

так что соотношения (2.1), (2.2) справедливы на основной части поверхности, если  $\delta M/\lambda^2 \ll 1$ . Течение вблизи кромок в этом случае описывается уравнениями Эйлера и пограничного слоя в приближении скользящего крыла. В промежуточной области  $\delta M/\lambda^2 = O(1)$  пограничный слой на крыле описывается полными уравнениями трехмерного пограничного слоя [13], а при  $\delta M/\lambda^2 \gg 1$  справедливо другое предельное решение [14].

Автор приносит благодарность А. Д. Хонькину за полезное обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хислет М. А., Ломакс Г. Теория малых возмущений при сверхзвуковых и трансзвуковых скоростях потока // Общая теория аэродинамики больших скоростей.— М.: Воениздат, 1962.
2. Van Dyke M. D. Second-order subsonic airfoil theory including edge effects.— Washington, 1956.— (Rept/NASA; N 1254).
3. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967.
4. Шалаев В. И. Пространственный пограничный слой на тонких крыльях в сверхзвуковом потоке газа // ЧММСС/АН СССР, Сиб. отд-ние, ИТПМ.— 1986.— Т. 17, № 5.
5. Шалаев В. И. Пространственный пограничный слой на тонких крыльях и телах при малых углах атаки // Моделирование в механике/АН СССР, Сиб. отд-ние, ИТПМ.— 1988.— Т. 2(19), № 5.
6. Струминский В. В. Скольжение крыла в вязком сжимаемом газе // ДАН СССР.— 1946.— Т. 54, № 9.
7. Тригуб В. Н. Обтекание носка тонкого профиля вязкой несжимаемой жидкостью // Учен. зап. ЦАГИ.— 1981.— Т. XII, № 4.
8. Шалаев В. И. Экономичный метод численного решения уравнений турбулентного пограничного слоя // Тр. ЦАГИ.— 1985.— Вып. 2265.
9. Winter K. G., Smith K. G. Measurements of skin friction on a cambered delta wing at supersonic speeds.— L., 1967.— (Rept. and Memo/ARC; N 3501).
10. Stewartson K. The theory of laminar boundary layers in compressible fluids.— Oxford: Clarendon Press, 1964.
11. Петухов И. В., Селиверстов С. Н. Программа BL 2D 02 на ФОРТРАН для численного решения уравнений двумерного пограничного слоя // Тр. ЦАГИ.— 1981.— Вып. 2107.
12. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика.— М.: Машиностроение, 1975.
13. Рубан А. И., Сычев В. В. Гиперзвуковое вязкое течение газа около крыла малого удлинения // Учен. зап. ЦАГИ.— 1973.— Т. IV, № 5.
14. Дудин Г. Н., Нейланд В. Я. Закон поперечных сечений для трехмерного пограничного слоя на тонком крыле в гиперзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1976.— № 2.

г. Жуковский

Поступила 23/1 1990 г.,  
в окончательном варианте — 10/IX 1990 г.

УДК 532.529.6

П. К. Волков

### СТАЦИОНАРНОЕ ВСПЛЫТИЕ КАПЕЛЬ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

**1. Введение.** Исследование всплывания частиц одной среды, являющихся каплями в другой,— очень сложная задача, поскольку необходимо определять гидродинамические характеристики внутри и вне капли, а также ее форму — границу раздела разных сред. Причем скорость всплывания существенно зависит как от физических свойств сред, так и от структуры течений. Последнее обстоятельство не позволяет так же просто, как в случае движения тела известной формы с заданной скоростью, перейти к изучению эквивалентной задачи обтекания капли, которая, как правило, проще исходной. Поэтому необходимо различать процесс стационарного всплывания от движения с заданной постоянной скоростью (даже если это касается всплывания твердого тела). Простой пример состоит в том, что твердый шарик всплывает (тонет) в жидкости с определенной скоростью, а задачу его движения можно решать для разных значений скорости. Таким образом, всплывание реализуется при некотором значении параметра, характеризующего движение тела с постоянной скоростью. Ситуация усложняется, если форма тела может изменяться под воздействием гидродинамики процесса.

Математическое описание всплывания капли жидкости в другой жидкости состоит в отыскании решений уравнений Навье — Стокса как внутри капли, так и вне ее при выполнении некоторых условий согласования на границе раздела сред. Первые

работы [1, 2] были посвящены решению уравнений в приближении Стокса. Получено, что в этом случае форма капли — сфера, внутри нее существует сферический вихрь Хилла. Теоретическое исследование деформации капель проведено в [3] в приближении Озеена методом сращивания асимптотических разложений. Форма капли мало отличается от сферической. Приближенные решения для больших чисел Рейнольдса в виде рядов по полиномам с использованием метода Бубнова — Галеркина получены в [4, 5] для сферических капель. В силу нелинейности уравнений Навье — Стокса и краевых условий полное решение задачи можно найти только численно. В [6, 7] построены алгоритмы прямого численного решения полных уравнений Навье — Стокса и определены характеристики течений в области промежуточных значений гидродинамических параметров. Более полный обзор работ дан в [8]. Все упомянутые теоретические решения посвящены либо различным асимптотическим случаям малых (больших) значений гидродинамических параметров, либо слабдеформируемой сфере, либо исследованию задачи стационарного обтекания капли [6]. Так что вопрос о соответствии этих решений исходной задаче всплытия капли требует дополнительного рассмотрения. Если для сферических капель он может быть легко разрешен (критерием отбора служит равенство сил трения и Архимеда), то для деформированных дело обстоит сложнее. В [9] на основании метода численного решения задачи всплытия пузыря в вязкой жидкости построен алгоритм решения задачи стационарного всплытия капли в вертикальной трубе. В данной работе в области промежуточных значений гидродинамических параметров изучаются особенности течений внутри и вне капли и их влияние на процесс всплытия в неограниченном объеме. Построена карта режимов течений, проведено сопоставление результатов расчетов с предельными случаями очень вязкой капли (твердой сферы) и пузыря.

