

ПЛОСКИЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОГО  
ГАЗА, НАГРЕВАЕМОГО ИЗЛУЧЕНИЕМ

В. М. Кроль

(Москва)

Процессы, происходящие в веществе при воздействии излучения оптических квантовых генераторов, привлекают в последнее время большое внимание исследователей. Среди этих процессов весьма важными являются газодинамические. В самом деле, коэффициент поглощения вещества зависит как от температуры, так и от плотности, поэтому движение вещества, сопровождаемое изменением температуры и плотности, существенным образом меняет прозрачность вещества и его подогрев. Даже в одномерной (плоской) задаче картина движения является весьма сложной, в частности, в парах возникают ударные волны, распространяющиеся от области энерговыведения. Их амплитуда и роль в рассматриваемых процессах меняются с изменением интенсивности падающего потока излучения и начальной плотности вещества.

При высоких температурах паров, значительно превышающих температуру  $T_s$  сублимации вещества, когда внутренняя энергия единицы массы заметно больше теплоты испарения  $Q_s$ , а плотность паров  $\rho$  значительно меньше плотности твердого тела  $\rho_0$ , можно упростить задачу, считая

$$T_s = Q_s = 0, \quad \rho_0 = \infty \quad (v_0 = 1 / \rho_0 = 0) \quad (0.1)$$

Коэффициент поглощения  $k_q$  оптического излучения ионизованных паров в области многократной и полной ионизации обычно может быть описан степенной функцией давления  $p$  и удельного объема  $v$

$$k_q = K_q v^a p^b \quad (0.2)$$

(для полностью ионизованного газа  $\alpha = -5/2$ ,  $b = -3/2$ ).

В работах [1-3] рассмотрены процессы нагрева излучением нетеплопроводного идеального газа и его движения в предположениях (0.1) и (0.2). Подогрев газа, граничащего с вакуумом, приводит к повышению давления  $p$  и вызывает его разлет. Уменьшение коэффициента поглощения  $k_q$  при уменьшении плотности  $\rho$  и повышении температуры  $T$  приводит к проникновению излучения в более глубокие слои вещества. Задача о нагреве и движении бесконечно плотного и абсолютно холодного газа является автомодельной. В работе [3] она была рассмотрена приближенно. В данной работе проводится подробный анализ системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих автомодельное движение (п. 2-5), приводятся результаты численного интегрирования (п. 8): распределение параметров величины максимальной температуры  $T_m$ , достигнутой в процессе нагрева; давления  $p_v$ , созданного на поверхности тела за счет разлета паров; скорости края газа  $u_0$ . Две последние величины наиболее легко могут служить для целей косвенного определения достигнутой температуры.

Как было указано И. В. Немчиновым, волны нагрева и разрежения могут возникать и в случае, когда передний фронт такой волны нагрева паров не совпадает с фронтом волны испарения, т. е. тогда, когда ионизованный слой паров как бы образован заранее — до начала рассматриваемой стадии воздействия. Такая ситуация часто имеет место в условиях лабораторных экспериментов по воздействию ОКГ на поверхность твердого тела, например, когда перед «гигантским импульсом» возникает длительный «фон» непрерывного излучения с менее мощным потоком.

В таких задачах необходимо учитывать движение газа перед фронтом волны нагрева. В данной работе для простоты предполагается, что температура паров и скорость их движения малы по сравнению со значением этих параметров в основном импульсе и что начальная плотность паров одинакова во всех точках. В первой стадии процесса нагрева газа излучением, когда газ практически неподвижен и его плотность не успела измениться, по веществу распространяется волна нагрева [1,2], размер которой (порядка  $1/\rho k_q$ ) увеличивается за счет снижения  $k_q$  при возрастании  $T$ . Нагрев газа приводит к повышению давления и, если газ граничит с вакуумом, то вызывает его разлет. В начале волна разрежения занимает малую часть всей нагретой области, и световой поток  $q$  в ней изменяется мало по сравнению с падающим потоком  $q_0$ .

Наличие волны разрежения практически не сказывается на нагреве почти неподвижного газа перед ее фронтом. Эта стадия рассмотрена в [2]. Когда волна разрежения пройдет расстояния, сравнимые с размером всей нагретой области, то уменьшение коэффициента поглощения  $k_q$  при понижении плотности  $\rho$ , приводящее к проникновению излучения в более глубокие слои вещества, станет существенным и возникнет самосогласованная волна разрежения и нагрева [3].

Реактивная сила, появление которой сопровождается разлетом газа, приводит к возникновению ударной волны, движущейся в глубь вещества. Движение ударной волны в этой задаче, вообще говоря, нарушает ее автомодельность, поэтому относящиеся к стадии образования ударной волны результаты [3] были получены с помощью приближенной разностной схемы. В дальнейшем ударная волна отрывается от области нагрева и можно использовать автомодельное решение [3], полученное без учета ударной волны.

Как показано в настоящей работе, в случае светового потока, изменяющегося во времени степенным образом так, что характерная плотность газа постоянна ( $q \sim t^{1/2}$  для  $a = -5/2, b = -3/2$ ), задача будет автомодельной при постоянной, ограниченной начальной плотности ( $\rho_0 < \infty$ ) нагреваемого вещества с учетом ударной волны. Эта задача подробно рассматривается ниже (п. 6–7).

В данном случае рассматриваемое автомодельное решение описывает процесс нагрева и движения газа с самого начала, поэтому в нем нет последовательной смены стадий, когда в различные моменты времени отдельные процессы несущественны.

При изменении величины потока излучения (или начальной плотности) величина характерной плотности разлетевшегося вещества изменяется. Это позволяет проследить, как при изменении параметров решение переходит из решения с плотностью, близкой к начальной, на предельное с плотностью, много меньшей начальной, как при этом изменяется распределение параметров, амплитуда и положение ударной волны. Полученное решение имеет самостоятельный интерес для определения параметров плазмы, нагреваемой излучением оптического квантового генератора, в начальной стадии импульса, когда поток излучения возрастает.

