1 > \gamma_0$. Действительно, в уравнении (2.2) правая часть всегда положительна, и, следовательно, должно выполняться условие.

$$\eta_4 - \eta_2 = \frac{\xi_4 + \mu_0}{\xi_4 \mu_0 + 1} - \frac{\xi_4 \xi_3 + \mu_1}{\xi_4 \xi_3 \mu_1 + 1} > 0.$$

Это равносильно условию

$$(2.4) \quad (\mu_1 - \mu_0)(\xi_4^2 \xi_3 - 1) + \xi_4(1 - \mu_0 \mu_1)(1 - \xi_3) > 0.$$

Таблица 1

$q_0 = 2,52$	$M_0 = 2,4$	$\gamma_0 = 1,1$	$\gamma_1 = 1,4$	$\theta = 10^\circ$	$\varphi = 31,8^\circ$
$p_1 = 1$	$\rho_1 = 1,38$	$q_1 = 2,54$	$\theta_1 = -1,45^\circ$		
$p_2 = 1,72$	$\rho_2 = 2,02$	$q_2 = 2,36$	$\theta_2 = 10^\circ$		
$p_3 = 1,72$	$\rho_3 = 1,63$	$q_3 = 2,36$	$\theta_3 = 10^\circ$		
$p_4 = 1,62$	$\rho_4 = 1,55$	$q_4 = 2,31$	$\theta_4 = 10^\circ$		

$$\omega = 40,9^\circ, \beta = 107,3^\circ$$

В соотношении (2.4) второе слагаемое всегда меньше нуля, поэтому, чтобы оно выполнялось, первый член в нем всегда должен быть больше нуля. Это возможно только при $\mu_1 > \mu_0$ или $\gamma_1 > \gamma_0$.

Общая картина взаимодействия движущегося клина с границей раздела двух сред представлена на фиг. 1, 2. Отметим, что для удобства представления вся картина течения на фиг. 2 повернута по часовой стрелке на 30° .

Значения газодинамических величин для этих двух вариантов вынесены в табл. 1, 2, где в первой строке указаны начальные параметры задачи, а величины скоростей вычислены в системе координат, связанной с носком клина.

На фиг. 1, 2 стрелками показано направление векторов скоростей в областях 0—4 в подвижной системе координат. При этом величины углов отклонения векторов скоростей на фиг. 1 равны $\bar{\theta}_2 = 10,3^\circ$, $\bar{\theta}_3 = 1,4^\circ$, $\bar{\theta}_4 = 11,7^\circ$. При более сильной ударной волне на фиг. 2 эти отклонения значительно сильнее: $\bar{\theta}_2 = 20,4^\circ$, $\bar{\theta}_3 = 8,8^\circ$, $\bar{\theta}_4 = 29,2^\circ$. Анализ резуль-



Фиг. 2

Таблица 2

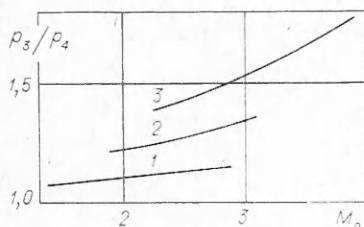
$$q_0=2,52; M_0=2,4; \gamma_0=1,1; \gamma_1=1,9; \theta=30^\circ; \varphi=51,8^\circ$$

$p_1 = 1$	$\rho_1 = 3,15$	$q_1 = 2,47$	$\theta_1 = -11,7^\circ$
$p_2 = 5,19$	$\rho_2 = 6,62$	$q_2 = 2,03$	$\theta_2 = 30^\circ$
$p_3 = 5,19$	$\rho_3 = 4,33$	$q_3 = 2,03$	$\theta_3 = 30^\circ$
$p_4 = 3,68$	$\rho_4 = 3,18$	$q_4 = 1,68$	$\theta_4 = 30^\circ$

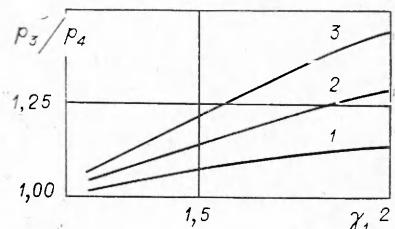
$$\omega = 49,6^\circ, \beta = 79,6^\circ$$

татов расчета показывает, что интенсивность скачка BE достаточно мала для тонкого клина. Она растет с увеличением параметров γ_1 , q_0 , θ . Величина угла β в рассматриваемом диапазоне начальных параметров меняется в пределах $75-115^\circ$.