**2. Постановка задачи и анализ размерностей.** Пусть капля жидкости плотности  $\rho_1$  с кинематической вязкостью  $\nu_1$  находится в покоящейся жидкости с  $\rho_2, \nu_2$ . Ускорение силы тяжести  $g$  направлено сверху вниз. Если  $\rho_1 = \rho_2$ , то капля находится в равновесии, при  $\rho_1 < \rho_2$  она всплывает, при  $\rho_1 > \rho_2$  тонет. В любом случае можно ожидать появления стационарного движения, так как сила Архимеда капли и сила сопротивления жидкости действуют в противоположных направлениях. Поскольку объем капли не изменяется (а значит, и сила Архимеда постоянна), то с течением времени может наступить момент, когда сила сопротивления сравняется по величине с выталкивающей. Если при этом не изменяются существенно форма капли и картина течения, то будем говорить, что происходит стационарное всплытие (погружение) со скоростью  $U$ , которая определяется всем процессом.

В прямоугольной декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  с началом  $O$  во внешней жидкости уравнения Навье — Стокса имеют вид

$$(2.1) \quad \partial \mathbf{u}_i / \partial t + \mathbf{u}_i \nabla \mathbf{u}_i + (1/\rho_i) \nabla (p_i + \rho_i g x_3) = \nu_i \Delta \mathbf{u}_i, \quad \text{div } \mathbf{u}_i = 0$$

( $i = 1, 2$  относятся к жидкости внутри и вне капли,  $\mathbf{u}_i$  — векторы скорости,  $p_i$  — давление).

Зададим краевые условия. На поверхности капли  $\Gamma$  ( $F(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ ) должны быть равными скорости и касательные напряжения, а разность нормальных напряжений равна капиллярному давлению:

$$(2.2) \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2;$$

$$(2.3) \quad \rho_1 \nu_1 \tau S_1 \mathbf{n} = \rho_2 \nu_2 \tau S_2 \mathbf{n};$$

$$(2.4) \quad p_1 - 2\rho_1 \nu_1 n S_1 \mathbf{n} - p_2 + 2\rho_2 \nu_2 n S_2 \mathbf{n} = \sigma K - p_K + p_\infty.$$

Здесь  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела сред;  $\tau, \mathbf{n}$  — единичные векторы по касательной и нормали к  $\Gamma$ ;  $S_i^{hj} = (\partial \mathbf{u}_i^h / \partial x_j + \partial \mathbf{u}_i^j / \partial x_h) / 2$  — тензор скоростей деформаций;  $K$  — кривизна поверхности  $\Gamma$ . Тензор напряжений  $T_i = -p_i I + 2\rho_i \nu_i S_i$ .

Кроме того, должно выполняться кинематическое условие

$$(2.5) \quad \partial F / \partial t + \mathbf{u}_i \nabla F = 0.$$

На внешней границе области течения жидкость покоится:

$$(2.6) \quad \mathbf{u}_2 \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Задача (2.1)—(2.6) нестационарная и описывает процесс всплытия капли жидкости под действием силы тяжести. Искомые функции:  $\mathbf{u}_1,$

$u_2, p_1, p_2, F$ . По мере перехода к стационарному всплытию (если оно существует)  $\partial F/\partial t \rightarrow \text{const} = U$  — скорость всплытия капли.

Условия (2.2), (2.3) обеспечивают непрерывность скоростей и касательных напряжений при переходе через границу раздела сред; (2.4) означает, что нормальные напряжения терпят разрыв на величину капиллярного давления. В случае равновесия (например,  $\rho_1 = \rho_2$  или  $g = 0$ ) из (2.4) вытекает, что поверхность — сфера, а давление внутри  $p_K$  не является произвольным и, если задан радиус капли  $a$ , может быть получено из (2.4), которое имеет вид

$$(2.7) \quad p_K - p_\infty = 2\sigma/a.$$

Из (2.4) и (2.7) следует, что решение задачи зависит от разности  $(p_K - p_\infty)$  и  $a$  не являются независимыми, если заданы среды. Таким образом, уравнения (2.1)–(2.6) содержат семь независимых входных размерных величин:  $\rho_1, \nu_1, \rho_2, \nu_2, \sigma, g, a$ . Из теории размерностей вытекает, что решение (2.1)–(2.6) определяется четырьмя независимыми безразмерными комплексами.

**3. Метод решения.** Уравнения (2.1)–(2.6) при установившемся движении упрощаются и будут стационарными в системе координат, связанной с каплей. Теперь она покоится, а жидкость набегаёт на нее и имеет на внешней границе (вдали от капли) постоянную скорость, равную скорости всплытия  $U$ . В уравнениях (2.1) и (2.5) исчезает производная по времени. Рассмотрим осесимметричные решения. В данном случае удобно ввести сферическую систему координат и перейти от переменных  $u_i$  и  $p_i$  к функциям тока  $\psi_i$  и завихренности  $\omega_i$ . Это сокращает количество искомых функций и приводит к необходимости решения четырех уравнений эллиптического типа для функций  $\psi_1, \psi_2, \omega_1, \omega_2$  и обыкновенного дифференциального уравнения для функции границы  $F$  [9]. Как указывалось выше, задача имеет четыре независимых безразмерных комплекса. От выбора способа обезразмеривания в уравнениях могут присутствовать разные наборы. Если в качестве характерных размера и скорости взять  $a$  и  $U$  и провести обезразмеривание обычным способом [9, 10], то получим  $Re_1 = U2a/\nu_1, Re_2 = U2a/\nu_2$  — числа Рейнольдса внутреннего и внешнего течений,  $We = \rho_2 U^2 2a/\sigma$  — число Вебера,  $\rho = \rho_1/\rho_2$  — отношение плотностей,  $Fr = U^2/ga$  — число Фруда,  $Pd = (p_K - p_\infty)2a/\sigma$ .

Параметр  $\rho$  задает процесс: при  $\rho < 1$  капля всплывает, при  $\rho > 1$  тонет;  $Re_1, Re_2$  характеризуют гидродинамические свойства жидкостей;  $We$  отвечает за деформацию поверхности;  $Fr, Pd$  должны быть определены одновременно с функциями течения (например, как в [10]) из условий стационарности и неизменности объема капли.

