ПМТФ, № 1, 1970

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ НА ЭЛЕКТРОДАХ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА ХОЛЛА

Л. Е. Калихман

(Москва)

Процессы, происходящие в пограничном слое плазмы на электродах, описываются сложной системой дифференциальных уравнений с граничными условиями, заданными на двух границах. Решение такого рода краевых задач даже с использованием вычислительных машин представляет большие трудности. Кроме того, желательно иметь метод расчета, который был бы пригоден для сравнительно быстрых оценочных расчетов и для анализа влияния различных суммарных факторов. С этой точки зрения большое значение для теории пограничного слоя плазмы имеет разработка приближенных методов расчета.

В данной статье для решения задачи о пограничном слое двухтемпературной полностью ионизованной плазмы на электродах канала со скрещенными E, B-полями применен метод интегральных соотношений [1]. В своих наиболее существенных чертах разработанный метод основывается на работе [2].

Постановка задачи. Требуется найти решение системы уравнений неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x}(nu) + \frac{\partial}{\partial y}(nv) = 0 \tag{1}$$

движения

$$mn\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta_i \frac{\partial u}{\partial y}\right) + j_y B \tag{2}$$

энергии ионов

$$mnc_p\left(u\frac{\partial T_i}{\partial x} + v\frac{\partial T_i}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y}\right) + u\frac{\partial p_i}{\partial x} + v\frac{\partial p_i}{\partial y} + \\ + \eta_i\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{3km_e}{m}\frac{n}{\tau_e}(T_e - T_i) \tag{3}$$

энергии электронов

$$mnc_p\left(u\frac{\partial T_e}{\partial x} + v\frac{\partial T_e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y} + \frac{5}{2}\frac{j_y^q}{e}kT_e\right) + u\frac{\partial p_e}{\partial x} + v\frac{\partial p_e}{\partial y} + \\ + j_x E_x + j_y(E_y - uB) + \eta_e\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \frac{3km_e}{m}\frac{n}{\tau_e}(T_e - T_i) \tag{4}$$

с граничными условиями

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0,\ T_i(x, 0) = T_{iw},\ T_e(x, 0) = T_{ew}$$
$$u(x, \infty) = U_s(x),\ T_i(x, \infty) = T_{is}(x),\ T_e(x, \infty) = T_{es}(x)$$
$$j_y(x, \infty) = j_{ys}(x),\ E_x(x, \infty) = E_{xs}(x),\ j_x(x, \infty) = 0$$

Как показано в [3], функции p, j_y, E_x постоянны поперек пограничного слоя [1].

---

[1] В правой части уравнения (23) работы [3] должен быть член $-j_y uB$. В выражениях (8) для π_{xx}^e, π_{xy}^e, π_{yy}^e в [3] имеется опечатка. Численный множитель при третьих членах правой части равен $10/[3(2+\sqrt{2})]$.

Плотности тока даются выражениями

$$j_x = \sigma\left\{E_x - \frac{A_2}{A_1}\left(E_y - uB + \frac{1}{en}\frac{\partial p_e}{\partial y}\right) - \frac{k}{e}\frac{A_4}{A_1}\frac{\partial T_e}{\partial y}\right\} \tag{5}$$

$$j_y = \sigma\left\{E_y - uB + \frac{1}{en}\frac{\partial p_e}{\partial y} + \frac{A_2}{A_1}E_x + \frac{k}{e}\frac{A_3}{A_1}\frac{\partial T_e}{\partial y}\right\} \tag{6}$$

$$j_y{}^q = \sigma\left\{\frac{A_7}{A_1}\left(E_y - uB + \frac{1}{en}\frac{\partial p_e}{\partial y}\right) + \frac{A_8}{A_1}E_x\right\} \tag{7}$$

Свойства переноса плазмы поперек магнитного поля η_i, η_e, λ_i, λ_e, σ и коэффициенты A_k будут известными функциями от T_i, T_e, n и параметров Холла H_i, H_e [3].

Представим профиль среднемассовой скорости плазмы многочленом

$$u^\circ = a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 \tag{8}$$

$$\left(\xi = \frac{1}{\delta}\int_0^y n^\circ\,dy,\ \delta = \int_0^{\delta_y} n^\circ\,dy,\ u^\circ = \frac{u}{U_s},\ n^\circ = \frac{n}{n_s}\right)$$

Здесь $\delta_y = \delta_y(x)$ — толщина динамического пограничного слоя.

