

Е. А. Ланкина, А. М. Михайлов

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ТЕОРИИ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО КОМПОЗИТА

В работе решается задача о действии сосредоточенной силы в однонаправленном неограниченном композите в трех- и двумерном случаях. Это позволяет выразить решение задачи о деформировании под действием массовых сил в виде рядов и интегралов, решить задачу о нагруженном полупространстве (полуплоскости), а также получить предельным переходом известные решения о разрыве волокна, используемые в задачах о трещинах.

1. Рассматривается бесконечный однонаправленный композит, волокна которого в сечении, перпендикулярном направлению армирования z , образуют квадратную сетку с периодом $H + h$ (площадь сечения волокна равна h^2). Узлы сетки нумеруются индексами j, k . Безразмерная координата вдоль волокна $\xi = z/\sqrt{Hh}$ и безразмерное смещение $w_{j,k} = u_{j,k}/\sqrt{Hh}$. Смещение удовлетворяет уравнению [1]

$$(1.1) \quad \partial^2 w_{j,k} / \partial \xi^2 + \beta^2 \Delta_{jk} w = 0, \quad -\infty < j, k < \infty,$$

$$\Delta_{jk} w = w_{j-1,k} + w_{j,k-1} - 4w_{j,k} + w_{j+1,k} + w_{j,k+1}$$

и дополнительным условиям

$$(1.2) \quad \sigma_{j,k} \rightarrow 0, \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad \sigma_{j,k} = E dw_{j,k} / d\xi;$$

$$(1.3) \quad [\sigma_z] \Big|_{\xi=0} = E \frac{dw_{00}}{d\xi} \Big|_{\xi=+0} - E \frac{dw_{00}}{d\xi} \Big|_{\xi=-0} = 2Q.$$

Условие (1.3) задает скачок нормального напряжения в волокне $k = j = 0$ в точке $\xi = 0$, что отвечает сосредоточенной силе $-2Qh^2$, приложенной к волокну. Здесь $\beta^2 = G/E$; E и G — модули Юнга и сдвига для волокна и связующего; h, H — ширина волокна и связующего. Решение ищется с помощью двойного дискретного преобразования Фурье. Каждое уравнение системы (1.1) умножается на $\exp(-ijs) \exp(-ikq)$, $-\pi \leq s, q \leq \pi$ и суммируется по j, k в бесконечных пределах. После элементарных преобразований приходим к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами второго порядка по ξ относительно двойного ряда Фурье:

$$(1.4) \quad w^{FF} = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} w_{j,k}(\xi) \exp(-ijs) \exp(-ikq).$$

Решение уравнения (1.4) зависит от двух произвольных постоянных, которые, будучи не зависящими от ξ , могут, вообще говоря, зависеть от параметров s, q . Одна из них равна нулю вследствие (1.2). После решения (1.4) находим $w_{j,k}$ по формуле обращения, выражающей коэффициенты ряда Фурье (1.4) через его сумму:

$$(1.5) \quad w_{j,k}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c(s, q) \exp(-23|\xi| R(s/2, q/2)) \exp(-ijs) \exp(-ikq) ds dq$$

$$(R(s, q) = \sqrt{\sin^2 s + \sin^2 q}).$$

Продифференцируем (1.5) при $\xi \rightarrow \pm 0$. Благодаря появлению множителя $d|\xi|/d\xi$ предельные значения производной отличаются лишь знаком. Из-за непрерывности напряжений при $\xi = 0$, $(j, k) \neq (0, 0)$ они равны. Это означает, что

$$(1.6) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c(s, q) R(s/2, q/2) \exp(-ijs) \exp(-ikq) ds dq = 0, \quad (j, k) \neq (0, 0).$$

Т а б л и ц а 1

| k | j | | |
|---|------------------------|------------|------------|
| | 0 | 1 | 2 |
| | $E\beta w_{j,k}(0)/2Q$ | | |
| 0 | -0,3221240 | -0,0826046 | -0,0419314 |
| 1 | -0,0826046 | -0,0532128 | -0,0355773 |
| 2 | -0,0419314 | -0,0355773 | -0,0282115 |