В рассмотренных выше задачах не учитывалась теплопроводность.

Из работ [4,5] следует, что при достаточно высоких температурах становится существенным влияние электронной теплопроводности. Задача о движении теплопроводного газа с нелинейным коэффициентом теплопроводности без учета подвода тепла излучением рассматривалась в [6–8].

В данной работе рассмотрены также автомодельные движения и при учете обоих факторов.

Из условия автомодельности следует, что коэффициент теплопроводности  $k_f \sim p^2$  ( $p$  — давление) при  $k_q \sim p^{3/2}$ . Эта зависимость  $k_f(p)$  близка к истинной для полностью ионизированной плазмы ( $k_f \sim p^{5/2}$ ). Поэтому полученное решение (п. 7) может быть использовано для приближенного учета влияния теплопроводности.

В связи с формальной общностью рассматриваемых задач, анализ системы (п. 2–5) задач с учетом и без учета теплопроводности проводится совместно.

1. Уравнения движения, неразрывности, энергии и переноса светового и теплового потоков в идеальном газе с постоянным показателем адiabаты  $\gamma$  имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial m}, \quad v \frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p \frac{\partial v}{\partial t} = (1 - \gamma) \frac{\partial (f + q)}{\partial m}$$

$$f = -k_f \frac{\partial (pv)}{\partial m} = -K_f p^c v^d \frac{\partial (pv)}{\partial m}, \quad \frac{\partial q}{\partial m} = -k_q q = -K_q v^a p^b q \quad (1.1)$$

Здесь  $u$  — скорость,  $v$  — удельный объем,  $p$  — давление,  $q$  — световой поток,  $f$  — тепловой поток,  $t$  — время,  $m$  — массовая лагранжева координата,  $k_f$  и  $k_q$  — коэффициенты теплопроводности и поглощения,  $K_f$  и  $K_q$  — численные коэффициенты.

Для полностью ионизированной плазмы показатели степени имеют следующие значения:  $a = -5/2, b = -3/2, c = 5/2, d = 3/2$ .

В начальный момент  $t = 0$  газ, занимающий полупространство  $m \geq 0$ , предполагается холодным и неподвижным

$$u = p = 0, \quad v = v_0 \quad \text{при } t = 0 \quad (1.2)$$

При  $t \geq 0$  на газ падает излучение  $q$ , к его границе подводится тепловой поток  $f$ , газ приводится в движение поршнем, скорость  $u$  которого задана (или известно оказываемое им на газ давление  $p$ ). В соответствии с этим граничные условия задачи определяются тремя функциями

$$q(0, t), \quad f(0, t), \quad u(0, t) \quad (\text{или } p(0, t)) \quad (1.3)$$

Задача (1.1) — (1.3) будет автомодельной при следующих условиях:

$$\begin{aligned} q(0, t) = q_0 t^{-3/k}, \quad u(0, t) = u_0 t^{-1/k} \quad (\text{или } p(0, t) = p_0 t^{-2/k}) \\ f(0, t) = f_0 t^{-3/k}, \quad v(m, 0) = v_0, \quad k = 1 + 2b, \quad c = 1/2 - b \end{aligned} \quad (1.4)$$

В случае  $v_0 = 0$  (предельный случай, описывающий подогрев плотной среды) задача автомодельна в менее жестких, чем (1.4), условиях на световой и тепловой потоки

$$f(0, t) = f_0 t^g, \quad q(0, t) = q_0 t^g \quad (g - \text{любое число}) \quad (1.5)$$

Таким образом, поток тепла на поршне должен быть пропорционален падающему потоку излучения. Это ограничение снимается для случая теплоизолированного поршня ( $f_0 = 0$ ).

Далее (п.п. 1—7) рассматриваются движения в предположении выполнения (1.4). Вводя автомодельные переменные  $V, P, U, Q, F, x$  по формулам

$$\begin{aligned} v(m, t) = v_0 V(x), \quad p(m, t) = t^{-2/k} v_0^{(1-2a)/k} K_q^{-2/k} P(x) \\ u(m, t) = t^{-1/k} v_0^{(1+b-a)/k} K_q^{-1/k} U(x) \\ q(m, t) = t^{-3/k} v_0^{(2-3a+b)/k} K_q^{-3/k} Q(x) \\ f(m, t) = t^{-3/k} v_0^{d+1+(3x-2a+2ab)/k} K_f K_q^{-(1+2c)/k} F(x) \\ x = m t^{-2b/k} K_q^{1/k} v_0^{(a+b)/k} \end{aligned} \quad (1.6)$$

и подставляя их в (1.1), получим систему автомодельных уравнений

$$\begin{aligned} V' = \frac{1}{\delta} \left( \frac{F}{P^c V^d} - \frac{UV}{k} \right), \quad P' = -r^2 x^2 V' + \frac{U}{k} \\ \sigma F' = (\gamma - 1) Q V^a P^b + 2PV/k + rx(VP' + \gamma PV') \\ U' = -rxV', \quad Q' = -QV^a P^b, \quad \delta = P - r^2 x^2 V \\ r = 2b/k, \quad \sigma = (\gamma - 1) K_f K_q v^{a+d+1/2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

При отсутствии теплопроводности ( $k_f = 0$ ) система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} V' = \{ [ (1 - \gamma) Q V^a P^b - 2PV/k ] / rx - UV/k \} / \delta \\ U' = -rxV', \quad P' = -r^2 x^2 V' + U/k \\ Q' = -QV^a P^b, \quad \delta = \gamma P - r^2 x^2 V \end{aligned} \quad (1.8)$$

2. Из начальных и граничных условий (1.2) — (1.3) следует, что число краевых условий (6) на единицу превышает число уравнений (5). Эти краевые условия для (1.7) можно представить в виде

$$\begin{aligned} Q = Q_0, \quad P = P_0 \quad (\text{или } U = U_0), \quad F = F_0 \quad \text{при } x = 0 \quad U = P = 0, \\ V = 1 \quad \text{при } x = \infty \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для уравнений (1.8) исключается условие  $F = F_0$  при  $x = 0$ . Чтобы решить поставленную краевую задачу, требуется ввести некоторый свободный параметр с целью удовлетворения «лишнего» краевого условия. Им может быть, вообще говоря, либо автомодельная координата  $x_2$  сильного разрыва, либо величина скачка  $[\varphi']$  одной из производных в случае непрерывного решения.