Условие на внутренней границе пограничного слоя следует из уравнения движения (2), которое при $y = 0$ дает

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta_i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]_w + j_yB = 0 \tag{9}$$

Если применить уравнение движения вблизи внешней границы слоя, получим

$$mn_sU_s\frac{dU_s}{dx} = -\frac{dp}{dx} + j_yB \tag{10}$$

Следовательно

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta_i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]_w = -mn_sU_sU_s' \tag{11}$$

Переходя от переменной y к переменной ξ согласно (8) и полагая для упрощения произведение $\eta_i\rho$ постоянным поперек пограничного слоя

$$\frac{\eta_i\rho}{\eta_{is}\rho_s} = K_i \qquad (\rho = mn)$$

получим

$$\frac{\partial^2u^\circ}{\partial\xi^2} = -\lambda \qquad \left(\lambda = \frac{\delta^2mn_s^2U_s'}{n_w\eta_{is}K_i}\right) \tag{12}$$

На внешней границе пограничного слоя $\xi = 1$ примем условия

$$u^\circ = 1, \qquad \frac{\partial u^\circ}{\partial\xi} = 0,\ \frac{\partial^2u^\circ}{\partial\xi^2} = 0 \tag{13}$$

Из условий (12), (13) найдем

$$a_1 = \frac{12+\lambda}{6}, \qquad a_2 = 6 - 3a_1, \qquad a_3 = -8 + 3a_1, \qquad a_4 = 3 - a_1$$

Введем понятие температуры торможения и перепада температуры торможения ионов

$$T_i^* = T_i + \frac{u^2}{2c_p}, \quad T_{is}^* = T_{is} + \frac{u_\Delta^2}{2c_p} \quad t_i^* = T_i^* - T_{iw}, \quad t_{is}^* = T_{is}^* - T_{iw}$$

Представим профиль перепадов температур торможения ионов многочленом

$$t_i^{*\circ} = b_1^i\zeta + b_2^i\zeta^2 + b_3^i\zeta^3$$

$$\left(\zeta = \frac{1}{\Delta}\int\limits_0^y n^\circ dy, \quad \Delta = \int\limits_0^{\Delta y} n^\circ dy, \quad t_i^{*\circ} = \frac{t_i^*}{t_{is}^*}\right) \tag{14}$$

Здесь $\Delta_y = \Delta_y(x)$ — толщина теплового пограничного слоя. Условие на внутренней границе слоя для определения коэффициентов многочлена t_i^{*0} выведем из уравнения (3), которое при $y = 0$ дает

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y}\right)\right]_w + \eta_{iw}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w^2 + 3k\frac{m_e}{m}\frac{n_w}{\tau_{ew}}(T_{ew} - T_{iw}) = 0$$

Обозначая число Прандтля ионов

$$P_i = \frac{\eta_i c_p}{\lambda_i} = \text{const}$$

используя (8), найдем

$$b_2^i = -{}^1/_2\chi_i$$

Здесь параметр χ_i, определяющий форму профиля перепадов температур торможения ионов, в безразмерном виде будет

$$\chi_i = P_i\frac{T_w}{T_s}\frac{\Delta^{\circ 2}(\varkappa - 1)M^2}{K_i t_{is}^{*\circ}}\left[\left(\frac{\eta_{iw}}{\eta_{is}} - \frac{T_w}{T_s}\frac{K_i}{P_i}\right)a_1^2\frac{U_s^{\circ 2}}{\delta^{\circ 4}}\left(\frac{T_s}{T_w}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{\varkappa}\frac{m_e}{m}\frac{R_i}{M^2}\frac{n_s^\circ}{\eta_{is}^\circ}\frac{L}{U_{s0}\tau_{ew}}(T_{ew}^\circ - T_{iw}^0)\frac{T_s}{T_w}\right]$$

$$(\delta^\circ = \delta / L, \ \Delta^\circ = \Delta / L, \ \eta_{is}^\circ = \eta_{is} / \eta_{is0}, \ n_s^\circ = n_s / n_{s0}, \ U_s^\circ = U_s / U_{s0}$$

$$R_i = \frac{U_{s0} m n_{s0} L}{\eta_{is0}},$$

$$t_{is}^{*\circ} = t_{is}^* / T_{s0}, \ T_{ew}^\circ = T_{ew} / T_{s0}, \ T_{iw}^\circ = T_{iw} / T_{s0}, \ M = U_{s0}\left(\frac{\varkappa k}{m}T_{s0}\right)^{-1/2}$$

На внешней границе теплового слоя ($\zeta = 1$) примем

$$t_i^{*\circ} = 1, \qquad \frac{\partial t_i^{*\circ}}{\partial \zeta} = 0$$

Это дает следующие значения коэффициентов:

$$b_1^i = {}^1/_4(6 + \chi_i), \qquad b_3^i = {}^1/_4(\chi_i - 2) \tag{15}$$

Профиль перепадов температур электронов представим в виде

$$t_e^\circ = b_1^e\zeta + b_2^e\zeta^2 + b_3^e\zeta^3 \qquad \left(t_e^\circ = \frac{t_e}{t_{es}} = \frac{T_e - T_{ew}}{T_{es} - T_{ew}}\right) \tag{16}$$