Поскольку все коэффициенты Фурье (1.6) (кроме нулевого) равны нулю, функция $c(s, q)R(s/2, q/2)$ — константа, для нахождения которой используем условие (1.3). Получим смещение для пространства от действия сосредоточенной силы

$$(1.7) \quad w_{j,k}(\xi) = \frac{-Q}{8\pi^2\beta E} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\exp(-2\beta|\xi|R(s/2, q/2))R(s/2, q/2)] \times \\ \times \exp(-isj) \exp(-iqk) ds dq.$$

Смещение (1.7) стремится к нулю при $j, k \rightarrow \infty$, поскольку является коэффициентом Фурье суммируемой функции. Однако оно стремится к нулю не слишком быстро, так как ряд из квадратов смещений расходится. Чтобы показать это, воспользуемся равенством Парсеваля и учтем, что подынтегральная функция в (1.7) не квадратично-суммируема, потому что имеет в нуле особенность порядка $1/\sqrt{s^2 + q^2}$. Полученное решение будет также и решением задачи о полупространстве $\xi > 0$, нагруженном на поверхности силой, создающей при $\xi = 0$ в волокне $j = k = 0$ напряжение Q . Чтобы убедиться в этом, разложим силу на две равные части, приложенные к верхнему и нижнему полупространству, и учтем, что напряжения при $\xi = 0$ везде, кроме точки $(0, 0)$, равны нулю (см. (1.6)). По формуле (1.2) находим напряжения

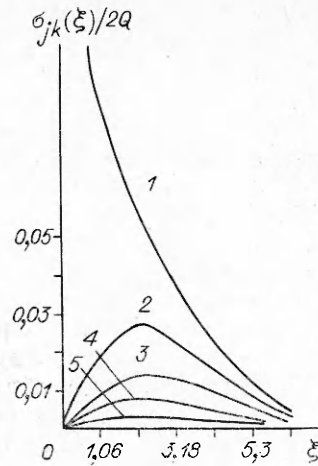
$$(1.8) \quad \sigma_{j,k}(\xi) = \frac{Q \operatorname{sign}(\xi)}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-2\beta|\xi|R(s/2, q/2)) \exp(-ijs) \exp(-iqk) ds dq.$$

При численной реализации формул (1.7), (1.8) получены следующие результаты. В табл. 1 приведены значения $E\beta w_{j,k}(0)/2Q$ в узлах, примыкающих к точке приложения сосредоточенной силы. На отрицательные значения j, k решение распространяется по симметрии. На рис. 1 показана зависимость распределения напряжений вдоль волокон от действия сосредоточенной силы (линии 1-5 отвечают $j = 0; 0; 1; 0; 2$ и $k = 0; 1; 1; 2; 2$). Перейдем к двумерному случаю. Теперь все функции зависят от одной целочисленной переменной j , выражение $w_{j,k+1} - 2w_{j,k} + w_{j,k-1}$ обращается в нуль и вместо (1.1) имеем

$$(1.9) \quad d^2 w_j / d\xi^2 + \beta^2 (w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}) = 0, \\ -\infty < j < \infty.$$

Действуя аналогично трехмерному случаю, придем вместо (1.5) к выражению

$$(1.10) \quad w_j(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c(s) \exp(-2\beta|\xi||\sin(s/2)|) \exp(-ijs) ds.$$



Р и с. 1

Найдя функцию $c(s) = -Q/2\beta E |\sin(s/2)|$, обнаруживаем, что интеграл (1.10) расходуется в нуле. Из дальнейшего видно, что причина расходимости интеграла — формальное применение дискретного преобразования Фурье. В плоском случае w_j не исчезает при $j \rightarrow \infty$, вследствие чего нарушается необходимое условие сходимости ряда w^F . Чтобы обойти эту трудность, рассмотрим такую постановку задачи, при которой решения будут убывать достаточно быстро при $j \rightarrow \infty$, а затем предельным переходом получим решение исходной задачи. Для этого вместо задачи о полуплоскости, нагруженной силой на границе, решим аналогичную задачу о полосе $0 \leq \xi \leq N$, причем на границе полосы $\xi = N$ распределим напряжение, уравнивающее нагрузку, приложенную в точке $\xi = 0$, $j = 0$. Затем совершим предельный переход $N \rightarrow \infty$, в котором уравнивающая нагрузка стремится к нулю, как $1/(2N + 1)$, но занимает все большую область $|j| \leq N$, сохраняя, таким образом, условие уравниваемости. При конечном N после дискретного преобразования Фурье уравнения (1.9) приходим к задаче в полосе $0 \leq \xi \leq N$:

$$d^2 w^F / d\xi^2 - 4\beta^2 \sin^2(s/2) w^F = 0,$$

$$E \frac{dw^F}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = Q, E \frac{dw^F}{d\xi} \Big|_{\xi=N} = \frac{Q}{2N+1} \sum_{j=-N}^N \exp(ijs),$$

решив которую, находим

$$(1.11) w_j(\xi) = \frac{Q}{2\pi\beta E} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(N+1/2)s}{(2N+1)\sin(s/2)} \frac{(\operatorname{ch}(\xi s) \exp(-ijs) - \operatorname{ch}s) - \operatorname{ch}(N-\xi)s \times}{|\sin(s/2)| \operatorname{sh}(Ns)} \times \\ \times \exp(-ijs) + \operatorname{ch}(N-1)s ds$$

($s = 2\beta |\sin(S/2)|$). Подынтегральная функция в (1.11) ограничена в нуле. При $N \rightarrow \infty$ имеем решение для полуплоскости в виде сходящегося интеграла

$$(1.12) w_j(\xi) = \frac{Q}{8\pi\beta E} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(-2\beta |\sin(s/2)|) - \exp(-2\beta |\xi| |\sin(s/2)|) \exp(-ijs)}{|\sin(s/2)|} ds.$$

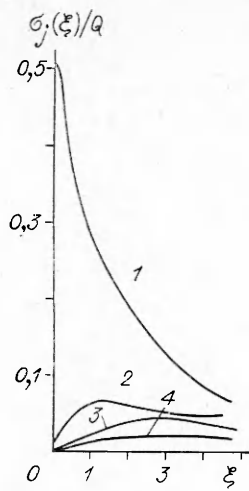
Смещение (1.12) обращается в нуль при $\xi = 1$ и в отличие от трехмерного решения (1.7) не стремится к нулю при $j, k \rightarrow \infty$. Соответствующие напряжения примут вид

$$(1.13) \sigma_j(\xi) = \frac{Q \operatorname{sign}(\xi)}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-2\beta |\sin(s/2)| |\xi|) \exp(-ijs) ds.$$

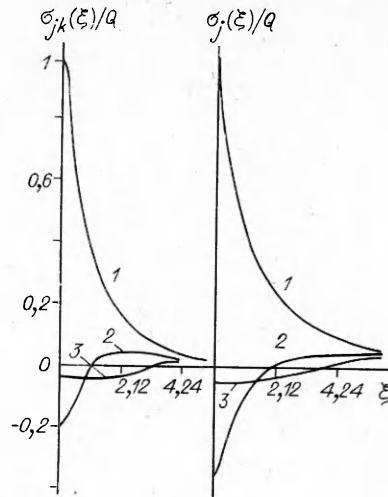
Вернемся к трехмерному случаю и попытаемся найти плоское решение путем суперпозиции решений типа (1.7) для сосредоточенных сил, приложенных на границе полупространства в точках прямой $j = 0$. Каждая сила создает в волокне, к которому она приложена, напряжение Q . Заменяем в (1.7) k на $k-m$ и просуммируем подынтегральное выражение по m в бесконечных пределах. Используя [2]

$$(1.14) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(iqm) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(q - 2\pi n)$$

(δ — дельта-функция Дирака), снова приходим к расходящемуся интегралу (1.10). Причина такой расходимости — медленное убывание смещения (1.7) на бесконечности. Чтобы получить выражение (1.12), вспомним, что смещение определено лишь с точностью до постоянного сдвига вдоль ξ . Поэтому при суммировании по m от каждой конечной суммы будем требовать, чтобы смещение обращалось в нуль при $\xi = 1$, $j = 0$, $k = 0$, как в (1.12). Вычитая соответствующее слагаемое, не зависящее



Р и с. 2



Р и с. 3

от ξ , j , но зависящее от N , снова приходим к (1.12)

$$w_j(\xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N (w_{j,k-m}(\xi) - w_{0,-m}(1)) =$$

$$= \frac{Q}{8\pi\beta E} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(-2\beta|\sin(s/2)|) - \exp(-2\beta|\xi||\sin(s/2)|) \exp(-isj) ds}{|\sin(s/2)|}.$$

Процесс получения (1.12) можно рассматривать как регуляризацию расходящегося интеграла (1.10).