Интегрирование уравнений (1.7) можно производить от  $x = 0$  к  $x = x_1$ , отбирая три свободных параметра  $U(0)$  (или  $P(0)$ ),  $V(0)$  и  $x_2$  с тем, чтобы выполнить три последних условия (1.9). Однако такой метод будет слишком трудоемким, так как для получения одного решения требуется отыскание трех неизвестных параметров. Более рациональным представляется интегрирование уравнений от  $x = x_1$  к  $x = 0$ . В этом случае любое из промежуточных решений будет решением исходной задачи с краевыми данными в точке  $x = 0$ , отличными, быть может, от нужных  $P_0$ ,  $Q_0$ ,  $F_0$ . Поиск решения с наперед заданными  $P_0$ ,  $Q_0$ ,  $F_0$  даст при этом решения из целой области этих параметров, и прогонка уравнений приведет, таким образом, к получению полезной дополнительной информации об изучаемом классе движений. При получении численных результатов в предлагаемой работе использовался второй метод.

3. Покажем, что в данной задаче не может быть непрерывных решений. Согласно краевым условиям (2.1), функция  $\delta(x) = P - r^2 x^2 V$  меняет знак на интервале  $(0, \infty)$ . Обозначим точку, в которой  $\delta(x) = 0$ , через  $x_p$ , а все величины в ней снабдим индексом  $p$ . Допустим, что эта точка не будет особой, т. е.

$$kF_p + U_p V_p^{d+1} P_p^c \neq 0 \quad \text{при } r x_p = (P_p / V_p)^{1/2} \quad (3.1)$$

В ее окрестности функции  $V$ ,  $P$ ,  $U$ ,  $Q$ ,  $F$  с точностью до величин более высокого порядка малости представляются в виде

$$\begin{aligned} V &= V_p + v, & P &= P_p - r^2 x^2 v, & U &= U_p - r x_p v \\ Q &= Q_p - Q_p V_p^a P_p^b (x - x_p), & F &= F_p + r x_p (\gamma P_p - r^2 x_p^2 V_p) v \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в первое из уравнений (1.7) и вновь пренебрегая величинами более высокого порядка малости, получим

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{kF_p + U_p V_p^{d+1} P_p^c}{2r^2 x_p^2 P_p^c V_p^d} = A_1 \quad (3.3)$$

Следующие соотношения

$$\left. \frac{dx}{dv} \right|_{x=x_p} = A_1 v \Big|_{x=x_p} = 0, \quad \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_{x=x_p} = A_1 \neq 0 \quad (3.4)$$

означают, что в рассматриваемой точке  $x_p$  переменная  $x$ , как функция  $v$ , имеет экстремум. Иначе говоря, функция  $v(x)$  существует лишь по одну сторону от  $x = x_p$ . Из этого следует, что если внутри интервала  $(0, x_1)$  нет особых точек типа узел, то искомое решение будет разрывным.

Аналогичные рассуждения с несущественными изменениями приводят к доказательству отсутствия непрерывных решений, не проходящих через внутреннюю особую точку интервала  $(0, x_1)$ , и в случае уравнений (1.8) ( $k_f = 0$ ). При этом  $r x_p = (\gamma P_p / V_p)^{1/2}$ .

4. Соотношения на разрыве в точке  $x = x_2$  можно получить непосредственно из автомодельных уравнений (1.7), проинтегрировав их от  $x_2 - \Delta x$  до  $x_2 + \Delta x$  и перейдя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ . После несложных преобразований получаются формулы, аналогичные [6]

$$\begin{aligned} V_2 &= P_1 / r^2 x_2^2, & P_2 &= P_1 V_1 / V_2, & Q_2 &= Q_1 \\ U_2 &= U_1 + r x_2 (V_1 - V_2) \\ F_2 &= F_1 + (\gamma - 1) r^3 x_2^3 (V_2^2 - V_1^2) / 2\sigma \end{aligned} \quad (4.1)$$

Те же выкладки для уравнений (1.8) дают

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 (\gamma - 1) / (\gamma + 1) + 2\gamma P_1 / (\gamma + 1) r^2 x_2^2, \quad Q_2 = Q_1 \\ P_2 &= P_1 + r^2 x_2^2 (V_1 - V_2), \quad U_2 = U_1 + r x_2 (V_1 - V_2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

В (4.1) и (4.2) индексы 1 и 2 относятся к величинам слева и справа от  $x_2$ . Отметим, что в обоих случаях величина  $\delta$  меняет знак при переходе через разрыв

$$\delta_1 = -\delta_2 \quad (4.3)$$

Тем самым обеспечивается скачкообразный переход  $\delta(x)$  из области  $\delta > 0$  при  $x < x_2$  в область  $\delta < 0$  при  $x > x_2$ , диктуемый краевыми условиями (1.9), и удается избежать попадания в точку  $x_p$ , в которой  $\delta = 0$ .

Докажем невозможность существования в искомом решении более чем одного разрыва, если это решение не проходит через точку  $x_p$ . Перепишем для этого соотношения (4.1) и (4.2) для удельных объемов в виде

$$V_2 = V_1 + \delta_1 / r^2 x_2^2 \quad \text{при } k_f \neq 0 \quad (4.4)$$

$$V_2 = V_1 + 2\delta_1 / (\gamma + 1) r^2 x_2^2 \quad \text{при } k_f = 0$$

используя выражение  $\delta_1$  через  $P_1, V_1$

$$\delta_1 = P_1 - r^2 x_2^2 V_1 \quad \text{при } k_f \neq 0 \quad (4.5)$$

$$\delta_1 = \gamma P_1 - r^2 x_2^2 V_1 \quad \text{при } k_f = 0$$

Допустим, что имеются два разрыва в точках  $x = x_2$  и  $x = x_3$ , причем  $x_2 < x_3$ . Согласно (2.1),  $\delta_1(x_2) > 0$ , поэтому в точке  $x_2$  имеем, согласно (4.4), скачок уплотнения  $V_2 > V_1$ . В точку  $x_3$  придем с величиной  $\delta_1(x_3) < 0$  (согласно (4.3)). Поэтому в точке  $x_3$  будем иметь скачок разрежения  $V_2 < V_1$ , который, как известно, не допускается вторым законом термодинамики.