Условие на стенке получим из уравнения (4)

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y}\right)\right]_w + \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{5}{2}\frac{j_y^q}{e}kT_e\right)\right]_w + \eta_{ew}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w^2 + j_{xw}E_{xw} +$$

$$+ j_{yw}E_{yw} - 3k\frac{m_e}{m}\frac{n_w}{\tau_{ew}}(T_{ew} - T_{iw}) = 0$$

При преобразовании этого условия учтем выражение для j_x, вытекающее из соотношений (5), (6)

$$j_x = \sigma\left(1 + \frac{A_2^2}{A_1^2}\right)E_x - \frac{A_2}{A_1}j_y + \sigma\frac{k}{e}\left(\frac{A_2A_3}{A_1^2} - \frac{A_4}{A_1}\right)\frac{\partial T_e}{\partial y}$$

и примем

$$P_e = \frac{\eta_e c_p}{\lambda_e} = \mathrm{const}, \qquad \frac{\eta_e \rho}{\eta_{es} \rho_s} = K_e$$

На внешней границе теплового слоя потребуем выполнения условий

$$t_e{}^\circ = 1, \qquad \frac{\partial t_e{}^\circ}{\partial \zeta} = 0$$

Получаем

$$b_1{}^e = \frac{3 + 0.5\chi_e}{2 - a}, \qquad b_2{}^e = \frac{-3a - \chi_e}{2 - a}, \qquad b_3{}^e = \frac{2a + 0.5\chi_e - 1}{2 - a} \tag{17}$$

Параметры χ_e и a, определяющие форму профиля перепадов температур электронов, в безразмерной форме будут

$$\chi_e = P_e \frac{T_w}{T_s} \frac{\Delta^{\circ 2} R_e}{\eta_{es}{}^\circ K_e t_{es}{}^\circ} \Big\{ (\varkappa - 1) M^2 \frac{1}{R_e} \frac{\eta_{ew}}{\eta_{es0}} \left(\frac{T_s}{T_w}\right)^2 \frac{U_s{}^{\circ 2}}{\delta^{\circ 2}} a_1{}^2 +$$
$$+ \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{M^j}{M} \left[\sigma_w{}^\circ \left(1 + \frac{A_{2w}{}^2}{A_{1w}{}^2}\right) \Phi - 2 \frac{A_{2w}}{A_{1w}} \Phi + \frac{1}{\sigma_w{}^\circ} \Phi + \right.$$
$$\left. + \frac{T_{ew}}{T_w} b_1{}^i \frac{t_{is}{}^{*\circ}}{\Delta^\circ} \frac{T_s}{T_w} \right] - 3 \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{m_e}{m} \frac{T_s}{T_w} n_s{}^\circ \frac{L}{\tau_{ew} U_{s0}} (T_{ew}{}^\circ - T_{iw}{}^\circ) \Big\}.$$

$$a = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{M^j}{M} \frac{R_e P_e \Delta^\circ}{2K_e} \left[\frac{5}{2} \frac{j_y{}^q}{j_y} + \frac{T_{ew}}{T_w} - 1 - \frac{A_{3w}}{T_w} + \sigma_w{}^\circ \left(\frac{A_{2w} A_{3w}}{A_{1w}{}^2} - \frac{A_{4w}}{A_{1w}} \right) \right]$$

Параметры K_i и K_e приближенно пропорциональны отношениям $(T_i / T_{is})^{3/2}$, $(T_e / T_{es})^{3/2}$, поэтому предлагаемый приближенный метод расчета будет обладать достаточной точностью при несильном изменении T_e и T_i поперек пограничного слоя.

При приведении параметров χ_e и a к безразмерному виду предполагается, что поперечный ток j_y равномерно распределен и осевой ток вне пограничного слоя запрещен, поэтому за масштаб тока j_{ys} и напряженности электрического поля E_{xs} взяты величины, связанные между собой соотношением

$$j_{ys} = \sigma_{00} E_{xs}, \qquad \sigma_{00} = \sigma_s \frac{1 + A_{2s}{}^2 / A_{1s}{}^2}{A_{2s} / A_{1s}}$$

Здесь

$$M^j = \frac{j_y}{e n_{s0} \sqrt{\varkappa T_{s0} k / m}}, \qquad \Phi = \frac{e E_{xs} L}{k T_{s0}}, \qquad R_e = \frac{U_{s0} L m n_{s0}}{\eta_{es0}}$$
$$\sigma_w{}^\circ = \frac{\sigma_w}{\sigma_{00}}, \qquad t_{es}{}^\circ = \frac{t_{es}}{T_{s0}}, \qquad \eta_{es}{}^\circ = \frac{\eta_{es}}{\eta_{es0}}$$