В данной работе ограничимся решениями при  $\rho = 0,1$  по двум причинам. Во-первых, при некоторых  $Re_1$  возможно сопоставление с расчетами пузыря [10, 11]. Во-вторых, они имеют и самостоятельное значение — моделируют всплытие паровых пузырей. Поскольку при  $We = 0$  для любых  $Re_1$  и  $Re_2$  условие (2.4) дает уравнение  $K = Pd$ , т. е. кривизна поверхности постоянна, а значит, поверхность — сфера, радиус которой  $R_0$  определяется через  $(p_K - p_\infty)$ , то  $2/R_0 = (p_K - p_\infty)2a/\sigma$ . Величина  $(p_K - p_\infty)$  должна подбираться из условия, чтобы объем капли оставался неизменным. Выберем ее так, чтобы  $R_0 \equiv 2$ . Это соответствует введению масштаба характерной длины  $l = \sigma/2(p_K - p_\infty)$  вместо  $a$  (причем для сферы  $l = a/2$  и параметры  $Re_1, Re_2, We, Fr$  легко пересчитываются). Расчеты для деформированных капель проводились при фиксированных  $Re_1$  и  $Re_2$  по числу Вебера с некоторым шагом  $\delta We$ , начиная с  $We = 0$ , по алгоритму, изложенному в [9]. При малых  $Re_1$  возможно сравнение с решением обтекания твердой сферы.

Наличие большого количества независимых параметров существенно осложняет обобщение данных и сопоставление с экспериментом. Здесь для этой цели используются  $R_\sigma = a/(\sigma/\rho_2 g)^{1/2}, R_\nu = a/(\nu_2^2/g)^{1/3}$ . На диаграмме с координатами  $R_\sigma, R_\nu$  внешняя жидкость изображается прямой

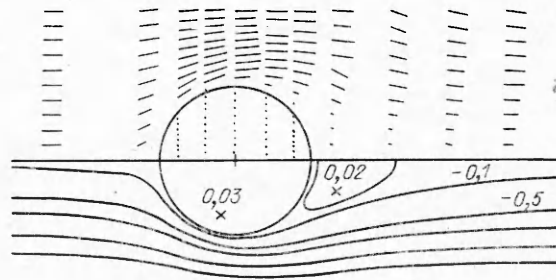
Re <sub>∞</sub>	Re <sub>1</sub>					Сферический пузырь		Твер- дая сфера
	0,4	20	40	60	100	[10]	[12]	[13]
	Cd							
0,1	238	—	—	236	—	160,5	161,6	240
1	25,2	—	—	24,12	—	16,8	17,6	26
12	3,58	—	2,5	—	2,47	2,2	2,2	3,9
40	1,78	—	1	0,93	—	0,8	0,83	1,9
60	1,5	—	—	0,71	—	0,66	0,6	1,6
100	1,28	0,67	—	0,52	—	0,48	0,4	1,2
200	1,13	0,65	—	—	—	0,32	0,2	0,82

линией, поскольку  $(R_{\sigma}/R_v)^6 = \rho_2^3 g v_2^4 / \sigma^3 = M$  ( $M$  — число Мортоня среды всплытия [11]). Отмечая на ней значения  $Fr$  (определяемого параметра) для различных  $Re_1$ ,  $Re_2$ ,  $We$ , можно проследить влияние жидкости капли на процесс ее всплытия во внешней жидкости. Связь параметров задается формулами

$$(3.1) \quad R_{\sigma} = (We/2Fr)^{1/2}, \quad R_v = (Re_2^2/4Fr)^{1/3}, \quad M_K = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^3 \frac{2We^3}{Fr Re_1^4}$$

**4. Всплытие сферических и слабodeформированных капель.** Итак, при  $We = 0$  имеем сферическую каплю с  $R_0 = 2$  для любых значений  $Re_1$ ,  $Re_2$ . Краевое условие (2.4) выполнено точно, и, решая задачу обтекания сферы, находим функции течения внутри и вне капли. Из условия стационарности (равенства силы сопротивления капли архимедовой силе) вычисляем определяемый параметр  $Fr$ . Поскольку в качестве гидродинамической характеристики тел используется коэффициент сопротивления  $Cd$ , вычислим его для всплывающей капли:  $Cd = (\rho_2 - \rho_1) V g / (\rho_2 U^2 / 2) \times (\pi a^2) = (1 - \rho_1/\rho_2) 8/3 Fr$ . Он отличается от  $Cd$  пузыря [10] множителем в круглых скобках, отвечающим за наличие массы вещества в капле. Здесь  $V$  — объем. При  $\rho_1/\rho_2 = 0$  получаем общепринятое значение  $Cd$  для пузыря.

В таблице представлены рассчитанные  $Cd$  для сферических капель при разных  $Re_1$ ,  $Re_2$  ( $R_c = 0,1$ ). Сравнение значений  $Cd$  при  $Re_1 = 0,4$  с данными по обтеканию твердой сферы [13] показывает различие их менее чем на 9 % для  $Re_2 \leq 100$ . При  $Re_2 = 200$  разница составляет уже 27 %. Причем при  $Re_2 = 100, 200$   $Cd$  капли уже больше, чем твердой сферы. Внешнее течение безотрывное вплоть до  $Re = 200$ , но при  $Re_2 = 100, 200$  за сферой уже имеется область вторичного течения, которая не примыкает непосредственно к капле (рис. 1,  $Re_1 = 0,4$ ,  $Re_2 = 200$ ,  $Fr = 2, 1$ , внизу — изолинии функции тока, сверху — поле вектора скорости). Внутри капли и в области следа имеются вихревые движения одного направления, интенсивность которых невелика. Локальные максимумы функции тока равны 0,03 и 0,02 соответственно. Источником этих движений является внешнее течение. Внутренний вихрь возникает за счет трения на границе раздела сред, внешний — вследствие торможения части жидкости за каплей. Отсутствие отрыва, как на твердой поверхности сферы [13], связано с необходимостью стыковки двух вихревых движений одного направления. Впрямую это сделать невозможно, поскольку на границе капли ставится условие равенства вектора скорости с разных сторон. Для того



