ПМТФ, № 3, 1972

УДК 533.601.15

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ НА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ ОТ ТЕЛА КОНЕЧНОГО ОБЪЕМА

В. Г. Дулов, А. И. Рудаков

(Новосибирск)

Уравнения газовой динамики, преобразованные к независимым переменным давление — две функции тока, упрощаются в предположении, что зона возмущенного движения является узкой и изменения параметров потока малы. В физическом пространстве упрощения такого вида обычно применяются для описания течений типа «коротких волн» [1-3]. Построено общее решение приближенных уравнений в форме, удобной для исследования возмущенного течения на достаточно больших расстояниях от обтекаемого тела пространственной конфигурации. Показано, что существуют плоскости, в каждой из которых движение может быть описано квазидвумерно соотношениями для течений с осевой симметрией. Изучено влияние кривизны поверхности тока на асимптотическое состояние движения. Проверены предельные переходы к изученным случаям осесимметричных течений [4].

1. Рассмотрим систему уравнений стационарных пространственных течений невязкого и нетеплопроводного газа с произвольными термодинамическими свойствами. Уравнение состояния будем считать заданным в виде зависимости теплосодержания h от давления p и энтропии s. Уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно, если вектор плотности потока массы представлен в виде векторного произведения градиентов двух скалярных функций ψ и φ

$$\rho \mathbf{v} = \nabla\psi \times \nabla\varphi \tag{1.1}$$

Функции ψ и φ являются пространственными аналогами функций тока двумерных течений, они сохраняют постоянные значения на линиях тока

$$(\nabla\psi \cdot \mathbf{v}) = 0, \quad (\nabla\varphi \cdot \mathbf{v}) = 0$$

произведение их дифференциалов дает поток массы в трубке тока.

Будем считать p, ψ, φ независимыми переменными, а искомыми функциями — декартовы координаты x_i. Тогда из уравнений движения, энергии и соотношений (1.1) получим три уравнения в частных производных для функций $x_i\,(p, \psi, \varphi)$ [5]

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{w\partial x_i / \partial p}{\sqrt{(\partial x_k / \partial p)(\partial x_k / \partial p)}}\right] = -\frac{\partial (x_j, x_k)}{\partial (\psi, \varphi)} \tag{1.2}$$

где $w = \sqrt{2(h_m - h)}$, (i, j, k) принадлежат циклической подстановке (1, 2, 3), h_m — энтальпия торможения.

Компоненты вектора скорости находятся из следующих соотношений:

$$v_i = \frac{w\partial x_i / \partial p}{\sqrt{(\partial x_k / \partial p)(\partial x_k / \partial p)}} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.3}$$

Положив $x_3 / x_2 = \operatorname{tg}\varphi$ и считая, что декартовы координаты и все газодинамические величины не зависят от φ, получим из (1.2) уравнения течений с осевой симметрией [6], а при $x_3 = \varphi$ — уравнения плоских течений.

2. На больших расстояниях от тела область возмущенного течения представляет собой сравнительно узкую зону в окрестности некоторой поверхности $x_i = u_i(\psi, \varphi)$. Будем искать функции $x_i(p, \psi, \varphi)$ в виде

$$x_i = u_i(\psi, \varphi) + \xi_i^\circ \xi_i(p, \psi, \varphi) \tag{2.1}$$

где ξ_i° — постоянные, дающие порядки возмущений координат линий тока. Рассматриваются слабые ударные волны, поэтому в качестве поверхности, в окрестности которой ищется решение, возьмем характеристическую поверхность невозмущенного течения, уравнение которой в переменных p, ψ, φ имеет следующий вид:

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial p^2}\right)_\infty = 0, \quad d_i = \frac{\partial(u_j, u_k)}{\partial(\psi, \varphi)} \tag{2.2}$$

где (i, j, k) — циклическая подстановка (1, 2, 3), индексом ∞ отмечены величины, определяемые по параметрам набегающего потока. Вектор скорости набегающего потока направлен вдоль оси x_1, поэтому

$$d_1 = \frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(\psi, \varphi)} = -\left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_\infty$$

Вектор скорости возмущенного течения определяется двумя углами α и β

$$v_1 = w\cos\beta\cos\alpha, \; v_2 = w\cos\beta\sin\alpha, \; v_3 = w\sin\beta \tag{2.3}$$

Возмущения параметров потока малы, поэтому

$$\alpha \ll 1, \; \beta \ll 1, \; \varepsilon = (p - p_\infty) / p_\infty \ll 1$$

Сделаем следующие подстановки:

$$\alpha \to \alpha^\circ\alpha, \; \beta \to \beta^\circ\beta, \; \varepsilon \to \varepsilon^\circ\varepsilon$$

и пусть постоянные α°, β°, ε° дают порядки соответствующих возмущений. Будем считать, что направления осей x_2 и x_3 в потоке равноправны, поэтому положим $\alpha^\circ = \beta^\circ$.