На рис. 2 показано распределение напряжений вдоль волокон с $j = 0, 1, 2, 3$ (линии 1-4) при действии на плоскость сосредоточенной силы $-2Qh^2$, приложенной к волокну $j = k = 0$ в точке $\xi = 0$. Смещения волокон при $\xi = 0$ приводятся в табл. 2.

2. Из решения задачи о сосредоточенной силе путем предельного перехода можно получить решение о разрыве волокна. Этот предельный переход аналогичен тому, который приводит к полю диполя в электростатике из полей двух разноименных зарядов. Поместим сосредоточенные силы, направленные противоположно в точках $\xi = \pm \varepsilon$ волокна $j = k = 0$. Начнем сближать силы, одновременно устремляя к бесконечности их величины так, чтобы «дипольный момент» (произведение силы на расстояние) сохранял постоянное значение. Таким образом, исходя из (1.7), получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-Q2\varepsilon}{8\beta E \pi^2} \frac{I_{j,k}(\varepsilon) - I_{j,k}(-\varepsilon)}{2\varepsilon} = M \frac{dI}{d\xi}(0)$$

($I_{j,k}(\xi)$ — двойной интеграл из (1.7)). Постоянную M выберем из условия, чтобы напряжение в волокне $j = k = 0$ равнялось Q . Приходим к решению

$$(2.1) \quad w_{j,k}(\xi) = \frac{-Q \operatorname{sign}(\xi)}{2\beta E} \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-2\beta|\xi| R(s/2, q/2)) \exp(-isj) \exp(-ikq) ds dq}{\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(s/2, q/2) ds dq};$$

$$(2.2) \quad \sigma_{j,k}(\xi) = Q \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-2\beta|\xi| R(s/2, q/2)) \exp(-ijs) \exp(-ikq) \times$$

$$\times R(s/2, q/2) ds dq \left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(s/2, q/2) ds dq. \right.$$

Т а б л и ц а 2

| j | $w_j(0)$ | j | $w_j(0)$ |
|-----|-----------|-----|----------|
| 0 | -0,179442 | 2 | 0,244983 |
| 1 | 0,138862 | 3 | 0,308633 |

Смещения (2.1) при $\xi = 0$ обращаются в нуль везде, за исключением волокна $j = k = 0$, в котором терпят скачок

$$w_{00}(+0) - w_{00}(-0) = -4\pi^2 Q \left(\beta E \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(s/2, q/2) ds dq \right).$$

Те же действия в плоском случае приводят к решению

$$w_j(\xi) = -\frac{Q \operatorname{sign}(\xi)}{8\beta E} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-2\beta|\xi||\sin(s/2)|) \exp(-ijs) ds,$$

$$\sigma_j(\xi) = \frac{Q}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-2\beta|\xi||\sin(s/2)|) \exp(-ijs) |\sin(s/2)| ds.$$

Скачок смещений равен $-\pi Q/2\beta E$. Решение (2.1), (2.2) получено ранее другим способом [3]. На рис. 3 приведены графики изменения напряжений вдоль волокна при различных k, j в пространственном (линии 1—3 отвечают $j = 0; 0; 1$ и $k = 0; 1; 1$) и плоском (линии 1—3 соответствуют $j = 0; 1; 2$) случаях.

3. Рассмотрим несколько специальных распределений разрывов в трехмерном случае. Если в композите имеется несколько разрывов, то для расчета поля напряжений можно воспользоваться принципом суперпозиции. Очевидно, что линейная комбинация полей отдельных разрывов дает напряженное состояние, удовлетворяющее уравнениям равновесия. Коэффициенты линейной комбинации определяются из условия, что напряжения на каждом разрыве равны Q .