и учитывается, что

$$j_y = j_{ys}, \; E_x = E_{xs}$$

Входящее в χ_e выражение $j_y{}^q / j_y$ будет

$$j_y{}^{q\circ} = \frac{j_y{}^q}{j_y} = \frac{A_{7w}}{A_{1w}} \left(1 - \frac{A_{2w}}{A_{1w}} \sigma_w{}^\circ - \frac{A_{3w}}{A_{1w}} \sigma_w{}^\circ \frac{t_{es}{}^\circ}{\Delta^\circ} b_1{}^e \frac{T_s}{T_w} \frac{1}{\Phi} \right) + \frac{A_{8w}}{A_{1w}} \sigma_w{}^\circ$$

Имея профили перепадов температур ионов и электронов, можем записать профиль перепадов температур торможения плазмы в пограничном слое в виде

$$t^{*\circ} = b_1 \zeta + b_2 \zeta^2 + b_3 \zeta^3 \tag{18}$$

где

$$t^{*\circ} = \frac{t^*}{t_s^*}, \quad t^* = T^* - T_w, \quad t_s^* = T_s^* - T_w,$$

$$T^* = T + \frac{u^2}{2c_p}, \quad T_s^* = T_s + \frac{u_\Delta^2}{2c_p}$$

$$b_1 = b_1^e \frac{t_{es}}{t_s^*} + b_1^i \frac{t_{is}^*}{t_s^*}, \quad b_2 = b_2^e \frac{t_{es}}{t_s^*} + b_2^i \frac{t_{is}^*}{t_s^*}, \quad b_3 = b_3^e \frac{t_{es}}{t_s^*} + b_3^i \frac{t_{is}^*}{t_s^*} \qquad (19)$$

Интегрируя уравнение движения поперек слоя, с учетом (10) приведем его к обыкновенному

$$(\rho_s U_s^2)' \vartheta + \rho_s U_s^2 \vartheta' + \rho_s U_s U_s' \left[\delta^* - \Delta^* \left(1 + \frac{u_\Delta^2}{2c_p T_s} - \frac{T_w}{T_s}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{u_\Delta^2}{2c_p T_s} (\delta^* + \vartheta)\right] = \tau_{iw} \qquad (20)$$

Здесь

$$\vartheta = \int_0^\infty \rho^\circ u^\circ (1 - u^\circ)\, dy = \delta \int_0^\infty u^\circ (1 - u^\circ)\, d\xi$$

$$\delta^* = \int_0^\infty \rho^\circ (1 - u^\circ)\, dy = \delta \int_0^\infty (1 - u^\circ)\, d\xi$$

$$\Delta^* = \int_0^\infty \rho^\circ (1 - t^{*\circ})\, dy = \Delta \int_0^\infty (1 - t^{*\circ})\, d\zeta$$

$$\tau_{iw} = \eta_{iw} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = \eta_{iw} a_1 \frac{U_s}{\delta} \frac{T_s}{T_w}$$

Складывая уравнения (3), (4), получаем уравнение энергии для плазмы в целом

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y} + \frac{5}{2} \frac{j_y^q}{e} k T_e\right) +$$

$$+ u \frac{\partial p}{\partial x} + \eta_i \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + j_x E_x + j_y (E_y - uB) \qquad (21)$$

Складывая это уравнение с уравнением движения (2), умноженным на u, получаем

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T^*}{\partial x} + v \frac{\partial T^*}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y} + \frac{5}{2} \frac{j_y^q}{e} k T_e\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} (\tau_i u) + j_x E_x + j_y E_y \qquad (22)$$

Интегрируя (22) поперек слоя в предположении $T_w = \text{const}$, приведем его к виду (23)

$$(\rho_s^2 U_s^2 t_s^{*2} \theta^2)' = 2\rho_s U_s t_s^* \left\{\rho_s U_s t_s^{*\prime} (\delta - \delta^*)\theta + \frac{\lambda_{iw}}{c_p} b_1^i t_{is}^* \frac{T_s}{T_w} \frac{\theta}{\Delta} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_{ew}}{c_p} b_1^e t_{es} \frac{T_s}{T_w} \frac{\theta}{\Delta} - \frac{5}{2} \frac{k}{e c_p} (j_{ys}^q T_{es} - j_{yw}^q T_{ew})\theta - \frac{1}{c_p} \theta \int_0^{\Delta_y} (j_x E_x + j_y E_y)\, dy\right\}$$

где

$$\theta = \int_0^\infty \rho^\circ u^\circ (1 - t^{*\circ})\, dy = \Delta \int_0^\infty u^\circ (1 - t^{*\circ})\, d\zeta$$

толщина потери энергии.