На фронте слабой ударной волны угол разворота потока

$$\vartheta_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)_\infty \frac{p_\infty^2}{w_\infty} \frac{p - p_\infty}{p_\infty}}$$

Отсюда, учитывая, что $\vartheta_1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,\alpha^\circ$ получим

$$\alpha^\circ = \beta^\circ = \varepsilon^\circ \tag{2.4}$$

Разложим (2.3) в ряд по степеням α°, β°, а модуль скорости — в ряд по Δp, Δs учитывая, что приращение энтропии на скачке $\Delta s \sim \Delta p^3$. Подставляя теперь выражения для искомых функций в (1.2), получим

$$\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} p\right)_\infty \varepsilon - w_\infty \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2p_\infty}\right)\right]\varepsilon^\circ + \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial p^3} p^2\right)_\infty \frac{\varepsilon^2}{2} - \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_\infty \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\varepsilon\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)\right]\varepsilon^{\circ 2} =$$
$$= -\left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_\infty - \frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(\psi, \varphi)} - \xi_2^\circ \frac{\partial(\xi_2, u_3)}{\partial(\psi, \varphi)} - \xi_3^\circ \frac{\partial(u_2, \xi_3)}{\partial(\psi, \varphi)} \tag{2.5}$$
$$\frac{w_\infty}{p_\infty}\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon} + \alpha^\circ\left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_\infty \frac{\partial(\varepsilon\alpha)}{\partial\varepsilon} = -\frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(\psi, \varphi)} - \xi_1^\circ \frac{\partial(u_3, \xi_1)}{\partial(\psi, \varphi)} - \xi_2^\circ \frac{\partial(\xi_3, u_1)}{\partial(\psi, \varphi)}$$
$$\frac{w_\infty}{p_\infty}\frac{\partial\beta}{\partial\varepsilon} + \beta^\circ\left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_\infty \frac{\partial(\beta\varepsilon)}{\partial\varepsilon} = -\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\psi, \varphi)} - \xi_1^\circ \frac{\partial(\xi_1, u_2)}{\partial(\psi, \varphi)} - \xi_2^\circ \frac{\partial(u_1, \xi_2)}{\partial(\psi, \varphi)}$$
$$\frac{\alpha^\circ\xi_1^\circ}{\varepsilon^\circ}\alpha\frac{\partial\xi_1}{\partial\varepsilon} = \frac{\xi_2^\circ}{\varepsilon^\circ}\frac{\partial\xi_2}{\partial\varepsilon}, \quad \frac{\beta^\circ\xi_1^\circ}{\varepsilon^\circ}\beta\frac{\partial\xi_1}{\partial\varepsilon} = \frac{\xi_3^\circ}{\varepsilon^\circ}\frac{\partial\xi_3}{\partial\varepsilon}$$

Последние два уравнения представляют собой запись в переменных p, ψ, φ уравнения линии тока

$$\frac{\partial x_1}{v_1}=\frac{\partial x_2}{v_2}=\frac{\partial x_3}{v_3}$$

Отсюда следует:

$$\xi_1{}^\circ=\frac{\xi_2{}^\circ}{\alpha^\circ}=\frac{\xi_3{}^\circ}{\beta^\circ} \tag{2.6}$$

Интегрируя второе и третье уравнения (2.5) с точностью до малых ε° и $\xi_1{}^\circ$, получим

$$\alpha=\frac{p_\infty}{w_\infty}\frac{\partial(\xi_*,u_3)}{\partial(\psi,\varphi)}+\alpha_1(\psi,\varphi),\quad \beta=\frac{p_\infty}{w_\infty}\frac{\partial(u_2,\xi_*)}{\partial(\psi,\varphi)}+\beta_1(\psi,\varphi) \tag{2.7}$$

где

$$\xi_*=u_1\varepsilon-\varepsilon^\circ\left(\frac{\partial w}{\partial p}\frac{p}{w}\right)_\infty\varepsilon^2u_1+\xi_1{}^\circ\int\xi_1 d\varepsilon$$