В решениях, проходящих через особую точку  $x_p$ , имеется определенная связь между величинами (обращение в нуль числителя в выражении для  $V'$  из (1.7) и (1.8)) и тем самым ликвидируется один свободный параметр. Если особая точка  $x_p$  не является узлом, то в таких решениях необходимо иметь еще один сильный разрыв. Однако анализ изменения числителя в выражении для  $V'$  из (1.8) в точке  $x_p$  при изменении свободного параметра  $x_1$ , проведенный путем изучения качественного хода интегральных кривых системы (1.8) и полученных численных результатов, указывает на монотонный характер изменения этой величины в области, ограниченной отрицательными значениями. Поэтому предположение о существовании решений, проходящих через особую точку  $x_p$  и удовлетворяющих краевым условиям (1.9), не представляется обоснованным, хотя в нашем распоряжении и нет строгого доказательства этого.

5. Перейдем к исследованию особых точек уравнений (1.7) и (1.8) Согласно п. 4, функция  $\delta(x)$  не обращается в нуль на интервале  $(0, x_1)$ , поэтому особенности могут встретиться лишь на границах этого интервала в точках  $x = 0$  или  $x = x_1$ .

При  $P_0 > 0$  система (1.7) не имеет особенностей в точке  $x = 0$ . Уравнения (1.8) допускают в этой точке соотношение, из которого ясно, что точка  $x = 0$  является особой. Чтобы найти его, запишем неавтономное уравнение энергии из (1.1) для  $m = 0$  (при  $k_f = 0$ )

$$v(0, t) \frac{dP(0, t)}{dt} + \gamma P(0, t) \frac{dv(0, t)}{dt} = (\gamma - 1) K_q v^a(0, t) p^b(0, t) q(0, t) \quad (5.1)$$

и подставим в него вместо  $p, v, q$  их выражения из (1.6), учитывая, что в точке  $m = 0$  соответствует значение  $x = 0$ .

После очевидных сокращений уравнение (5.1) легко интегрируется в результате чего получаем

$$k(\gamma - 1)Q_0 = -2V_0^{1-a}P_0^{1-b} \quad (5.2)$$

Возвращаясь к уравнениям (1.8), убеждаемся в том, что точка  $x = 0$  является особой. Решение в окрестности этой особой точки типа «узел» представляется с точностью до величин более высокого порядка малости в виде

$$V = V_0 + \frac{2P_0^{1+b}V_0^{1+a} + U_0V_0(2bk^{-1} - 2k^{-1} - r)}{2P_0(a-1) - 2b\gamma P_0} x + |A|x^{(a-1)/b\gamma} \quad (5.3)$$

$U = U_0 - rx(V - V_0)$ ,  $P = P_0 + U_0x/k$ ,  $Q = Q_0(1 - V_0^a P_0^b x)$  где  $A$  — произвольная постоянная.

При разлете в вакуум ( $P_0 = 0$ ) точка  $x = 0$  всегда является особой точкой типа узел для уравнений (1.7) и (1.8). Решение в окрестности этой особой точки для уравнений (1.8) с точностью до величин более высокого порядка малости имеет вид

$$V = \left[ Ax^{\theta} - \frac{(\gamma - 1)Q_0(U_0/k)^{b-1}x^{b-1}}{r[1 + \gamma(b-1)/(1-a)] + 2/k} \right]^{1/(1-a)}$$

$$U = U_0 + rxV(1-b)/(b-a), \quad P = U_0x/k \quad (5.4)$$

$$Q = Q_0 \left[ 1 - \left( \frac{U_0}{k} \right)^b x^{b+1} V^a \left( \frac{1-a}{b-2a+1} \right) \right] \quad \theta = \left( \frac{2}{k} + r \right) \frac{a-1}{\gamma r}$$

где  $A$  — произвольная постоянная.

При показателе степени  $d < 0$  характер особой точки  $x = 0$  (при  $P_0 = 0$ ) не меняется для системы (1.7) в сравнении с системой (1.8). Случай  $Q_0 = 0$ ,  $d > 0$  рассмотрен в работе [7]. При произвольных величинах  $a, b, c, d$  исследование особой точки  $x = 0$  затруднительно в силу большого числа возможных различных вариантов.

Система (1.8) имеет особенность в конечной точке  $x = x_1$ , в которой  $U = P = Q = 0$ ,  $V = V_1$ . Единственное решение, исходящее из этой точки, представляется в ее окрестности с точностью до величин более высокого порядка малости в виде

$$P = [-bV_1^a (x_1 - x)]^{-1/b} \quad V = V_1 - P/r^2 x_1^2$$

$$U = P/rx_1, \quad Q = xr_1 V_1 P/(\gamma - 1), \quad (x < x_1, b < 0) \quad (5.5)$$

При наличии теплопроводности ( $k_f \neq 0$ ) также можно говорить об особенности в некоторой конечной точке  $x = x_1$ , в которой  $U = P = Q = F = 0$ ,  $V = V_1$ . К решению в ее окрестности, также имеющему вид (5.7), следует добавить выражение для теплового потока. При  $b = -3/2$ ,  $a = -5/2$  оно имеет вид

$$F = 3/2 (x_1 - x) \quad (5.6)$$

Однако в отличие от случая  $k_f = 0$ , имея в своем распоряжении лишь два свободных параметра  $x_1$  и  $x_2$  (при интегрировании уравнений от  $x = x_1$  к  $x = 0$ ), нельзя решить исходную задачу (п. 1) для любой совокупности трех заданных при  $x = 0$  величин  $P_0, Q_0, F_0$ .