Среднюю по слою джоулеву диссипацию вычислим при помощи выражений (5), (6), а также используя (18) для профиля температур и принимая для упрощения

$$\sigma \approx \sigma_w, \quad H_e \approx H_{ew}, \quad T_e \approx T_{ew}, \quad u/U_s = \xi$$

Тогда уравнение (23) после приведения к безразмерному виду будет

$$(\rho_s^{\circ 2}\, U_s^{\circ 2}\, t_s^{*\circ 2}\, \theta^{\circ 2})' = 2\Phi_\Delta\, \rho_s^\circ U_s^\circ\, t_s^{*\circ} \tag{24}$$

где

$$\Phi_\Delta = t_s^{*\circ\prime} \rho_s^\circ U_s^\circ \theta^\circ (\delta^\circ - \delta^{*\circ}) + \left(\frac{1}{R_i P_i}\frac{\lambda_{is}}{\lambda_{is0}}\frac{\lambda_{iw}}{\lambda_{is}} b_1{}^i t_{is}{}^{*\circ} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{R_e P_e}\frac{\lambda_{es}}{\lambda_{es0}}\frac{\lambda_{ew}}{\lambda_{es}} b_1{}^e t_{es}{}^\circ\right)\frac{T_s}{T_w}\frac{\theta}{\Delta} - (j_{ys}{}^{q\circ} T_{es}{}^\circ - j_{yw}{}^{q\circ} T_{ew}{}^\circ)\frac{M^j}{M}\theta^\circ -$$

$$- \theta^\circ\Delta^\circ\left[\sigma_w{}^\circ\left(1 + \frac{A_{2w}{}^2}{A_{1w}{}^2}\right) - 2\frac{A_{2w}}{A_{1w}} + \frac{1}{\sigma_w{}^\circ}\right]\left\{1 + \frac{\varkappa - 1}{2} M^2 \frac{U_s^{\circ 2}}{T_s^\circ}\left[u_\Delta{}^{\circ 2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2\right] - \left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2} M^2 u_\Delta{}^{\circ 2}\frac{U_s^{\circ 2}}{T_w^\circ} - \frac{T_w}{T_s}\right)\frac{\Delta^*}{\Delta}\right\}\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{M^j}{M}\Phi +$$

$$+ \theta^\circ (T_{es}{}^\circ - T_{ew}{}^\circ)\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{M^j}{M}\left[\sigma_w{}^\circ\left(\frac{A_{4w}}{A_{1w}} - \frac{A_{2w}A_{3w}}{A_{1w}{}^2}\right) + \frac{A_{3w}}{A_{1w}} + 1\right] -$$

$$- \theta^\circ\Delta^\circ \frac{U_s^\circ}{K}\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{M^j}{M}\Phi\left\{\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\delta} + \frac{\varkappa - 1}{2} M^2 \frac{U_s^{\circ 2}}{T_w^\circ}\left[\frac{u_\Delta{}^{\circ 2}}{2}\frac{\Delta}{\delta} - \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^3\right] - \right.$$

$$\left. - \left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2} M^2 u_\Delta{}^{\circ 2}\frac{U_s^{\circ 2}}{T_w^\circ} - \frac{T_w}{T_s}\right)\frac{\theta}{\Delta}\right\} - \theta\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{M^j}{M}\left(\ln\frac{T_s}{T_w}\right) T_{ew}{}^\circ$$

Здесь

$$t_s{}^{*\circ} = \frac{T_s}{T_{s0}} + \frac{\varkappa - 1}{2} M^2 U_s^{\circ 2}\left(\frac{u_\Delta}{U_s}\right)^2 - \frac{T_w}{T_{s0}}, \quad u_\Delta{}^\circ = \frac{u_\Delta}{U_s} \qquad t_{is}{}^{*\circ} = \frac{T_{is}}{T_{s0}} +$$

$$+ \frac{\varkappa - 1}{2} M^2 U_s^{\circ 2}\left(\frac{u_\Delta}{U_s}\right)^2 - \frac{T_{iw}}{T_{s0}}; \quad K = \frac{E_{xs}}{BU_{s0}}$$

$$u_\Delta{}^\circ = a_1\frac{\Delta}{\delta} + a_2\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2 + a_3\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^3 + a_4\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^4, \quad ' = \frac{d}{dx^\circ}, \quad x^\circ = \frac{x}{L}$$

