

УДК 541.182:536.24

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗОВЗВЕСИ В ТРУБЕ

А.В. СТАРЧЕНКО, А.М. БУБЕНЧИКОВ, Е.С. БУРЛУЦКИЙ

Томский государственный университет

С использованием моментного подхода и теории взаимодействующих взаимопроникающих континуумов строится математическая модель неизоотермических турбулентных течений газовзвеси в каналах. В рамках континуальной модели движения газодисперсной среды подробно анализируется характер взаимодействия частиц со стенкой канала. Это достигается путем разделения дисперсной фазы монодисперсных твердых частиц на фракции падающих и отраженных частиц. В результате появляется возможность для использования физических граничных условий на стенке канала. Процессы турбулентного переноса описываются с использованием усеченной модели Л.В. Кондратьева, обобщенной на случай присутствия в потоке нескольких фракций частиц. Общая модель процесса тестируется на экспериментальных данных по динамическим характеристикам и теплообмену.

Движение смесей газ — твердые частицы часто происходит в турбулентном режиме, характеризующимся пульсациями основных величин. В работе [1] на основе многочисленных экспериментальных исследований изотермических турбулентных течений газовзвесей в круглых трубах предложена их следующая классификация по значению параметра  $\varphi_u$ :

$$\begin{aligned}\varphi_u &= \varphi_0 \left( \rho_p^0 / \rho_1^0 \right)^{-0,6} (2r_0/d) \operatorname{Re}_D^{-0,4} \operatorname{Re}_b^{0,12} (1+M)^{0,15} + 0,22, \\ \operatorname{Re}_D &= \rho_1^0 U_b 2r_0 / \mu_1; \quad \operatorname{Re}_b = \rho_1^0 v_b d / \mu_1, \\ v_b &= 0,78 \left( \mu_1 / \rho_1^0 \right)^{-1/3} \left( \rho_p^0 / \rho_1^0 \right)^{2/3} d,\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\rho_p^0, \rho_1^0$  — плотность материала частиц и несущей среды,  $r_0, d$  — радиус трубы и диаметр частиц,  $M$  — параметр загрузки потока дисперсной фазой ( $M = G_p/G_1$  — отношение расходов фаз),  $U_b$  — скорость несущей среды на входе в трубу,  $\mu_1$  — динамическая вязкость газа,  $v_b$  — скорость витания,  $\varphi_0 = 14,42 - 22,66$  в зависимости от материала стенки.

Рассмотрим три случая.

1.  $\varphi_u > 1,8$  — диффузионный режим, или режим равновесного течения, при котором частицы чувствительны к турбулентным пульсациям несущей среды и не взаимодействуют со стенками трубы. Распределение концентрации частиц практически равномерно по сечению канала.

2.  $1 \leq \varphi_u \leq 1,8$  — диффузионно-миграционный режим, или режим локально-неравновесного движения, характеризующийся слабым взаимодействием частиц с внутренней поверхностью трубы, в результате которого, тем не м е-

нее, частицы, отражаясь от стенок, приобретают достаточное вращение, чтобы под действием силы Магнуса перемещаться к оси трубы. Локальные скорости скольжения фаз небольшие ( $u_1 - u_2 \approx 0,1u_1$ ). Характерным для данного режима является отсутствие среднего скоростного скольжения и экспоненциальное распределение концентрации частиц с максимумом на оси трубы.

3.  $\varphi_u < 1$  — скачкообразный режим, или режим существенно неравновесного движения, при котором имеет место сильное ударное взаимодействие дисперсной фазы с внутренней поверхностью трубы. Частицы перемещаются в потоке, резко изменяя направление своего движения после удара о стенку, и практически не чувствительны к турбулентным пульсациям газовой фазы. Профиль скорости частиц имеет примерно равномерное распределение, изменение концентрации дисперсной фазы от радиальной координаты описывается экспоненциальной зависимостью.

Таким образом, в соответствии с нынешним представлением о турбулентном движении газозвесей в трубах [1 – 3] математическая модель рассматриваемого процесса, применимая в широких пределах изменения основных параметров потока, должна учитывать наряду с динамическим и тепловым скольжением фаз взаимодействие частиц со стенкой трубы и их вращение.

Обзор литературы по проблемам математического моделирования турбулентных течений и теплообмена в каналах [4 – 6] показывает, что при описании изучаемого явления можно выделить следующие подходы.