Р и с. 1

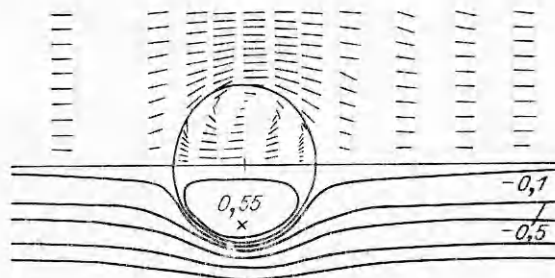
чтобы граничная линия вторичного течения исходила с поверхности капли, необходимо появление третьего «буферного» вихря между этими двумя, что возможно при достаточно интенсивном вихревом движении за каплей, которое сможет на части границы развернуть течение и, таким образом, организовать новое возвратное течение внутри капли в кормовой части. Такой процесс действительно происходит с увеличением  $We$ . При  $We = 0,46$  ( $Re_1 = 0,4$ ,  $Re_2 = 200$ ) значительно возросло количество итераций при расчете функций течения. При зарождении нового вихря внутри капли внешний начинает отходить, затем образуется новый, примыкающий непосредственно к поверхности, он развивается до размеров, при которых течение снова станет стационарным (треугольник на рис. 3) или процесс будет нестационарным. При этом произошел скачок в коэффициенте сопротивления:  $Cd = 0,69$ , что на 16 % меньше  $Cd$  твердой сферы [13] (было на 27 % больше). Давление на внешней поверхности капли существенно меняется на всей границе — силы, действующие на каплю, сильно изменяются как по величине, так и по направлению. Эти рассуждения, конечно, нельзя рассматривать как решение развития процесса по физическому времени, так как они отвечают установлению по фиктивному времени. Но поскольку часто можно наблюдать всплытие легкого шарика в виде серии отдельных рывков, то они дают косвенную информацию о возможных процессах при таком всплытии.

Расчеты при больших  $Re_1$  соответствуют менее вязким средам капли. Из таблицы видно, что уже при  $Re_1 = 60$  коэффициент сопротивления для  $Re_2 > 1$  отличается от  $Cd$  пузыря на 8—12 %. Из решений при  $Re_2 = 12$  следует, что разница в  $Cd$  для  $Re_1 = 40$  и 100 весьма незначительна. На рис. 2 показан вид течения для  $Re_1 = 60$ ,  $Re_2 = 100$ ,  $We = 0,88$  ( $Fr = 4,1$ ,  $R_\sigma = 0,33$ ,  $R_v = 8,46$ ). Капля слегка деформирована, внутри нее имеется интенсивный вихрь Хилла. Центр его расположен вблизи границы капли. Максимальные значения скорости движения жидкости внутри и вне капли примерно одинаковы. При меньших  $Re_2$  и  $We$  соотношение скоростей остается примерно таким же. С уменьшением  $Re_1$  при фиксированном  $Re_2$  картина течений внутри капли изменяется от показанной на рис. 2 до рис. 1, где жидкость практически покоится. Во внешнем течении застойная область отсутствует уже при  $Re_1 = 20$  для малодеформированных капель.

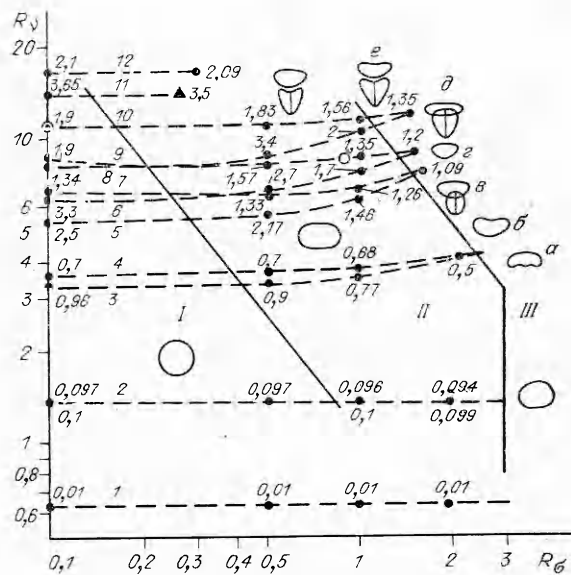
Расчеты при  $Re_2 \leq 1$  дают примерно одинаковые значения  $Cd$  для разных  $Re_1$ . Течения не зависят от среды капли. Это не удивительно, поскольку вихрь Хилла является точным решением уравнений Навье — Стокса при малых  $Re_2$ , не зависящим от  $Re_1$  [13]. Для  $Re_1 = 0,4$ ,  $Re_2 = 0,1$ ,  $We = 0,0004$  ( $Fr = 0,009$ ,  $R_\sigma = 0,15$ ,  $R_v = 0,65$ ,  $M = 1,4 \cdot 10^{-4}$ ,  $M_k = 10^{-9}$ ) внутри капли имеется интенсивное вихревое движение. Полученные решения соответствуют всплытию капель жидкости, числа Мортон  $M_k$  которых меньше  $M$  среды всплытия, — соотношение  $M$  такое же, как при  $Re_2 > 1$ ,  $Re_1 > 20$  (при  $Re_1 = 0,4$  значение  $M_k$  капли больше  $M$  внешней среды). Для фиксированного  $Re_2$  значения  $M_k$  изменяются более чем на семь порядков, если  $Re_1 = 0,4 \div 60$ . Так, для воды  $M \approx 10^{-11}$ , минерального масла  $M \approx 0,01$ , сиропа (Bond)  $M \approx 10^6$  [14].

**5. Всплытие деформированных капель.** С увеличением  $We$  происходит деформация капель: они начинают вытягиваться поперек направления всплытия. Изменение поверхности достигает 3 % (отношение поперечного и продольного размеров капли) при  $We \approx 0,24$  для различных  $Re_1$  и  $Re_2 \geq 1$ . На диаграмме с координатами  $R_\sigma$ ,  $R_v$  это область I (рис. 3). Для  $Re_2 \leq 1$  картина течения и степень искривления границы одинаковы при  $0,4 \leq Re_1 \leq 60$ , однако для больших  $Re_2$  уже заметны отличия. Так, верхний конец прямой, соответствующей границе области I, при  $Re_1 = 0,4$  сдвигается несколько правее,  $We$  при этом увеличивается незначительно.