Используя профили (8) и (18) для вычисления интегральных толщин пограничного слоя, находим

$$\delta^* = \vartheta H = \delta\frac{8 - a_1}{20}, \qquad \vartheta = \delta\frac{-5a_1^2 + 12a_1 + 144}{1260}$$

$$\Delta^* = \Delta(1 - {}^1/_2 b_1 - {}^1/_3 b_2 - {}^1/_4 b_3)$$

$$\theta = \Delta\left\{a_1\frac{\Delta}{\delta}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}b_1 - \frac{1}{4}b_2 - \frac{1}{5}b_3\right) + \right.$$

$$+ a_2\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}b_1 - {}^1/_5 b_2 - {}^1/_6 b_3\right) + a_3(\Delta/\delta)^3({}^1/_4 - {}^1/_5 b_1 - {}^1/_6 b_2 - {}^1/_7 b_3) +$$

$$\left. + a_4(\Delta/\delta)^4({}^1/_5 - {}^1/_6 b_1 - {}^1/_7 b_2 - {}^1/_8 b_3)\right\} \tag{25}$$

Следуя работе [2], приведем интегральное соотношение импульсов (20) к форме квадратуры, удобной для практических расчетов. Представим (20) в виде

$$2\vartheta^\circ\vartheta^{\circ\prime} + c_1\frac{U_s^{\circ\prime}}{U_s^\circ}\vartheta^{\circ 2} + 2\frac{U_s^{\circ\prime}}{U_s^\circ}\left(\frac{T_w}{T_s} - 1\right)\frac{\Delta^*}{\vartheta}\vartheta^{\circ 2} +$$

$$+ 2\frac{U_s^{\circ\prime}}{U_s}\frac{\varkappa - 1}{2} M^2 u_\Delta{}^{\circ 2}\frac{U^{\circ 2}}{T_s^\circ}\left(H + 1 - \frac{\Delta^*}{\vartheta}\right)\vartheta^{\circ 2} + 2\frac{\rho_s^{\circ\prime}}{\rho_s^\circ}\vartheta^{\circ 2} =$$

$$= 2a_1\frac{\eta_{iw}}{\eta_{is0}}\frac{1}{\rho_s^\circ U_s^\circ R_i}\frac{T_s}{T_w}\frac{\vartheta}{\delta} - \frac{U_s^{\circ\prime}}{U_s^{\circ}}\vartheta^{\circ 2}[2(H + 2) - c_1] \tag{26}$$

где c_1 — постоянная, которая определяется ниже. Положим

$$c = c_1 + 2\left(\frac{T_w}{T_s} - 1\right)\frac{\Delta^*}{\vartheta} \approx \mathrm{const}, \quad k = (\varkappa - 1) M^2 \frac{1}{T_s^\circ}\left(H + 1 - \frac{\Delta^*}{\vartheta}\right) u_\Delta^{\circ 2} \approx \approx \mathrm{const}$$

и обозначим

$$\Phi = 2a_1 \frac{\vartheta}{\delta} - \lambda\left(\frac{\vartheta}{\delta}\right)^2 K_i \frac{\eta_{is}}{\eta_{iw}} [2(H+2) - c_1] \tag{27}$$

Умножая (26) на $U^{\circ c}$, напишем его в виде линейного уравнения

$$(\vartheta^{\circ 2} U_s^{\circ c})' + \left(k U_s^\circ U_s^{\circ\prime} + 2\frac{\rho_s^{\circ\prime}}{\rho_s^\circ}\right)\vartheta^{\circ 2} U_s^{\circ c} = U_s^{\circ (c-1)} \frac{T_s}{T_w} \frac{1}{R_i} \Phi \frac{\eta_{iw}^\circ}{\rho_s^\circ}$$

Решение имеет вид

$$\vartheta^{\circ 2} U_s^{\circ c} R_i = e^{\frac{-kU_s^{\circ 2}}{2}} \rho_s^{\circ (-2)} \left(\mathrm{const} + \int\limits_{x_0^\circ}^{x^\circ} U_s^{\circ (c-1)} \rho_w^\circ \eta_{iw}^\circ e^{\frac{kU_s^{\circ 2}}{2}} \Phi dx^\circ\right) \tag{28}$$

Расчет ϑ_0 по уравнению (28) нужно вести последовательными приближениями. Быстрая сходимость обеспечивается при таком выборе c_1, при котором функция Φ слабо меняется с изменением λ.

Зависимость Φ от λ согласно (27) близка к линейной; потребовав, чтобы коэффициент при λ был равен нулю, получаем соотношение для выбора c_1

$$c_1 = 2(H+2)_{\lambda=0} - \frac{1}{3(\vartheta/\delta)_{\lambda=0}} \frac{\eta_{iw}}{\eta_{is}} \frac{1}{K_i}$$

При $\Phi \approx \mathrm{const}$ расчетное уравнение (28) оказывается простой квадратурой.