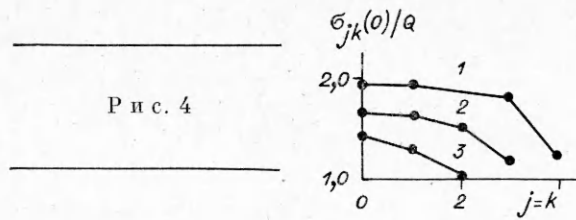
А. Пусть при $\xi = 0$ разрывы волокон образуют прямоугольную сетку с периодами p, l . Так как разрывы находятся в равных условиях, все коэффициенты линейной комбинации равны и бесконечная система превращается в одно уравнение. Благодаря (1.14) интегралы в (2.3) сводятся к конечным суммам. Приводим распределение напряжений в плоскости $\xi = 0$:

$$3.1) \sigma_{j,k}(0) = Q \sum R(\pi k'/l, \pi j'/p) \cos(2\pi k k'/l) \cos(2\pi j j'/p) / \sum R(\pi k'/l, \pi j'/p)$$

(суммирование проводится в пределах $|k'| \leq [l/2]$, $|j'| \leq [p/2]$, квадратные скобки означают целую часть числа). В табл. 3 даны значения $\sigma_{j,k}(0)/Q$ ($j, k = 0, 1, 2$), вычисленные по формуле (3.1). Если волокна нагружены напряжением $-Q$ на бесконечности, а на разрывах напряжения равны нулю, то из чисел табл. 3 следует вычесть единицу. Влияние дефектов друг на друга оказывается незначительным. Максимальная концентрация напряжений наблюдается в волокнах, ближайших к разрыву. При периоде $p = l = 9$ перегрузка практически совпадает с ситуацией уединенного разрыва и составляет 14,7 %.

Т а б л и ц а 3

| $l=p=5$ | | | $l=p=9$ | | | $l=p=41$ | | |
|---------------------|--------|--------|---------|--------|--------|----------|--------|--------|
| $\sigma_{j,k}(0)/Q$ | | | | | | | | |
| 1,000 | -0,153 | -0,023 | 1,000 | -0,147 | -0,015 | 1,000 | -0,146 | -0,014 |
| -0,153 | -0,031 | -0,015 | -0,147 | -0,025 | -0,008 | -0,146 | -0,024 | -0,007 |
| -0,023 | -0,015 | -0,014 | -0,015 | -0,008 | -0,004 | -0,014 | -0,007 | -0,003 |



Р и с. 4

Б. Пусть разрывы волокон лежат в узлах трехмерной сетки с периодами p, l, L (L — период вдоль волокон). Соответствующая плоская задача рассмотрена в [4]. Действуя аналогично случаю А, получим напряжение

$$\frac{\sigma_{j,k}(\xi)}{Q} = \frac{\sum R(\pi k'/l, \pi j'/p) \cos(2\pi k k'/l) \cos(2\pi j j'/p) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-2\beta R(\pi k'/l, \pi j'/p) |nL - \xi|)}{\sum R(\pi k'/l, \pi j'/p) \operatorname{cth}(\beta L R(\pi k'/l, \pi j'/p))}$$

(суммирование по k', j' такое же, как в (3.1)). Результаты расчетов показывают, что появляется эффект экранирования: по сравнению со случаем $L = \infty$ напряжения уменьшаются. Максимальная перегрузка волокон в плоскости $\xi = 0$ равна 12 % при $p = l = L = 5$ и 14 % при $p = l = L = 9$.

В. Если два разрыва расположены в точках $(0,0,0)$ и (l, p, L) , напряжение в точке (k, j, ξ) имеет вид

$$\frac{\sigma_{j,k}(\xi)}{Q} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(s/2, q/2) [\exp(-2\beta|\xi - L|R(s/2, q/2)) \exp(isp) \exp(iql) + \exp(-2\beta|\xi|R(s/2, q/2))] \times}{\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(s/2, q/2) [1 + \exp(-2\beta|L|R(s/2, q/2)) \exp(-isp) \exp(-ilq)] ds dq} \rightarrow$$

$$\rightarrow \times \exp(-i(js + kq)) ds dq.$$

Если оба разрыва лежат в одной плоскости ($L = 0$) рядом друг с другом ($p = 1, l = 0$), то максимальное напряжение достигается в точке $(j, k) = (1, 1)$ и равно 0,2002. Если композит растягивается на бесконечности, то концентрация напряжений в этом случае 1,2002. Наиболее опасно расположение разрывов при $p = 2, l = 0$. В волокне, лежащем между разрывами, концентрация напряжений при растяжении на бесконечности 1,29.