Для равномерного набегающего потока из сохранения касательной составляющей скорости на скачке следует:

$$\alpha_1(\psi,\ \varphi)\equiv\beta_1(\psi,\ \varphi)\equiv 0$$

Подставляя α и β в первое уравнение (2.5) и используя (2.2) и (2.6), получим $\xi_1{}^\circ=\varepsilon^\circ$ и уравнение для $\xi_1(\varepsilon,\psi,\varphi)$

$$\frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(\psi,\varphi)}\frac{\partial(\xi_1,u_2)}{\partial(\psi,\varphi)}+\frac{\partial(u_1,u_3)}{\partial(\psi,\varphi)}\frac{\partial(\xi_1,u_3)}{\partial(\psi,\varphi)}= \tag{2.8}$$

$$=-\frac{p_\infty}{2}\left(\frac{\partial^3 h}{\partial p^3}\right)_\infty\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\xi_1}{\partial\varepsilon}\left[\frac{\partial(d_3,u_2)}{\partial(\psi,\varphi)}-\frac{\partial(d_2,u_3)}{\partial(\psi,\varphi)}\right]$$

В качестве независимых переменных в задаче удобно использовать переменные u_2, u_3

$$\frac{\partial(u_2,u_3)}{\partial(\psi,\varphi)}=-\left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_\infty\neq 0$$

представляющие собой декартовы координаты точек пересечения линий тока с характеристической поверхностью (2.2). После перехода в (2.7), (2.8) к u_2, u_3 получим систему уравнений для функций $\xi_i(\varepsilon,u_2,u_3)$, причем α и β нужно брать из (2.7), сохраняя члены только первого порядка. Заметим также, что для того, чтобы получить возмущения координаты x_1 с точностью до величин первого порядка, пришлось использовать уравнение состояния с точностью до величин третьего порядка, однако возмущенное течение в этом приближении осталось безвихревым.

3. В плоскости переменных u_2, u_3 перейдем к полярным координатам $u_2=r\cos\theta$, $u_3=r\sin\theta$ и запишем уравнение характеристик (2.2) в этих координатах

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)^2=\frac{w_\infty^3(\partial^2 w/\partial p^2)_\infty}{(\partial h/\partial p)_\infty}=M_\infty{}^2-1 \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) удовлетворится тождественно, если ввести переменную η из соотношений

$$\frac{\partial u_1}{\partial r}=\sqrt{M_\infty{}^2-1}\cos\eta,\quad \frac{\partial u_1}{d\theta}=\sqrt{M_\infty{}^2-1}\,r\sin\eta \tag{3.2}$$

Отсюда следует:

$$r \sin \eta = f(\theta + \eta) \tag{3.3}$$

где $f(\theta + \eta)$ — произвольная функция.

Выберем в качестве независимых переменных r и $\lambda = \theta + \eta$, тогда решение уравнения (3.1) имеет следующий вид:

$$u_1(r, \lambda) = \sqrt{M_\infty^2 - 1}\left[\sqrt{r^2 - f^2(\lambda)} + \int_0^\lambda f(\lambda')\, d\lambda'\right] \tag{3.4}$$

Перепишем в переменных ε, r, λ уравнения для ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\frac{\sqrt{r^2 - f^2(\lambda)}}{r}\frac{\partial \xi_1}{\partial r} - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{r^2 - f^2(\lambda)} - 2f'(\lambda)}\frac{\partial \xi_1}{\partial \varepsilon} = \mu\varepsilon \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial \varepsilon} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)_\infty \frac{p_\infty^2}{w_\infty}}\, \varepsilon \cos\lambda \frac{\partial \xi_1}{\partial \varepsilon}$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial \varepsilon} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)_\infty \frac{p_\infty^2}{w_\infty}}\, \varepsilon \sin\lambda \frac{\partial \xi_1}{\partial \varepsilon}$$

Здесь

$$\mu = -\frac{w_\infty^2 p_\infty (\partial^3 h / \partial p^3)_\infty}{2\sqrt{M_\infty^2 - 1}\,(\partial h/\partial p)_\infty}$$

Для политропного газа

$$\mu = -\frac{(k+1) M_\infty^2}{2k\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)_\infty \frac{p_\infty^2}{w_\infty}} - \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{kM_\infty^2}$$