Решение интегрального соотношения (24) вследствие переменности Φ_Δ целесообразно представить в форме

$$(\rho_s^{\circ 2} U_s^{\circ 2} t_s^{*\circ 2} \theta^{\circ 2})_{x_k^\circ} = 2(\Phi_\Delta)_{x^\circ=0} \int\limits_0^{x_1^\circ} \rho_s^\circ U_s^\circ t_s^{*\circ} dx^\circ +$$

$$+ 2(\Phi_\Delta)_{x_1^\circ} \int\limits_{x_1^\circ}^{x_2^\circ} \rho_s^\circ U_s^\circ t_s^{*\circ} dx^\circ + \ldots + 2(\Phi_\Delta)_{x_k^\circ} \int\limits_{x_k^\circ}^{x_{k+1}^\circ} \rho_s^\circ U_s^\circ t_s^{*\circ} dx^\circ + \ldots \tag{29}$$

На каждом участке пограничного слоя от x_k° до x_{k+1}° величину Φ_Δ следует считать постоянной и определять ее по величинам для начала участка.

Расчет начинают с определения величин на входе в канал, т. е. в начале первого участка. Если здесь $U_s^\circ \neq 0$ (нет критической точки) и если отсутствуют дополнительные данные о начальных толщинах, то можно принять

$$\delta = \Delta = \delta^* = \vartheta = \Delta^* = \theta = 0 \qquad \text{при } x^\circ = x_0 = 0$$

Для получения начального условия при $x^\circ = 0$ необходимо раскрыть неопределенность и найти начальное значение Δ/δ, θ/Δ и других отношений.

Из (20) при $x = 0$ получаем

$$\frac{d}{dx^\circ}(\rho_s^\circ U_s^{\circ 2} \vartheta^\circ)^2 = 2\rho_s^\circ U_s^{\circ 3} \frac{T_s}{T_w} a_1 \frac{\vartheta}{\delta} \frac{\eta_{iw}}{\eta_{is0}} \frac{1}{R_i}$$

Из (24) при $x = 0$

$$\frac{d}{dx^\circ}(\rho_s{}^\circ U_s{}^\circ t_s{}^{*\circ}\theta^\circ)^2 = 2\rho_s{}^\circ U_s{}^\circ t_s{}^{\circ *}\left[\frac{1}{R_iP_i}\frac{\lambda_{iw}}{\lambda_{is0}}b_1{}^i t_{is}{}^{*\circ} + \frac{1}{R_eP_e}\frac{\lambda_{ew}}{\lambda_{es0}}b_1{}^e t_{es}{}^\circ\right]\frac{T_s}{T_w}\frac{\theta}{\Delta}$$

По правилу Лопиталя получаем

$$\left(\frac{\theta}{\Delta}\right)\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2 = \left(\frac{\vartheta}{\delta}\right)\left[\frac{1}{R_iP_i}\frac{\lambda_{iw}}{\lambda_{is0}}b_1{}^i t_{is}{}^{*\circ} + \frac{1}{R_eP_e}\frac{\lambda_{ew}}{\lambda_{es0}}b_1{}^e t_{es}{}^\circ\right]\left(2\frac{\eta_{iw}}{\eta_{is0}}\frac{1}{R_i}t_s{}^{*\circ}\right)^{-1}$$

Это уравнение в сочетании с (25), (19), (15), (17), (27) и служит для численного расчета начального значения Δ / δ.

По результатам расчета распределения $\delta = \delta(x)$ и $\Delta = \Delta(x)$ находим трение и теплообмен. Коэффициент трения ионов будет

$$c_{f_1}\sqrt{R_i} = \frac{2\tau_{iw}}{mn_{s0}U_{s0}{}^2} - 2a_1\frac{\eta_{iw}}{\eta_{is0}}\frac{T_s}{T_w}\frac{U_s{}^\circ}{\delta^\circ}$$

Число Стантона ионов

$$S_i = \frac{-q_w{}^i}{mn_{s0}U_{s0}c_pt_{s0}{}^*} = b_1{}^i\frac{\lambda_{iw}}{\lambda_{is0}}\frac{T_s}{T_w}\frac{t_{is}{}^*}{t_{s0}{}^*}\frac{1}{\Delta^\circ R_iP_i}$$

Число Стантона электронов, обусловленное теплопроводностью и конвекцией

$$S_e = \frac{-q_w{}^e}{mn_{s0}U_{s0}c_pt_{s0}{}^*} = b_1{}^e\frac{\lambda_{ew}}{\lambda_{es0}}\frac{T_s}{T_w}\frac{t_{es}}{t_{s0}{}^*}\frac{1}{\Delta^\circ R_eP_e}$$

Число Стантона для переноса энтальпии электрическим током

$$S_j = \frac{5}{2}\frac{kT_{ew}j_{yw}{}^q}{emn_{s0}U_{s0}c_pt_{s0}{}^*} = \frac{5}{2}\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{T_{ew}}{t_{s0}{}^*}\frac{j_y{}^q}{j_y}\frac{M^j}{M}$$

В качестве примера был произведен расчет пограничного слоя двухтемпературной плазмы аргона на положительном электроде ускорительного канала при следующих условиях:

характерный размер (ширина канала) $L = 0.2$ *м*, скорость на входе $U_{s0} = 5000$ *м/сек*, давление $p = 10^{-2}$ *мм* рт. ст., температура ионов $T_{is0} = 2000°$ K, температура электронов $T_{es0} = 10000°$ K, $T_{ew} = 1500°$ K, $T_{iw} = 300°$ K индукция магнитного поля $B = 0.5$ *тл*. Этим величинам соответствуют

$$n_{s0} = 7.794 \cdot 10^{18} м^{-3},\quad \tau_{es0} = 4.99 \cdot 10^{-9}\ сек,\quad \tau_{is0} = 2.2 \cdot 10^{-7}\ сек$$
$$n_w = 5.196 \cdot 10^{19}\ м^{-3},\quad \tau_{ew} = 9.34 \cdot 10^{-11}\ сек,\quad \tau_{iw} = 6.23 \cdot 10^{-9}\ сек$$

Было задано значение

$$S_m = \frac{j_{ys}BL}{mn_{s0}U_{s0}{}^2} = 50$$

чему соответствует плотность разрядного тока $j_y = 6459 \cdot 3a / м^2$ и напряженность электрического поля $E_x = j_y / \sigma_{00} = 2590$ *в/м*.

Указанным величинам соответствуют следующие значения критериев:

$$K = \frac{E_{xs}}{BU_{s0}} = 1.036,\qquad M^j = \frac{j_y}{en_{s0}\sqrt{\varkappa(k/m)T_{s0}}} = 2.538$$

$$\Phi = \frac{eE_{xs}L}{kT_{s0}} = 500,\quad H_{es0} = 438,\quad H_{is0} = 0{,}265$$

$$R_i = 1.565 \cdot 10^4,\ R_e = 3.6 \cdot 10^{10},\ P_i = 0.619,\ P_e = 1.925 \cdot 10^{-5}$$

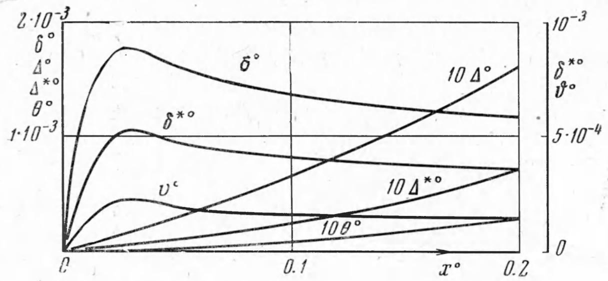
Был выбран случай простейшего внешнего потока, а именно изотермического течения плазмы с отрывом электронной температуры

$$T_s = T_{s0} = \mathrm{const}, \quad T_{is} = T_{is0} = \mathrm{const}, \quad T_{es} = T_{es0} = \mathrm{const}$$

с постоянным давлением, равномерно распределенным разрядным и запрещенным осевым током

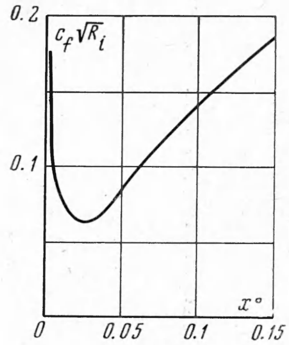
$$j_{ys} = j_{ys0} = \mathrm{const}, \quad j_{xs} = 0$$

При этом из уравнения движения (2) получаем $U_s^\circ = \sqrt{1 + 2S_m x^\circ}$.

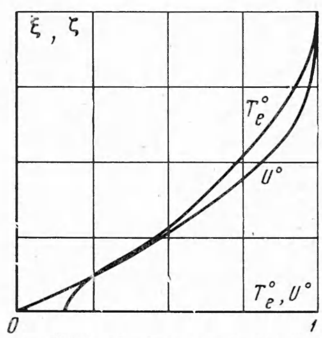


Фиг. 1

На фиг. 1 представлено распределение динамических толщин δ, δ*, ϑ по длине электрода, а также распределение Δ, Δ* и θ.



Фиг. 2



Фиг. 3

Величины $C_f\sqrt{R_i}$ изображены на фиг. 2. Профили скоростей $u^\circ = u / U_s$ и профили температур $T_e^\circ = T_e / T_{es}$ показаны на фиг. 3.

Поступила 5 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Karman T. Über laminare und turbulente Reibung. ZAMM, 1921, Bd 1, H. 4, S. 233.
2. Калихман Л. Е. Газодинамическая теория теплопередачи. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
3. Калихман Л. Е. Пограничный слой двухтемпературной плазмы на электродах магнитогидродинамического канала со скрещенными E, B-полями при больших значениях параметра Холла. ПМТФ, 1969, № 3.