Г. Рассмотрим квадратную трещину, лежащую в плоскости $\xi = 0, -N \leq j, k \leq N$. Композит растянут на бесконечности. Максимальные напряжения достигаются на продолжении осей симметрии квадрата, параллельных сторонам, в точках, ближайших к контуру квадрата. На рис. 4 приведены напряжения в волокнах, непосредственно примыкающих к стороне квадратной трещины для $N = 3, 2, 1$ (линии 1—3). Для наглядности точки, относящиеся к одному случаю, соединены прямыми. Поскольку напряжения симметричны, приведены лишь правые части графиков. Максимальные концентрации напряжений равны 1,98; 1,73; 1,46; 1,15 при $N = 3, 2, 1$ и 0 (единичный разрыв). Соответствующие максимальные безразмерные смещения, умноженные на $\beta E/2Q\pi^2$, следующие: 2,16; 1,57; 0,99; 0,42.

4. Используя фундаментальные решения п. 1, решим задачу о паре сил, образованной двумя сосредоточенными, равными по модулю, но противоположно направленными силами, приложенными к соседним волокнам при $\xi = 0$. Это решение другим способом получено в [1]. Вначале

рассмотрим плоский случай. Пусть в точке $j = 0$, $\xi = 0$ сосредоточена сила, вызывающая в волокне скачок напряжений $2Q$, а в точке $j = 1$, $\xi = 0$ сосредоточена такая же сила противоположного знака. Это вызывает момент сил, действующих против часовой стрелки. Используя (1.12), (1.13), получим смещения и напряжения от действия пары сил:

$$w_j(\xi) = \frac{Q}{\pi\beta E} \int_0^{\pi/2} \sin(2j-1)s \exp(-2\beta|\xi|\sin s) ds,$$

в частности, при $\xi = 0$ $w_j(0) = Q/\pi\beta E(2j-1)$, разность смещений $\delta w_0 = w_1(0) - w_0(0) = 2Q/\pi\beta E$,

$$(4.1) \quad \sigma_j(\xi) = \frac{2Q \operatorname{sign}(\xi)}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin s \sin(1-2j)s \exp(-2\beta|\xi|\sin s) ds.$$

Напряжения (4.1) при $\xi = 0$ равны 0 при всех j , кроме $j = 0, 1$. С помощью (1.7), (1.8) найдем смещения и напряжения в пространственном случае от действия пары сил, приложенных в точках $j = 0$, $k = 0$ и $j = 1$, $k = 0$:

$$w_{j,k}(\xi) = \frac{4Q}{\beta E \pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} [\cos(2kq) \sin s \sin(2j-1)s \exp(-2\beta|\xi| \times \\ \times R(s,q))/R(s,q)] ds dq,$$

$$\sigma_{j,k}(\xi) = \frac{8Q \operatorname{sign}(\xi)}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos(2kq) \sin s \sin(1-2j)s \exp(-2\beta|\xi| R(s,q)) ds dq.$$

Так же как и в плоском случае, напряжения при $\xi = 0$ отличны от нуля лишь в тех волокнах, к которым приложены силы. Смещения при $\xi = 0$ в волокнах, ближайших к паре сил, приведены в табл. 4. При отрицательных значениях индексов смещения продолжаются по симметрии.