Система уравнений (3.5) интегрируется, и с учетом (3.4) решение для x_i можно записать в следующем виде:

$$x_1 = X(\gamma, \sigma, \tau) + \sqrt{M_\infty^2 - 1}\left[\int_0^\lambda f(\lambda')\, d\lambda' + f'(\lambda)\right] \tag{3.6}$$

$$x_2 = Y(\gamma, \sigma, \tau)\cos\lambda + f'(\lambda)\cos\lambda + f(\lambda)\sin\lambda$$

$$x_2 \sin\lambda - x_3 \cos\lambda = f(\lambda)$$

$$\gamma = \sqrt{r^2 - f^2(\lambda)} - f'(\lambda), \qquad \sigma = \varepsilon\sqrt{\gamma}$$

$$X(\gamma, \sigma, \tau) = \sqrt{M_\infty^2 - 1}\,\gamma + 2\mu\sigma\sqrt{\gamma} + \tau(\lambda, \sigma)$$

$$Y(\gamma, \sigma, \tau) = \gamma + \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{kM_\infty^2}\left[\mu\sigma^2 + \gamma^{-1/2}\int_0^\sigma \frac{\partial \tau}{\partial \sigma'}\sigma' d\sigma'\right]$$

где $\tau(\lambda, \sigma)$ — произвольная функция.

В решении (3.6) учтено, что при $\varepsilon = 0$ возмущения координат ξ_i равны нулю.

4. Пусть на поверхности тока S_0, заданной уравнением $R = R(x, \vartheta)$ (R, x, ϑ — цилиндрические координаты), известно распределение давления $\varepsilon = \varepsilon_0(x, \vartheta)$. Семейство характеристик системы уравнений (3.5)

$$\varepsilon\left[\sqrt{r^2 - f^2(\lambda)} - f'(\lambda)\right]^{1/2} = \sigma = \text{const} \tag{4.1}$$

включает в себя характеристическую поверхность невозмущенного течения ($\varepsilon = 0$, $\sigma = 0$), представляющую собой огибающую семейства конусов Маха, проходящих через кривую L, на которой

$$\varepsilon_0 (x_l, \vartheta_l) = 0, \quad R_l = R (x_l, \vartheta_l) \tag{4.2}$$

Так как на L имеет место

$$R_l = r, \quad x_l = u_1, \quad \vartheta_l = \theta$$

то из (4.2) можно найти $r = R_l (\theta_l)$ и $u_1 = u_1 (\theta_l)$, причем

$$\frac{dx_l}{d\theta_l} = \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_1}{\partial r}\frac{dR_l}{d\theta_l} \tag{4.3}$$

где

$$\frac{dx_l}{d\theta_l} = -\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \theta_l}\left[\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_l}\right]^{-1}, \qquad \frac{dR_l}{d\theta_l} = \frac{\partial (R, \varepsilon_0)}{\partial (\theta_l, x_l)}\left[\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_l}\right]^{-1}$$

Отсюда, используя (3.2), (3.3), найдем $f(\lambda)$ в параметрическом виде

$$f(\theta_l) = \left\{\frac{dx_l}{d\theta_l}\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} - \frac{dR_l}{d\theta_l}\sqrt{1 + \frac{1}{R_l^2}\left[\left(\frac{dx_l}{d\theta_l}\right)^2 \frac{1}{M_\infty^2 - 1} - \left(\frac{dR_l}{d\theta_l}\right)^2\right]}\right\} \cdot$$

$$\cdot \left[1 + \frac{1}{R_l^2}\left(\frac{dR_l}{d\theta_l}\right)^2\right]^{-1}$$

$$\lambda(\theta_l) = \theta_l + \arcsin\frac{f(\theta_l)}{R_l(\theta_l)} \tag{4.4}$$

В общем решении (3.6) вместо $\tau(\lambda, \sigma)$ удобнее использовать обратную функцию $\sigma(\lambda, \tau)$, которая в отличие от $\tau(\lambda, \sigma)$ будет однозначной функцией своих аргументов в силу пропорциональности давлению. Связь между параметрами r и λ на линии L ($r = R_l [\theta_l(\lambda)]$) сохраняется вдоль линии тока, поэтому на поверхности S_0 выполняется равенство $\gamma = \gamma(\lambda, r(\lambda))$. Учитывая это обстоятельство, для функции $\sigma(\lambda, \tau)$ получим

$$\sigma(\lambda, \tau) = \sqrt{\gamma(\lambda)}\, \varepsilon_0 [x_1(\lambda, \sigma, \tau), \vartheta(\lambda, \sigma, \tau)] \tag{4.5}$$