Для численного решения исходной задачи удобно воспользоваться тем фактом, что в зависимости от соотношения между  $P_0, Q_0, F_0$  существует конечная точка  $x_1$ , такая, что при  $x \geq x_1$   $Q(x) \ll F(x)$  (или  $F(x) \ll Q(x)$ ). Тогда приближенно можно считать в окрестности этой точки  $Q(x) \equiv 0$  (или  $F(x) \equiv 0$ ) и выходить из особой точки  $x_1$  по соответствующим степенным формулам, а в качестве третьего свободного параметра (помимо координаты особой точки  $x_1$  и координаты сильного разрыва  $x_2$ ) взять точку  $x_3$ , в которой  $Q(x_3) = \varepsilon$  (или, соответственно,  $F(x_3) = \varepsilon$ ), где  $\varepsilon \ll F(x_3)$  (или  $\varepsilon \ll Q(x_3)$ ).

6. При достаточно больших световых или тепловых потоках, подводимых к газу, возникают режимы движения, в которых можно пренебречь изменениями удельного объема  $V(x)$  в сравнении с  $V(x_1)$  на интервале  $(x_2, x_1)$  и интервалом  $(0, x_2)$  в сравнении с  $(0, x_1)$ , т. е. считать нагреваемый газ неподвижным на всем интервале  $(0, x_1)$ . В работах [1,2] были получены точные аналитические решения такой задачи в случае поглощения светового потока при нелинейном коэффициенте поглощения. Подобные режимы существуют и при поглощении светового потока теплопроводным газом. Автомодельные уравнения (1.7) при  $V \equiv 1$  имеют вид

$$rxP' = (\gamma - 1)Q' - \frac{2P}{k} - K_f \frac{d}{dx} \left( P^c \frac{dP}{dx} \right), \quad Q' = -P^b Q \quad (6.1)$$

При  $c = -b$  система (6.1) допускает частные решения вида

$$P = P_0 \left( 1 - \frac{x}{x_1} \right)^{-1/b}, \quad Q = Q_0 \left( 1 - \frac{x}{x_1} \right)^{-1/b} \quad (6.2)$$

$$x_1 = -\frac{P_0^{-b}}{b}, \quad Q_0 = \left[ \frac{2P_0}{k} - \frac{K_f P_0^{1-b}}{(bx_1)^2} \right] \frac{bx_1}{\gamma - 1} \quad (6.3)$$

Несмотря на весьма частный вид решений (6.2), они хорошо иллюстрируют общую ситуацию, возникающую при наличии теплопроводности — увеличение необходимого светового потока  $Q_0$  для получения максимальной температуры  $P_0$  (здесь  $V = 1$ ).

В данном случае эту зависимость можно представить в виде

$$Q_0(K_f) = A + BK_f \quad \left( A = -\frac{2P_0^{1-b}}{k(\gamma - 1)}, \quad B = \frac{P_0}{\gamma - 1} \right) \quad (6.4)$$

В случае отсутствия теплопроводности ( $k_f = 0$ ) функции (6.2) будут точными решениями (см., например, [1,2]) исходной автомодельной задачи и дают простую зависимость потока  $Q_0$ , необходимого для получения заданной максимальной температуры  $P_0$

$$Q_0(P_0) = \frac{2P_0^{1-b}}{(1-\gamma)(1+2b)} \quad (6.5)$$

Для полностью ионизованной плазмы ( $b = -3/2$ ,  $\gamma = 5/3$ ) из (6.5) имеем

$$Q_0 = 3/2 P_0^{3/2} \quad (6.6)$$

Такой же результат получился и при проведении численных расчетов в области  $Q_0 > 10$  ( $V(x_1) = 1$ ), что свидетельствует о значительности интервала значений величины  $Q_0$ , в котором с большой степенью точности подогрев газа описывается простыми решениями (6.2) (при  $k_f = 0$ ).

Другим предельным режимом исходной задачи, противоположным вышеописанному, будет случай

$$V_1 \rightarrow 0 \text{ при } Q_0 = \text{const}, P_0 = \text{const}, F_0 = \text{const} \quad (6.7)$$

При этом формулы пересчета (1.6) следует использовать в виде

$$\begin{aligned} q &= q_0 t^{-3/k} Q, & v &= q_0^{k/n} K_q^{3/n} V \\ p &= q_0^{(1-2a)/n} K_q^{-1/n} t^{-2/k} P, & u &= q_0^{(1+b-a)/n} K_q^{1/n} t^{-1/k} U \\ f &= K_f K_q^{3/n} \left( d+1 + \frac{1,5-2a+2ab}{k} \right) - \frac{2c+1}{k} \frac{(d+1)k+1,5-2a+2ab}{n} t^{-3/k} F \\ x &= m t^{-2b/k} q_0^{(a+b)/n} K_q^{2/n}, & n &= 2 - 3a + b \end{aligned} \quad (6.8)$$

При  $V_1 = 0$  существует решение поставленной краевой задачи, которое является аналогом автомодельного решения [3] для случая переменного по времени потока  $q(0, t) \sim t^{-3/k}$

Автомодельные профили этого решения для  $P_0=0.18$ ,  $Q_0=6.65$ ,  $k_f=0$  приведены на фиг. 1. Распространение области повышенного давления до  $x = \infty$  объясняется тем, что массовая скорость звука

$$c_m = (\gamma P / V)^{1/2} \rightarrow \infty \text{ при } V \rightarrow 0$$

В случае  $V_1 \ll 1$  соответствующие автомодельные профили, естественно, мало отличаются от случая  $V_1 = 0$ , но, в силу конечности скорости звука  $c_m$  при  $V > 0$ , давление  $P > 0$  не «проникает» в точку  $x = \infty$ , а обращается в нуль в конечной точке  $x_1$ .