5. Система уравнений, описывающая смещения берегов квадратной трещины в композите (п. 3. Г), обладает следующим недостатком: с ростом размеров трещины обусловленность системы ухудшается. Для иллюстрации приведем отношение ν максимального и минимального по модулю собственных чисел матрицы, возникающей при решении задачи о квадратной трещине нормального разрыва, нагруженной постоянным напряжением (п. 3. Г). Результаты для трех- и двумерного случаев приведены в табл. 5, 6. Число обусловленности ν растет, примерно как размер трещины. Это обстоятельство особенно ярко проявляется при решении задачи о бесконечном слое, нагруженном по границам постоянным напряжением. Если рассматривать концы волокон, выходящих на границу, как точки разрыва волокон одинаковой интенсивности в безграничной среде, то, просуммировав напряжения от всех элементарных разрывов, получим в каждой точке слоя нулевое напряжение. Это становится очевидным, если вспомнить, что решение для одиночного разрыва обладает

| Таблица 4 | | | | | Таблица 5 | | Таблица 6 | |
|--------------|---------|--------|--------|--------|-------------------------|-------|-------------------------|-------|
| k | j | | | | Число порванных волокон | ν | Число порванных волокон | ν |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | | | | |
| $w_{j,k}(0)$ | | | | | | | | |
| 0 | -1,0160 | 1,0160 | 0,1724 | 0,0608 | 1×1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | -0,1244 | 0,1244 | 0,0743 | 0,0415 | 3×3 | 2,66 | 3 | 2,8 |
| 2 | -0,0263 | 0,0263 | 0,0294 | 0,0219 | 5×5 | 4,24 | 5 | 4,7 |
| | | | | | 7×7 | 5,8 | 7 | 6,6 |
| | | | | | 9×9 | 7,3 | 50 | 39,2 |

свойством самоуравновешенности. Итак, напряжения на границе слоя равны нулю, а решение соответствующей системы (интенсивности разрывов) отлично от нуля. Таким образом, система уравнений при переходе к бесконечной области стала неопределенной. В [1] фундаментальные решения были использованы для получения системы интегральных и алгебраических уравнений, описывающих напряженное состояние композита, имеющего разрывы волокон и расслоения связующего. При этом границы композита, перпендикулярные волокнам, рассматривались как разрывы волокон в объемлющем бесконечно большом образце. В связи с ухудшением обусловленности системы при росте числа уравнений в рассмотренном примере представляется целесообразным удовлетворять условия в напряжениях на внешних границах, перпендикулярных волокнам, с помощью фундаментального решения о сосредоточенной силе, а условия на внутренних разрывах — с помощью фундаментального решения (2.1), (2.2). Для иллюстрации сказанного снова рассмотрим задачу о равномерно нагруженном слое. Достаточно приложить к концам каждого волокна, выходящим на границы, сосредоточенные силы, обеспечивающие нужное напряжение, чтобы весь слой оказался уравновешенным. В этом случае бесконечная система распадается на отдельные одномерные уравнения и ν оказывается равным 1. Во всех численных расчетах $\beta = \sqrt{2/9}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колпаков А. Г. Концентрация напряжений в конструкции из однонаправленного композита // ПМТФ.— 1982.— № 2.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1963.
3. Hedgepeth J. M., Van Dyke P. Local stress concentration in imperfect filamentary composite materials // J. Composite Mater.— 1967.— V. 3, N 1.
4. Ермак А. А., Михайлов А. М. Теоретическое определение разброса прочности стеклопластика // ПМТФ.— 1980.— № 6.

г. Новосибирск

Поступила 23/IV 1990 г.

УДК 539.3

В. М. Корнев

УТОЧНЕНИЕ ЗАВИСИМОСТЕЙ МЕТОДА СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ КОЛЬСКОГО — ГОПКИНСОНА

Представлены уточненные зависимости метода составного стержня, принимающие во внимание искажение импульса деформации за счет дисперсии. При построении уточненных соотношений используется уравнение Рэлея продольных колебаний стержня [1]. Кроме того, предлагается измерять ускорение на поверхности мерного стержня в одном из сечений, что позволяет: 1) улучшить согласование параметрически заданной функции напряжение — деформация, 2) легко найти скорость деформирования образца, 3) подправить напряжения в образце с учетом инерционной составляющей.

Хорошо разработанный метод составных стержней Кольского — Гопкинсона [2—4] позволяет получать достаточно достоверные одномерные динамические диаграммы напряжение — деформация при значительных скоростях деформирования. Классические зависимости этого метода основываются на одномерной теории распространения упругих волн в стержнях и не учитывают дисперсию волн в реальных стержнях как в трехмерных объектах:

$$(i) \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \sigma = E\varepsilon.$$