Если в некоторой области значений τ производная $d\sigma / d\tau > 0$, то возможно пересечение характеристик и возникновение скачка уплотнения. Обозначим параметры двух пересекающихся характеристик τ_1 и τ_2, $\tau_1 < \tau_2$, тогда в точке пересечения $\xi_{i1} = \xi_{i2}$, и отсюда получим соотношения, связывающие параметры потока с двух сторон скачка

$$2\mu [\sigma(\lambda, \tau_1) - \sigma(\lambda, \tau_2)]\sqrt{\gamma} = \tau_2 - \tau_1 \tag{4.6}$$

$$\mu [\sigma^2(\lambda, \tau_1) - \sigma^2(\lambda, \tau_2)]\sqrt{\gamma} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sigma(\lambda, \tau)\, d\tau$$

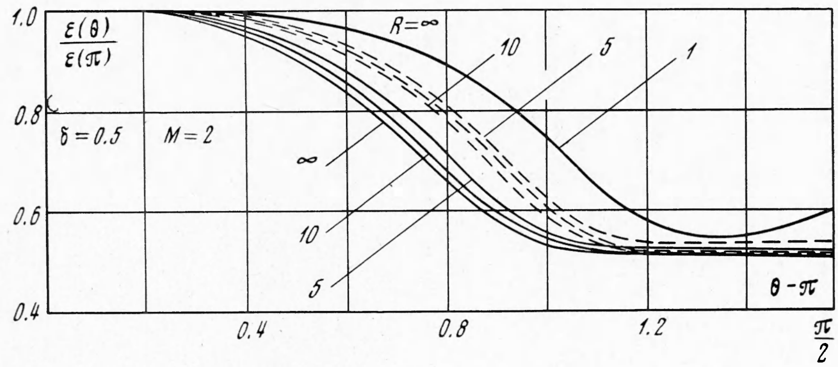
Из соотношений (3.6) и (4.6) можно получить следующую формулу для угла наклона скачка:

$$\operatorname{ctg}\omega = [M_\infty^2 - 1]^{1/2} + {}^1/_2\mu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

с точностью до величин первого порядка, совпадающую с точным выражением для $\operatorname{ctg}\omega$.

5. Приведенное выше решение (3.6) при $f(\lambda) = 0$ переходит в осесимметричное. При этом

$\lambda = \theta$, $\gamma = r$, $\varepsilon\sqrt{r} = \sigma(\tau)$, $x_1 = X(r, \sigma, \tau)$, $x_2 = Y(r, \sigma, \tau)$ и из этого решения могут быть получены результаты работ [4,2]. Общее решение для трехмерного случая (3.6) при постоянном параметре λ зависит от переменных γ и σ точно также (с точностью до постоянных), как осесимметричное решение зависит от r и σ. Поверхности $\lambda = \mathrm{const}$ являются плоскостями, параллельными оси x_1 и пересекающими ось x_3 в точке $-f(\lambda)/\cos\lambda$, угол наклона λ — плоскости к оси x_2 равен λ. Вектор скорости лежит в λ — плоскости $\beta = \alpha \operatorname{tg} \lambda$. Течения в λ — плоскостях независимы и асимметрия давления по λ, созданная на начальной поверхности тока, сохраня-



Фиг. 1

ется при увеличении расстояния. Этот факт есть следствие того, что зона возмущенного течения является относительно узкой, градиенты давления в направлениях, касательных поверхности фронта, малы и в полученном (первом) приближении не учитываются. Ударные волны затухают в каждой λ — плоскости даже при одинаковых начальных возмущениях по-разному, так как параметр γ, играющий роль расстояния, зависит от λ. При увеличении расстояния от оси

$$\lambda - \theta = \arcsin f(\lambda)/r \to 0, \quad \gamma - r \to f'(\lambda) \ll r$$

т. е. геометрические параметры течения стремятся к осесимметричным.