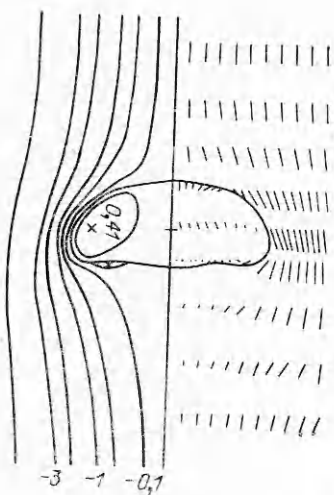
Штриховыми линиями на рис. 3 указаны расчеты по  $We$  при фиксированных значениях  $Re_1$ ,  $Re_2$ : линия 1 — 0,4; 0,1 (совпадает с  $Re_1 = 60$ ,  $Re_2 = 0,1$ ); 2 — 0,4; 1 (практически одинакова с  $Re_1 = 60$ ,  $Re_2 = 1$ );



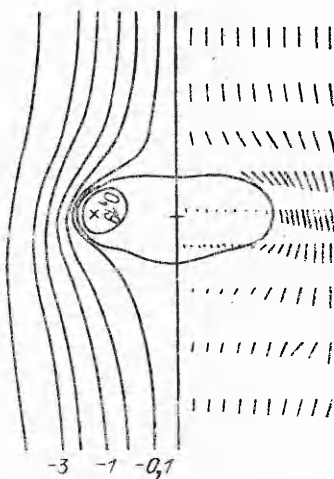
Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4



Р и с. 5

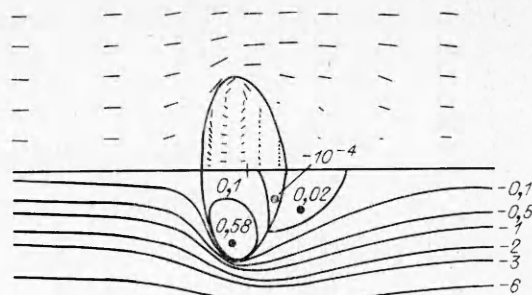
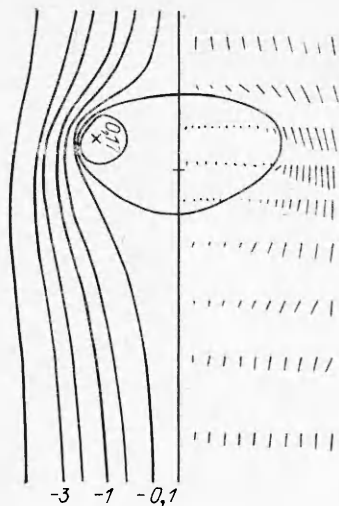
3 — 40; 12; 4 — 0,4; 12; 5 — 60; 40; 6 — 60; 60; 7 — 0,4; 40; 8 — 60; 100; 9 — 0,4; 60; 10 — 0,4; 100; 11 — 20; 200; 12 — 0,4; 200. Цифры на точках линий — значения  $Fr$ , полученные при решении задачи. Следует подчеркнуть отличие данной диаграммы от предшествующих из [9, 11], на которых изображались изолинии  $Fr$ . Наличие еще одного независимого параметра (среды капли) приводит к необходимости проведения большого количества расчетов при построении диаграмм для сред капли с заданным  $M_k$ . Диаграмма рис. 3, конечно, не позволяет легко строить зависимости скорости всплытия капли от ее размера в различных жидкостях, однако главные эффекты процесса всплытия раскрывает. Так, при фиксированном  $Re_2 > 1$  для разных  $Re_1$  точки, отвечающие одинаковым значениям  $R_c$  (с ростом  $We$ ), сближаются (кривые 3 и 4; 5 и 7; 6 и 9; 8 и 10) по мере увеличения  $R_c$ . Значения  $Fr$  также выравниваются. Это говорит о том, что скорости всплытия капель одинакового размера становятся равными, несмотря на то что  $M_k$  отличаются на этих кривых более чем на семь порядков. Форма капель изменяется от сферы до сплюснутого эллипсоида на правой границе области II, отмеченной ломаной линией. Картины течений при этом весьма разнообразны.

Так, при  $Re_2 \leq 1$  кривые, отвечающие  $Re_1 = 0,4$  и  $Re_1 = 60$ , практически совпадают. Форма капель мало отличается от сферы, и только для  $R_c > 1$  появляются искажения в кормовой части (уплощение ее), становится заметным появление «угла» на поверхности. При  $Re_1 = 0,4$ ,  $Re_2 = 1$ ,  $We = 1,62$  ( $R_c = 2,94$ ,  $R_v = 1,39$ ,  $M = 91$ ,  $M_k = 3,56$ ) внутри капли имеется интенсивный вихрь и максимальное значение скорости сравнимо со скоростью всплытия. Коэффициент сопротивления такой же, как у твердой сферы, а течение внутри капли больше отвечает случаю газового пузыря (при этом  $M_k < M$ ). Давление  $p_2$  на поверхности со стороны внешнего течения монотонно растет при движении от носовой части до кормы. Для больших  $We$  (уже при  $We = 1,6204$ ,  $R_c = 3,18$ ) происходит изменение в течении жидкости. Почти в 2 раза возросла интенсивность вихря в капле, во внешнем течении профиль скорости по сечению стал немонотонным. В окрестности «угла» в давлении появилась неравномерность, а сама граница стала волнообразной,  $Fr$  уменьшилось до 0,08,  $M = 106,6$ ,  $M_k = 4,16$ . В дальнейшем граница волнообразно изменяется, течение становится нестационарным.

Для  $Re_2 \leq 0,1$  особенности течений аналогичны случаю  $Re_2 = 1$ , но при практически сферической форме капли. При  $R_c \geq 3$  установившейся картины получить не удалось — в кормовой части граница капли оставалась волнообразной на итерациях расчета поверхности.

При  $Re_2 > 1$  скорость всплытия существенно зависит от среды капли. По мере деформирования (увеличения  $We$ ) эти различия уменьшаются и, начиная с некоторого  $We$ , практически исчезают, что наблюдается при  $We \approx 3,5-4,2$  для  $Re_2 = 12 \div 100$ . Наклонная часть ломаной линии, разделяющей области II и III на рис. 3, соответствует  $We \approx 4-4,5$ . Данный отрезок построен по результатам расчетов, когда за каплей появлялся вихревой след (при  $Re_1 \geq 40$ ) либо возникала волнообразная граница в кормовой части капли (рис. 4,  $Re_1 = 40$ ,  $Re_2 = 12$ ,  $We = 6,1$ ,  $Fr = 0,45$ ,  $R_c = 2,6$ ,  $R_v = 4,3$ ,  $M = 0,049$ ,  $M_k = 3,9 \cdot 10^{-7}$ ). Обтекание капли внешним потоком безотрывное, внутри возникает интенсивный вихрь с «центром» вблизи края капли и практически равномерным распределением скорости в среднем сечении, много меньшей скорости всплытия. При дальнейшем увеличении  $We$  волнообразование усилилось и во впадине около края появилась застойная зона (аналогично тому, как это происходит у пузыря на рис. 3, б из [11]); среда всплытия и размер капли примерно одинаковы). Однако в данном случае не произошло образования обширного вихревого следа за каплей, как у пузыря. В дальнейшем на итерациях граница кормовой части волнообразно изменялась.