Характерными для предельного перехода (6.7) будут следующие соотношения:

$$x_1 - x_2 \rightarrow 0, \quad x_1 \rightarrow \infty \text{ при } V_1 \rightarrow 0 \quad (6.9)$$

Решение такой автомодельной задачи на интервале  $(x_v, x_1)$  приближенно можно представить в виде

$$P(x) = P_v, \quad V(x) = V_1, \quad U = Q = 0 \\ \text{при } x_v \leq x \leq x_1 \quad (6.10)$$

а из точки  $x_v$  выпустить решение уравнений (1.8) с начальными данными

$$P = P_v, \quad V = V_1, \quad U = Q = \varepsilon \ll 1 \\ \text{при } x = x_v \quad (6.11)$$

Здесь  $P_v$  и  $x_v$  являются двумя свободными параметрами (вместо  $x_1$  и  $x_2$ ), при помощи которых можно удовлетворить два левых краевых условия из (6.7).

Исходя из близости решения с  $V_1 \ll 1$  к предельному режиму с  $V_1 = 0$ , можно дать соотношение между координатой ударной волны  $x_2$  и  $V_1$

$$V_1 = (\gamma + 1) P_m / 2r^2 x^2 \quad (6.12)$$

Здесь  $P_m$  — максимальное давление в предельной задаче с  $V_1 = 0$ .

7. Анализ приведенных выше предельных режимов и результатов расчетов на ЭВМ промежуточных режимов дает возможность сделать заключение о том, что решения поставленной в п. 1 краевой задачи могут быть получены в классе функций с одним разрывом, удовлетворяющим соотношениям на ударной волне.

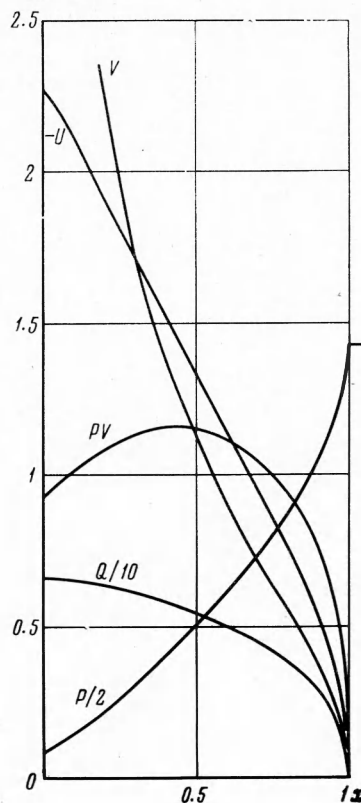
Рассмотрим множество решений задачи (1.8) — (1.9) (без учета теплопроводности) с крайними условиями  $Q_0 = \text{const}$ ,  $P_0 = \text{const}$ ,  $0 \leq V_1 \leq \infty$ . Режимы, близкие к предельным ( $V_1 \ll 1$ ,  $V_1 \gg 1$ ), описаны в п. 6. Автомодельные профили промежуточных режимов ( $0 < V_1 < \infty$ ) имеют одну и ту же структуру — они состоят из двух непрерывных кривых на отрезках  $[0, x_2]$  и  $[x_2, x_1]$ , скачком переходящих одна в другую в точке  $x_2$  по соотношениям (4.2). С увеличением  $V_1$  точка  $x_2$  смещается к  $x = 0$ , амплитуда ударной волны падает, а длина отрезка  $[x_2, x_1]$  растет. При уменьшении  $V_1$  координата  $x_2$  сильного разрыва растет, увеличивается амплитуда ударной волны, длина отрезка  $[x_2, x_1]$  стремится к нулю.

Нетрудно провести аналогию между тепловыми волнами ТВ I и ТВ II из [6], с одной стороны, и режимами, близкими к предельным с  $V_1 = \infty$  и  $V_1 = 0$ , — с другой.

Отличие между ними состоит в том, что в первом случае подогрев газа осуществляется тепловым потоком, а во втором — световым, и, кроме того, во втором случае вместо изотермической скорости звука нужно иметь в виду обычную скорость звука.

На фиг. 2 приведены автомодельные профили одного из промежуточных решений с величинами  $Q_0 = 3.01$ ,  $P_0 = 0.014$ ,  $V_1 = 1$ . При пересчете на значение  $Q_0 = 1$  получим  $P_0 = 0.0062$ ,  $P_{\text{max}} = 0.62$ ,  $(PV)_{\text{max}} = 0.45$ ,  $V_1 = 1.31$ .

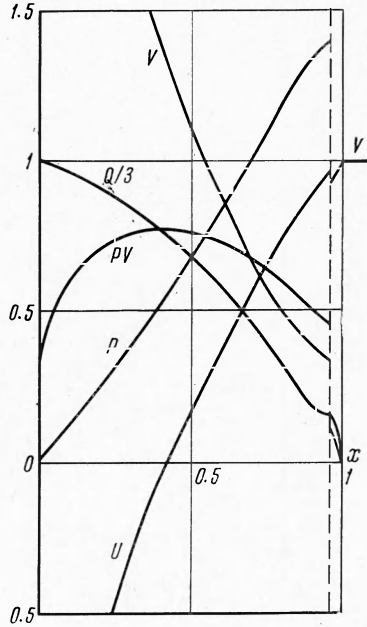
Вторым параметром, наряду с  $V_1$ , определяющим ход интегральных кривых уравнений (1.8), является давление поршня  $P(0) = P_0$ . Увеличение его приводит к смещению сильного разрыва — увеличению его автомодельной координаты  $x_2$ , давления  $P$  и скорости  $U$  на всем интервале  $(0, x_1)$ .