На фиг. 3, 4 представлено поведение функции p_3/p_4 в зависимости от изменения числа Маха набегающего потока и параметра γ_1 . Кривые



Фиг. 3



Фиг. 4

1—3 относятся к толщине клина $\theta = 10, 20, 30^\circ$. На фиг. 3 фиксированными параметрами являются $\gamma_0 = 1,1$ и $\gamma_1 = 1,9$, на фиг. 4 — $\gamma_0 = 1,1$ и $M_0 = 2,4$.

Видно, что в случае падения сильной волны на поверхность раздела двух газов интенсивность скачка BE возрастает в 1,75 раза.

Поступила 19 V 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Тер-Миносянц С. М. Задача о сверхзвуковом обтекании нижней поверхности треугольного крыла.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 6.
2. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971.
3. Красильщиков Е. А. Дифракция акустической волны на движущейся и неподвижной пластине.— ДАН СССР, 1972, т. 203, № 2.
4. Тугазаков Р. Я. Дифракция ударной волны на движущемся клине.— Учен. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 1.
5. Тугазаков Р. Я. Нестационарная пространственная задача о падении ударной волны на движущееся плоское треугольное крыло.— Труды ЦАГИ, 1978, вып. 1917.
6. Тугазаков Р. Я. Численное решение задачи о проникновении движущегося со сверхзвуковой скоростью тела в газ другой плотности.— Учен. зап. ЦАГИ, 1980, т. 11, № 4.
7. Голубинский А. И. Набегание ударной волны на клин, движущийся со сверхзвуковой скоростью.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
8. Арутюнян Г. М. О набегании ударной волны на клин, движущийся со сверхзвуковой скоростью.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4.
9. Polachek H., Seeger R. I. On shock-wave phenomena.— In: Interaction of shock waves in gases: Proc. Symposia in Appl. Math. Vol. 2. N. Y., 1949.

УДК 533.6.011.7 2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН ПРИ ДВОЙНОМ ВЗРЫВЕ В ГАЗЕ С ПРОТИВОДАВЛЕНИЕМ

Э. И. Андрианкин, Н. Н. Мягков

(Москва)

Задачи распространения ударных волн при выделении энергии одним точечным взрывом в газе исследовались достаточно подробно [1—3]. При рассмотрении двух взрывов [4], которые в общем случае могут происходить в разных точках пространства и инициироваться в разное время, появляется ряд новых безразмерных параметров, варьируя которые можно существенно изменять характер нелинейного взаимодействия ударных волн и образующихся одного или нескольких результирующих разрывов. Один предельный случай такой задачи — взрыв заряда над плоской поверхностью (что равносильно одновременному взрыву двух одинаковых зарядов, расположенных друг от друга на расстоянии, равном удвоенной высоте над поверхностью) — изучалась теоретически и экспериментально многими авторами [5—7]. Параметр, от которого зависит решение этой задачи, является безразмерной высотой заряда. В данной работе рассматривается другой предельный случай — задача о двойном взрыве, когда точечные взрывы происходят в одной точке пространства, но в разное время. Тогда решение будет зависеть от двух параметров управления: отношения энергий $\lambda^0 = E_2^0/E_1^0$ соответственно при втором и первом взрывах и времени задержки между взрывами t_0 , причем особый интерес представляет случай $E_1^0 + E_2^0 = \text{const}$.

1. Постановка задачи аналогична рассмотренной авторами ранее [8], однако с тем существенным отличием, что теперь учитывается противодавление среды P_0 перед фронтом первой ударной волны. Считаем, что первый точечный взрыв происходит в момент времени $t = -t_0$ в точке $r = 0$, а второй — в момент времени $t = 0$ в той же точке пространства. Плотность невозмущенного газа ρ_0 , вязкость и теплопроводность не учитываются. Течение газа за разрывами адиабатическое, подчиняется уравнению состояния совершенного газа $\epsilon = P/(\gamma - 1)\rho$ (ϵ — удельная внутренняя энергия) с показателем адиабаты $\gamma = 1,4$.

В качестве масштабов времени и расстояния взяты $t^0 = r^0/(P_0/\rho_0)^{1/2}$, $r^0 = (E_1^0/P_0\alpha_0)^{1/v}$, где α_0 — автомодельная постоянная; рассматривается плоская ($v = 1$) или сферическая ($v = 3$) симметрия. Введем безразмерные переменные: $t = t't^0$, $r = r'r^0$, $\rho = \rho'\rho_0$, $P = P'P_0$, $v = v'r^0/t^0$. Время задержки $t'_0 = t_0/t^0$. Безразмерные величины здесь обозначены штрихом, который в дальнейшем будем опускать, считая, что имеем дело только с безразмерными величинами. При $t_0 \rightarrow 0$ решение задачи о двойном взрыве переходит в решение задачи об одном взрыве с энергией $E_1^0 + E_2^0$.