Решения при  $Re_1 = 0,4$ ,  $Re_2 = 12$  до  $We = 3,4$  ( $R_c = 1,9$ ) имели симметричную форму сплюснутого эллипсоида. Но уже при  $We = 3,48$  сильно увеличилось число итераций при нахождении функций течения,



Р и с. 7

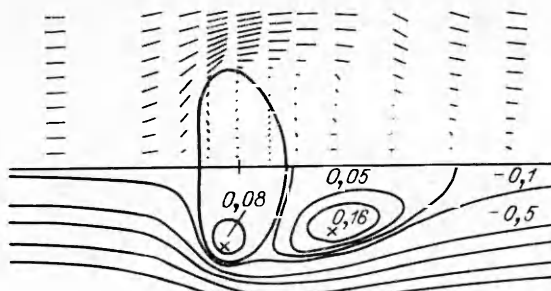
Р и с. 6

а поверхность стала волнообразной (рис. 5,  $Fr = 0,48$ ,  $R_{\sigma} = 1,91$ ,  $R_{\nu} = 4,22$ ,  $M = 0,0086$ ,  $M_{\kappa} = 6,2$ ) и стационарного течения получено не было. При больших  $Re_2$  деформация капли с ростом  $We$  происходит так же вплоть до значений  $We \approx 3,45$ . При малых  $Re_1$  капля имеет более плоскую переднюю часть, форма ее клиновидная. На рис. 6 представлено течение при  $Re_1 = 0,5$ ,  $Re_2 = 45$ ,  $We = 3,85$  ( $Fr = 1,1$ ,  $R_{\sigma} = 1,32$ ,  $R_{\nu} = 7,6$ ,  $M = 2,6 \cdot 10^{-5}$ ,  $M_{\kappa} = 2,6$ ). Далее по  $We$  продвинуться не удалось — поверхность капли в кормовой части волнообразно изменялась на итерациях при расчете формы. Для больших  $Re_1$  форма капли симметричная до  $We = 3,45$ , при дальнейшем увеличении  $We$  становится несимметричной и с  $We = 4,5$  за ней во внешней жидкости образуется вихревой след. Одновременно внутри капли в кормовой части появляется еще один тороидальный вихрь, вращающийся в другую сторону. Таким образом, все три вихря образуют систему, гидродинамически совместимую с внешним обтеканием, с точкой стыковки их на поверхности капли. На рис. 7 показано течение при  $Re_1 = 69$ ,  $Re_2 = 45$ ,  $We = 4,95$  ( $Fr = 1,1$ ,  $R_{\sigma} = 1,5$ ,  $R_{\nu} = 7,85$ ,  $M = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $M_{\kappa} = 9,7 \cdot 10^{-9}$ ). С ростом  $We$  зоны вихревого течения во внешней среде, а также внутри капли в корме увеличиваются.

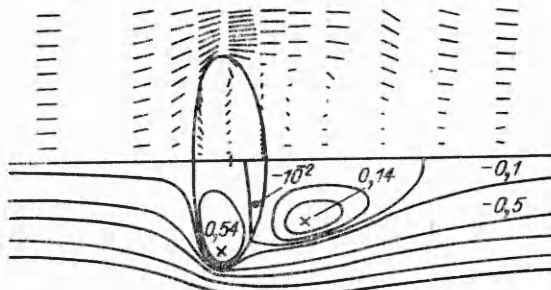
При  $Re_2 = 60$  возросло расстояние между кривыми 6 и 9, отвечающими  $Re_1 = 60$  и 0,4 (см. рис. 3). Это значит, что свойства жидкости капли оказывают существенное влияние на всплытие, несмотря на то что отношение плотностей осталось тем же. С ростом  $We$  за каплей при  $Re_1 = 0,4$  образуется зона вторичного течения (кружки на рис. 3) на некотором расстоянии от нее. Интенсивность вихревого движения как внутри, так и вне капли маленькая. Капля расплющивается, увеличивается зона вторичного течения за ней, и при переходе в область III в лобовой части появляется вмятина. Течение с  $We = 4,62$  ( $Fr = 1,19$ ,  $R_{\sigma} = 1,4$ ,  $R_{\nu} = 9,1$ ,  $M = 1,3 \cdot 10^{-5}$ ,  $M_{\kappa} = 6,58$ ) имеет такую же структуру, как на рис. 8. При  $Re_1 = 60$  симметрия в форме сохраняется до образования вихря за ней ( $We = 4,55$ ) и далее с увеличением  $We$ . При  $We = 4,97$  ( $Fr = 1,22$ ,  $R_{\sigma} = 1,43$ ,  $R_{\nu} = 9,02$ ,  $M = 1,58 \cdot 10^{-5}$ ,  $M_{\kappa} = 1,55 \cdot 10^{-8}$ ) картина течения такая, как на рис. 9. Графики давления на внешней поверхности капли практически симметричны относительно оси  $\theta = \pi/2$ .

Расчеты для  $Re_2 = 100$  уже около сферических капель давали различные картины течений внешней жидкости (линии 8, 10 на рис. 3). При  $Re_1 = 0,4$  за каплей имеется вторичное течение, не примыкающее непосредственно к ней, как на рис. 1. С ростом  $We$  капля сплющивается, передняя ее часть более плоская, область вторичного течения за ней увеличивается. При  $We \approx 4,5$  возникает вмятина на лобовой части. На рис. 8 ( $We = 5,22$ ,  $Fr = 1,37$ ,  $R_{\sigma} = 1,38$ ,  $R_{\nu} = 12,19$ ,  $M = 2,1 \cdot 10^{-6}$ ,  $M_{\kappa} =$





Р и с. 8



Р и с. 9

$= 8,2$ ) имеем картину с развитым вихревым движением за каплей, интенсивность которого уже превосходит внутренний вихрь.