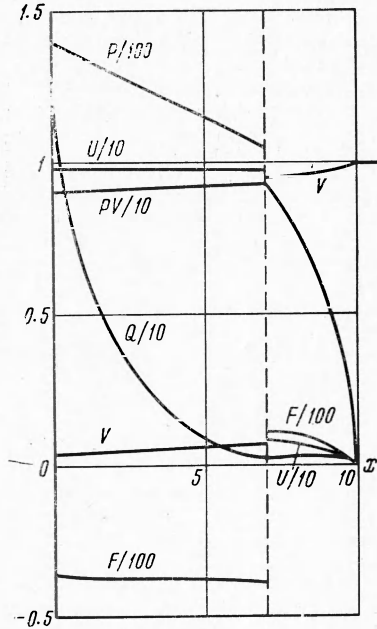
Фиг. 1



В обычной (адиабатической) газовой динамике, как известно, движение за ударной волной не влияет на движение перед ударной волной. Наличие светового потока приводит к передаче возмущений и через ударную волну. Следует, однако, отметить, что, как показали численные расчеты, для любого режима с фиксированным значением  $V_1$  существует граничное значение давления  $P_*$  такое, что изменение давления поршня  $P_0$  в интервале  $(0, P_*)$  практически не влияет на движение за ударной волной. Именно поэтому при численном интегрировании уравнений (1.8) от  $x = x_1$  до  $x = 0$  чрезвычайно трудно выйти на заданное достаточно малое давление  $P_0$ .



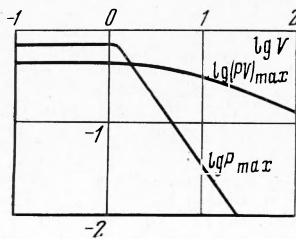
Фиг. 2



Фиг. 3

При наличии теплопроводности, помимо параметров  $Q_0, P_0, V_1$ , ход интегральных кривых уравнений (1.7) определяет подводимый тепловой поток  $F_0$ . Случай  $Q_0 = 0$  рассмотрен в работах [6,7]. Совместное действие потоков  $Q_0$  и  $F_0$  не приводит к серьезным изменениям рассмотренной здесь и в [6,7] качественной картины движения. Наличие теплопроводности приводит к сглаживанию температур, наиболее ярко проявляющемуся в изотермичности ударной волны (см. (4.1)). Один из режимов с совместным действием светового и теплового потоков приведен на фиг. 3 для  $\sigma = 1, Q_0 = 12, V(x_1) = 1, c = 2$  и  $d = -1$ .

Зависимости безразмерных максимальных величин давления  $P_{max}$  и температуры  $(pV)_{max}$  от безразмерного удельного объема  $V_1$  для случая разлета в вакуум ( $P_0 = 0$ ) нетеплопроводного газа ( $k_f = 0$ ) с плазменным коэффициентом поглощения  $k_q$  при  $Q_0 = 1$  изображены в логарифмическом масштабе на фиг. 4. Полученные кривые позволяют определить в любой момент времени  $t$  максимальное давление  $p_{max}(t)$  и «температуру»  $(pV)_{max}(t)$  при заданном световом потоке  $q(0, t) = q_0 t^{3/2}$  и начальном удельном объеме  $v_0$



Фиг. 4

$$\begin{aligned}
 P_{max}(t) &= t q_0^{3/4} K_q^{-1/4} P_{max} \\
 (pV)_{max}(t) &= t q_0^{1/2} K_q^{1/4} (pV)_{max}
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

где  $P_{max}$  и  $(pV)_{max}$  являются функциями параметра

$$V_1 = v_0 q_0^{1/4} K_q^{-3/4}$$

Согласно результатам расчета, представленным на фиг. 1 и пересчитанным для  $Q_0 = 1$ , получим  $P_{\max} \approx 0.69$ ,  $(PV)_{\max} \approx 0.44$  при  $V_1 \ll 1$ ; а при  $V_1 \gg 1$  по формулам (6.6) имеем

$$P_{\max} = (2/3)^{2/3} V_1^{-1/3}, \quad (PV)_{\max} = (2/3)^{2/3} V_1^{-2/3}$$

8. Рассмотрим случай постоянного по времени светового потока  $q(0, t) = q_0$ , падающего на вещество с бесконечной плотностью ( $v(m, 0) = 0$ ). Начальные и граничные условия для системы (1.1) при истечении в вакуум нетеплопроводного газа имеют вид

$$\begin{aligned} u = v = p = 0 \text{ при } t = 0 \\ [q = q_0, \quad p = 0 \text{ при } m = 0, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

При введении автомодельных переменных  $U, V, P, Q, x$  по формулам

$$\begin{aligned} u = t^{-1/c} q_0^{(a-b-1)/c} K_q^{-1/c} U(x) \\ v = t^{-3/c} q_0^{-(2b+1)/c} K_q^{-3/c} V(x) \\ p = t^{1/c} q_0^{(2a-1)/c} K_q^{1/c} P(x) \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$q = q_0 Q(x), \quad x = mt^{(b-3a)/c} q_0^{-(a+b)/c} K_q^{-2/c}$$

где  $c = 3a - b - 2$ . Задача (1.1), (8.1) сводится к следующей системе

$$\begin{aligned} rxU' = Uc^{-1} - P', \quad rxV' = 3V/c + U' \\ rx(VP' + \gamma PV') = (3\gamma - 1)c^{-1}PV - (\gamma - 1)Q' \quad (8.3) \\ Q' = -QV^a P^b, \quad r = (b - 3a)c^{-1} \end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$P(0) = 0, \quad Q(0) = 1, \quad V = Q = U = 0 \text{ при } x = x_1 \quad (8.4)$$

Обе краевые точки  $x = 0$  и  $x = x_1$  являются особыми точками системы (8.3).

В окрестности точки  $x = 0$ , имеющей тип узел, при выполнении неравенства  $a < b < 0$  решение может быть представлено с точностью до величин более высокого порядка малости в виде

$$\begin{aligned} V = \left[ \frac{(\gamma - 1)(1 - a)(xU_0/c)^{b-1}Q_0}{r\gamma(b-1) - [(3\gamma - 1)/c - r](1 - a)} + Ax^\theta \right]^{1/(1-a)} \\ P = \frac{U_0 x}{c}, \quad U = U_0 + \left[ \frac{r(b-1) - 3(1-a)/c}{b-a} \right] xV \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$Q = Q_0 \left[ 1 - \left( \frac{U_0}{c} \right)^b x^{b+1} V^a \left( \frac{1-a}{b+1-2a} \right) \right], \quad \theta = \frac{(1-a)(3\gamma - 1 + 3a - b)}{\gamma(b-3a)}$$

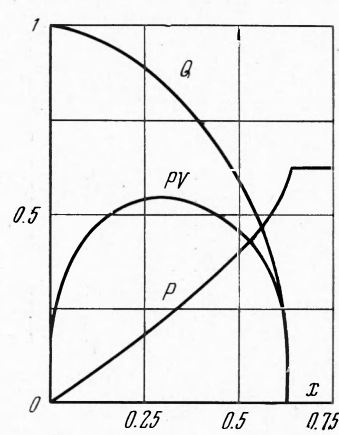
где  $A$  — произвольная постоянная.