Рассмотрим влияние кривизны начальной поверхности на величину возмущений в λ — плоскости под телом. В силу симметрии на начальной поверхности

$$\frac{dx_l}{d\theta_l} = \frac{dR_l}{d\theta_l} = 0 \quad \text{при } \theta_l = \pi$$

Отсюда

$$\lambda = \pi, \; f(\pi) = 0$$

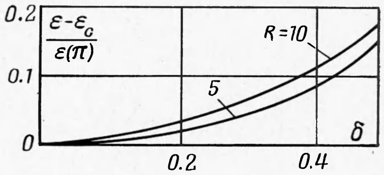
Пусть при $\lambda = \pi$ известно распределение давления $\varepsilon_0(\pi, \tau)$, тогда в плоскости $\lambda = \pi$ давление зависит от расстояния следующим образом:

$$\varepsilon(\pi, r, \tau) = \varepsilon_0(\pi, \tau)\,[R_l(\pi)]^{1/2}\left[r + \left(\frac{r}{R_l(\pi)} - 1\right)\frac{df}{d\theta_l}(\pi)\right]^{-1} \tag{5.1}$$

где

$$\frac{df}{d\theta_l} = \frac{d^2}{d\theta_l^2}\left(\frac{x_l}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} - R_l\right)$$

Отсюда видно, что для уменьшения давления под телом необходимо, чтобы производная $df/d\theta_l$ была положительной и возможно большей. Конфигурация линии L с такой производной возникает, например, на достаточно узком стреловидном крыле. Увеличение угла стреловидности приводит к уменьшению возмущений на всех расстояниях ниже начальной поверхности, так как изменение кривизны линии нулевого давления приводит к изменению функции σ (λ, τ). Из (5.1) следует также, что увеличение кривизны $k = 1 - R_l''/R_l$ линии L в плоскости x_1 = const также вызывает уменьшение давления в плоскости симметрии. Такое увеличение кривизны линии L может быть достигнуто увеличением угла поперечного V-обтекаемого крыла. Эти выводы подтверждаются экспериментальными результатами работы [7], где изучалось влияние формы крыла на звуковой удар под самолетом.



Фиг. 2

Для нахождения полей течения на больших расстояниях от тел сложной трехмерной формы или осесимметричных тел, к которым неприменима линейная теория, можно определять поле давления на расстояниях порядка нескольких длин тела от оси при испытаниях в аэродинамической трубе и затем пересчитывать на большие расстояния. Приведем пример такого пересчета. Пусть имеется начальная поверхность S_0, на которой линия нулевого избыточного давления имеет вид эллипса в плоскости x_1 = const. Будем считать, что в плоскостях θ_l = const давление является линейной функцией отклонения от характеристики $\sigma = 0$ и градиент давления $\Delta < 0$ не зависит от θ_l. Перепад давления на головной ударной волне имеет максимум ε_0 (π) при $\theta_l = 0, \pi$ и уменьшается до ε_0 (π) / 2 при $\theta_l = \pi/2$, $3\pi/2$. На фиг. 1 приведено относительное изменение давления ε (θ) / ε (π) в квадранте (π, 3π / 2) на различных расстояниях от оси (эксцентриситет эллипса $\delta = 0.5$, линейные размеры отнесены к большой полуоси эллипса). Пунктирными линиями обозначены эпюры давления ε_c (θ) / ε (π), найденные без учета отличия λ — плоскостей от меридиональных на начальной поверхности [8]. Существенная разница между $\varepsilon(\theta)$ и $\varepsilon_c(\theta)$ сохраняется при $R \to \infty$. Различие между кривыми при $\theta_l = 3\pi / 2$ объясняется тем, что кривизна линии L при $\theta_l = 3\pi / 2$ больше, чем при $\theta_l = \pi$, и поэтому затухание в плоскости $\theta_l = 3\pi / 2$ сильнее. На фиг. 2 представлена разность ($\varepsilon - \varepsilon_c$) / ε (π) при $\theta = 3\pi / 4$ в зависимости от эксцентриситета эллипса δ. Видно, что с ростом δ эта разность быстро растет.

Поступила 27 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
2. Губкин К. Е. Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
3. Рыжов О. С. Затухание ударных волн в неоднородных средах. ПМТФ, 1961, № 2.
4. Whitham G. B. The flow pattern of a supersonic projectile. Communs. Pure and Appl. Math., 1962, vol. 5, No. 3.
5. Дулов В. Г. Об уравнениях пространственных стационарных течений газа в специальных динамических переменных. Тр. II Междунар. коллоквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем, Новосибирск, 1969; Секция численных методов в газовой динамике, М., ВЦ АН СССР 1969.
6. Дулов В. Г. Об уравнениях стационарных осесимметричных течений газа в переменных «давление — функция тока». ПМТФ, 1964, № 3.
7. Hunton L. W. Current research in sonic boom. Proc. 2-nd Conference on Sonic Boom Research. Washington, Scient. and Techn. Inform. Divis., 1968.
8. Walkden F. The shock pattern of a wing-body combination far from the flight path. Aeron. Quart., 1958, vol. 9, No. 2.