При  $Re_1 = 60$  течение безотрывное, форма капли симметричная до  $We \approx 4,3$ . Замкнутый вихревой след появляется при  $We = 4,34$  (одновременно внутри нее возникает еще один вихрь в кормовой части). С ростом  $We$  вихрь за каплей увеличивается в размерах (рис. 9,  $We = 5,56$ ,  $Fr = 1,35$ ,  $R_c = 1,43$ ,  $R_v = 12,25$ ,  $M_c = 2,6 \cdot 10^{-6}$ ,  $M_R = 2 \cdot 10^{-8}$ ). Рис. 8 и 9 могут служить иллюстрацией влияния состава среды капли на процесс всплытия и ее форму. Числа Моргана жидкости капли отличаются более чем на семь порядков, а  $R_c$  и  $R_v$

близки, т. е. внешняя среда практически одна и та же, как и размеры капли. Скорость всплытия капель одинакова, а структуры течений существенно различаются.

**6. Обсуждение результатов.** На рис. 3 схематично изображены типы течений, полученные в результате численного решения уравнений Навье — Стокса. Некоторые пояснения необходимо сделать для рисунков в области III. Так, у кривых 3 и 4 рисунок а отвечает  $Re_1 = 60$ , б —  $Re_1 = 0,4$ ; в, г —  $Re_2 = 12$ ; д, е —  $Re_2 = 100$  с тем же соответствием параметра  $Re_1$ . Таким образом, эти пары рисунков указывают на типы форм поверхности капли, если жидкость в ней имеет числа Моргана в рассматриваемом диапазоне значений  $M_R$ . При малых  $Re_1$ , по существу, моделируется твердая поверхность, обладающая определенной степенью гибкости, при больших  $Re_1$  результаты близки к решениям всплывающего пузыря и могут служить моделью для парового пузыря. Расчеты при  $Re_2 = 60, 200$  с  $Re_1 = 4$  (малые  $We$ ) говорят о том, что решения при этом  $Re_1$  в большей степени отражают свойства пузыря, чем твердой частицы. Внутри максимальное значение скорости составляет примерно половину от скорости всплытия капли, за ней отсутствует область вторичного течения.

Наклонные линии между областями I и II, II и III проведены по результатам расчетов при  $Re_1 = 60$  и близки к аналогичным для решений пузыря [11]. Значения  $Fr$  в соответствующих точках диаграмм рис. 3 и рис. 4 из [11] отличаются примерно на 20 %, однако в течениях произошли качественные изменения: в области III за каплей при некоторых  $Re_1$  и  $Re_2$  имеются нестационарные колебания поверхности, связанные с присутствием среды в ней. Возникновение отрыва на капле может произойти только с образованием нового вихря внутри нее. Для этого необходимо, чтобы в застойной зоне за каплей было достаточно интенсивное вихревое движение, способное развернуть течение на части поверхности и создать условия для нового «буферного» вихря.

Слияние кривых для разных  $Re_1$  и фиксированном  $Re_2$  происходит, когда в лобовой части капли возникает вмятина ( $Re_1 = 0,4$ ). Одновременно появляется автомодельность скорости всплытия относительно среды капли. Нетрудно убедиться, что линии  $Fr = \text{const}$  для постоянного значения  $M_R$  имеют тот же характер, что и для пузыря [11], и наклонная

линия между областями II и III на рис. 3 проходит в окрестности точек касания прямых, изображающих среду всплытия, с изолиниями Fr. Зависимость скорости всплытия капли данной жидкости в другой конкретной жидкости от ее размера имеет локальный максимум, который предшествует возникновению вихревого следа за каплей, для внешних сред с малым M. Для сред всплытия с  $M \sim 10^{-4} - 10^{-2}$  у этой зависимости есть точка перегиба, обусловленная появлением нестационарных колебаний капли в кормовой части. Указанные особенности происходят в области значений  $We \approx 4 - 4,5$ . Как показывают многочисленные эксперименты [8], именно при этих We наблюдаются колебания поверхности капли.

Так же как и для всплывающего пузыря, образование вихревого следа за каплей приводит к автомодельности скорости всплытия относительно одного из гидродинамических параметров: для малых M ( $M < 0,004$ ) по отношению к  $R_v$ , для больших M — к  $R_\sigma$ . Таким образом, появление вихря за каплей (для малых  $M_K$ ) и прогиба капли в лобовой части (для больших относительно M значений  $M_K$ ) приводит к автомодельности скорости ее всплытия как относительно среды капли, так и еще одного из гидродинамических параметров  $R_\sigma$  или  $R_v$ . В области сферических капель I имеется автомодельность относительно  $R_\sigma$ , а при  $Re_2 \leq 1$  — и по отношению к  $M_K$ .

При больших  $Re_2$  всплытие происходит не по прямой линии. Объяснением этому служит образование вихревого следа за каплей, которое в жидкостях с малой вязкостью (малым значением M) приводит к потере устойчивости прямолинейного всплытия. Наличие поверхностно-активных веществ и примесей на поверхности пузыря создает трение на ней обтекаемой жидкости, и, таким образом, расчеты при  $Re = 200$  могут служить моделью и дают качественное объяснение нестационарным процессам при всплытии пузырей в дистиллированной воде и спирте [14] (соответствуют области локального максимума скорости всплытия).

По мере расплющивания капли (увеличения We) максимальное значение скорости жидкости внутри нее уменьшается (по сравнению со скоростью всплытия). Вихревое движение сосредоточивается на краях капли.

Решения при  $\rho_1/\rho_2 = 0,5$  дают аналогичные закономерности в деформации поверхности и структуре течений. При одинаковых  $Re_1$ ,  $Re_2$ , We получаются меньшие Fr, чем при  $\rho = 0,1$  [9], а линии постоянных значений  $Re_1$ ,  $Re_2$  расположены выше соответствующих на рис. 3. Таким образом, вся диаграмма режимов течений для  $\rho = 0,5$  сдвигается вверх. Как видно из (3.1), при этом находим решения для жидкости капли с большим  $M_K$ , чем при  $\rho = 0,1$ , для той же среды всплытия.