В окрестности особой точки  $x = x_1$ , в которой  $U = V = Q = 0, P = P_1$ , при выполнении неравенств  $r < 0, a < 0$  решение может быть представлено с точностью до величин более высокого порядка малости в виде

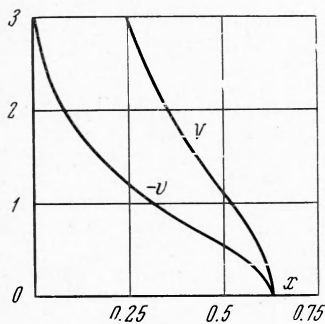
$$\begin{aligned} V = [aP_1^6(x - x_1)]^{-1/a}, \quad P = P_1 - r^2 x_1^2 V \\ U = rx_1 V, \quad Q = \gamma r x_1 P_1 V / (1 - \gamma) \end{aligned} \quad (8.6)$$

Краевая задача (8.3), (8.4) может быть решена путем интегрирования уравнений (8.3) от  $x = 0$  до  $x = x_1$  с использованием разложения (8.5) и отбора свободных параметров  $A, U_0$  так, чтобы выполнить условия  $U_0 = Q = 0$  при  $V = 0$ . Второй метод решения — интегрирование уравнений (8.3) от  $x = x_1$  до  $x = 0$  с выходом из особой точки  $x_1$  по разложению (8.6) и отбором свободного параметра  $P_1$ , так чтобы выполнить условие  $P(0) = 0$ . Он и был использован для получения приводимых здесь результатов расчетов.

На фиг. 5 и 6 изображены автомодельные профили, вычисленные для случая, когда  $a = -5/2, b = -3/2$  при  $\gamma = 5/3$ .



Фиг. 5



Фиг. 6

В табл. 1 приведены координата особой точки  $x_1$  (автомодельная координата «испаренной» массы), давление в ней  $P_1$  (давление «на поверхности твердого тела»), координата  $x_m$ , в которой достигается максимум «температуры»  $PV$  и значения всех переменных в этой точке, а также величина скорости разлета граничных с вакуумом частиц  $U(0)$  для  $a = -5/2$ ,  $b = -3/2$ ,  $\gamma = 5/3$ ,  $\gamma = 7/5$ , и  $\gamma = 6/5$ .

В табл. 2 приведены те же величины для  $a = -3/2$ ,  $b = -1/2$ . (значения, типичные для области многократной ионизации [2]).

Таблица 1

$\gamma$	$5/3$	$7/5$	$6/5$
$x_1$	0.630	0.543	0.425
$P_1$	0.637	0.517	0.367
$U(0)$	-3.38	-2.94	-1.40
$x_m$	0.286	0.249	0.107
$(PV)_m$	0.542	0.488	0.423
$P_m$	0.209	0.175	0.098
$V_m$	2.59	2.79	4.29
$Q_m$	0.849	0.859	0.972
$U_m$	-1.10	-1.02	-1.13

Таблица 2

$\gamma$	$5/3$	$7/5$	$6/5$
$x_1$	0.907	0.817	0.688
$P_1$	0.695	0.574	0.416
$U(0)$	-2.83	-2.41	-1.85
$x_m$	0.371	0.320	0.246
$(PV)_m$	0.423	0.364	0.277
$P_m$	0.240	0.193	0.130
$V_m$	1.77	1.89	2.12
$Q_m$	0.831	0.853	0.883
$U_m$	-0.961	-0.909	-0.832

Зависимости максимального давления  $p_m$  и максимальной температуры  $(pv)_m$  от времени  $t$ , численного коэффициента  $K_q$  и величины падающего потока  $q_0$  при подогреве излучением бесконечно плотной среды ( $v_0 = 0$ ) с плазменным коэффициентом  $k_p$  и  $\gamma = 5/3$  описываются формулами

$$p_m(t) = 0.637t^{-1/8} q_0^{3/4} K_q^{-1/8} \quad (8.7)$$

$$(pv)_m(t) = 0.542t^{1/4} q_0^{1/2} K_q^{1/4}$$

В заключение автор выражает благодарность И. В. Немчинову за предоставление темы, полезные советы и обсуждения.

Поступила 27 IX 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

- Немчинов И. В. Некоторые нестационарные задачи переноса тепла излучением. ПМТФ, 1960, № 1.
- Немчинов И. В. Разлет подогреваемой массы газа в регулярном режиме. ПМТФ, 1964 № 5.
- Афанасьев Ю. В., Кроль В. М., Крохин О. Н., Немчинов И. В. Газодинамические процессы при нагревании вещества излучением лазера. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
- Басов Н. Г., Крохин О. Н. Условия разогрева плазмы излучением оптического генератора. ЖЭТФ, 1964, т. 46, № 1.
- Dawson J. M. On the production of plasma by giant pulse laserse. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 7.
- Волосевич П. П., Курдюмов С. П., Бусурина Л. Н., Крус В. П. Решение одномерной плоской задачи о движении поршня в идеальном теплопроводном газе. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 1.
- Неуважьев В. Е. Истечение газа в вакуум при степенном законе температуры на границе. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
- Зельдович Я. Б., Компанец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры Сб., посвященный 70-летию акад. А. Ф. Иоффе. М., Изд-во АН СССР, 1950, стр. 61—71.
- Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966, гл. 10, стр. 506—528.