Расчеты проведены в области промежуточных значений определяющих параметров и описывают область, где все они оказывают существенное влияние на процесс всплытия капли вплоть до выхода на автомодельные решения, когда при заданном соотношении плотностей  $\rho$  скорость всплытия зависит от одного гидродинамического параметра.

В заключение отметим, что точное соответствие с расчетами [6, 7] получить невозможно, поскольку там исследовалось обтекание при заданном Fr, которое не приводится. Указанные в [7] основные типы течений согласуются с найденными решениями. Таким образом, представленные здесь и результаты [6, 7] (решения по другому набору безразмерных комплексов) дают полную картину о гидродинамических процессах при всплытии капли.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hadamard J. Mouvement permanent lent d'une sphere liquide et visqueuse dans une liquids visqueuse // Comp. Rend. Acad. Sci.— 1911.— V. 152, N 25.
2. Rybczynski W. Uber die fortschreitende Bewegung einer flussigen Kugel in einem zähen Medium // Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovia. Ser. A.— 1911.— N 1.
3. Taylor T. D., Acrivos A. On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number // J. Fluid Mech.— 1964.— V. 18, N 3.
4. Hamielec A. E., Johnson A. I. Viscous flow around fluid spheres at intermediate Reynolds numbers // Can. J. Chem. Eng.— 1962.— V. 40, N 2.

5. Nakano Y., Tien C. Creeping flow of power-law fluid over Newtonian fluid sphere // *AIChE J.*— 1968.— V. 14, N 15.
6. Ривкин В. Я. Стационарное движение вязкой капли с учетом ее деформации // *Зап. науч. семина. ЛОМИ им. В. А. Стеклова.*— 1979.— Т. 84.
7. Ривкин В. Я. Гидродинамика и теплообмен каплей: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Л., 1986.
8. Гонор А. Л., Ривкин В. Я. Динамика капли // *Итоги науки и техники. Сер. МЖГ.*— М.: ВИНТИ, 1982.— Т. 17.
9. Волков П. К. Всплытие капель жидкости в вертикальных трубах с другой жидкостью // *Моделирование в механике/АН СССР, Сиб. отд-ние, ИТПМ.*— 1990.— Т. 4(21), № 5.
10. Christov C. I., Volkov P. K. Numerical investigation of the steady viscous flow past a stationary deformable bubble // *J. Fluid Mech.*— 1985.— V. 158.
11. Волков П. К., Чиннов Е. А. Стационарное всплытие одиночного пузыря в неограниченном объеме жидкости // *ПМТФ.*— 1989.— № 1.
12. Brabston D. C., Keller H. B. Viscous flows past spherical gas bubbles // *J. Fluid Mech.*— 1975.— V. 69, N 1.
13. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости.— М.: Мир, 1973.
14. Haberman W. L., Morton R. K. An experimental study of bubbles moving in liquids // *Proc. ASCE.*— 1954.— V. 49, N 387.

г. Новосибирск

Поступила 12/VII 1990 г.

УДК 532.529

Н. А. Гумеров

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ ДЛИННЫХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ПОЛИДИСПЕРСНОЙ СМЕСИ ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

Среди большого количества аналитических и численных исследований волновых процессов в пузырьковых жидкостях (обзор, основные результаты и библиографию см. в [1, 2]) относительно скромное место занимает изучение распространения волн в полидисперсных пузырьковых системах. В [3, 4] рассмотрено распространение акустических возмущений в полидисперсной пузырьковой среде. Некоторые результаты численных и аналитических исследований структуры ударных волн в полидисперсных смесях жидкости с конечным числом фракций пузырьков приведены в [5, 6].

В данной работе изучается вопрос о возможности описания распространения длинных волн конечной амплитуды в пузырьковой жидкости с непрерывным спектром размеров газовых пузырьков на основе модели монодисперсной среды. Показано, что в общем случае такое описание неправомерно. Однако в ситуации, когда поверхностное натяжение слабо влияет на давление в пузырьке и процессы близки к изотермическим или адиабатическим, в длинноволновой асимптотике возможно введение эффективных радиусов пузырьков, характеризующих средние периоды собственных колебаний пузырьков, теплообмен и поверхностное натяжение на межфазной границе. В плоском одномерном случае для волн умеренной амплитуды (слабых возмущений волн Римана) выведены эволюционные уравнения, обобщающие уравнения типа Бюргера — Кортевега — де Вриза на более высокие амплитуды (ранее уравнение БКДВ было получено для слабонелинейных волн [1, 2, 7, 8]).

**1. Исходные уравнения.** Рассмотрим невозмущенное однородное по пространству состояние смеси несжимаемой жидкости с пузырьками неразстворимого газа, характеризуемое индексом 0. Будем считать, что в каждом элементарном объеме смеси сферические пузырьки распределены по радиусам  $a_0$  с плотностью распределения  $N_0(a_0)$  на отрезке  $\Delta = [a_-, a_+]$  ( $a_0 \in \Delta$ ) и  $dn_0(a_0) = N_0(a_0)da_0$  — число пузырьков с размерами от  $a_0$  до  $a_0 + da_0$  в единице объема смеси. Пометим каждую квазимонодисперсную фракцию пузырьков в смеси с размерами от  $a_0$  до  $a_0 + da_0$  лагранжевым индексом  $\xi$ , который будем считать непрерывным и, например, равным по определению  $a_0$ , предполагая, что фракция  $\xi$  может быть описана как самостоятельная монодисперсная фаза многофазного континуума [9]. В возмущенном состоянии параметры смеси в целом и несущей фазы не зависят от  $\xi$ , в то время как текущие параметры пузырьков будут функциями от  $\xi$  (что в дальнейшем при необходимости пометается индексом  $\xi$ ). Так,  $dn_\xi(x, t) = N_\xi(x, t)d\xi$ ,  $a_\xi(x, t)$ ,  $\rho_\xi^0(x, t)$ ,  $m_\xi(x, t) = \frac{4}{3}\pi a_\xi^3 \rho_\xi^0$ ,  $p_\xi(x, t)$  трактуются как текущие число пузырьков фракции  $\xi$  в единице объема смеси, их радиус, истинная плотность, масса и давление газа в пузырьках ( $x$ ,