а) Смешанное эйлерово-лагранжево представление турбулентного движения газозвесей [7], когда течение и теплообмен несущей среды описываются в рамках эйлерова континуального подхода, а перемещение частиц в потоке моделируется с использованием лагранжева представления, позволяющего отслеживать изменение динамических и тепловых свойств отдельных частиц вдоль их траекторий с учетом обратного влияния дисперсной фазы на несущую среду. Турбулентные пульсации скорости частиц рассчитываются на основе метода стохастического моделирования [8], требующего значительного количества вычислительных реализаций для получения достоверной осредненной картины течения. Вместе с тем такой подход позволяет детально моделировать все особенности взаимодействия частиц с ограничивающими течениями поверхностями.

б) Использование кинетического уравнения для функции плотности вероятности скорости и температуры частиц в турбулентном потоке для получения замкнутых уравнений гидродинамики и теплопереноса дисперсной фазы в эйлеровом представлении [9, 10]. Проблема замыкания уравнений сохранения для осредненных характеристик решается, как правило, путем привлечения транспортных уравнений для вторых одноточечных моментов пульсаций скорости и температуры, что позволяет учитывать анизотропный характер процессов переноса при течении газозвеси в каналах.

в) Применение процедуры осреднения Рейнольдса к основным уравнениям теории взаимодействующих и взаимопроникающих континуумов [11] для получения системы уравнений сохранения массы, количества движения и энергии для осредненных величин, описывающих турбулентное движение и теплообмен газозвеси в каналах [5, 12, 13]. Замыкание этой системы проводится с использованием полуэмпирических моделей, которые вводят в рассмотрение дифференциальные уравнения переноса для турбулентных одноточечных корреляционных моментов.

К настоящему времени при описании двухфазных течений в рамках третьего подхода неплохо зарекомендовала себя математическая модель, предложенная Кондратьевым [13, 14]. Ее применение позволяет достоверно предсказывать распределения гидродинамических и тепловых величин несущей

шей среды и дисперсной фазы при различных режимах неизоэтермического турбулентного течения газозвеси в трубах, а также моделировать эффекты, обусловленные вращением твердых частиц и их взаимодействием со стенками канала.

В данной работе предлагается модификация модели Кондратьева, связанная с некоторыми ее упрощениями в моделировании пульсационных моментов дисперсной фазы и с использованием физических условий взаимодействия частиц со стенкой трубы [5, 12]:

$$\begin{aligned} u_2^{++} &= \frac{5+2a_\tau}{7} u_2^+ + \frac{1-a_\tau}{7} \omega_2^+ d, \\ v_2^{++} &= -a_n v_2^+, \\ \omega_2^{++} &= \frac{5a_\tau+2}{7} \omega_2^+ + \frac{10(1-a_\tau)u_2^+}{7d}, \\ T_2^{++} &= T_2^+ + a_T (T_w - T_2^+), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\omega_2$  — угловая скорость частицы, верхние индексы  $+$  и  $++$  соответствуют значениям параметров до и после удара частиц о стенку,  $T_w$  — температура внутренней поверхности канала,  $T_2$  — температура частицы,  $a_\tau$ ,  $a_n$ ,  $a_T$  — коэффициенты, зависящие от свойств частиц и стенки канала.

Рассмотрим осесимметричное стационарное неизоэтермическое движение газа с монодисперсными твердыми сферическими частицами в трубе. Будем полагать, что плотность материала частиц существенно превосходит плотность несущей среды (газа). Вследствие малого объемного содержания твердой фазы ( $\alpha_2 \ll 1$ ) явления столкновения частиц между собой можно не учитывать. Соударение же частиц со стенкой канала будем моделировать путем разделения дисперсной фазы на фракции падающих и отраженных частиц [11] с учетом межфракционного обмена массой и использованием физических граничных условий на непроницаемой стенке. Полагаем также, что динамическое взаимодействие между газом и дисперсной фазой определяется лишь силой аэродинамического сопротивления и силой Магнуса. Тогда после применения процедуры осреднения Рейнольдса к системе уравнений, определяющих движение взаимодействующих континуумов [11], и использования допущений, характерных для приближения пограничного слоя, можно предложить следующую математическую модель процесса [12, 13]:

Несущая среда — газ

$$\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho_1 v_1)}{\partial r} = 0, \quad (3)$$

$$\rho_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \rho_1 v_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} - \overline{\rho u_1' v_1'} \right) \right] - \sum_{i=2}^3 F_{xi} - \rho_i g_x - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + \rho_1 v_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{\mu_1}{Pr} \frac{\partial T_1}{\partial r} - \overline{\rho v_1' T_1'} \right) \right] + \frac{u_1}{C_1} \frac{\partial p}{\partial x} - \\ &- \frac{1}{C_1} \sum_{i=2}^3 Q_1 + \frac{1}{C_1} \sum_{i=2}^3 [F_{xi}(u_1 - u_i) + F_{ri}(v_1 - v_i)], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\rho_1 = \frac{(1 - \alpha_2 - \alpha_3)p}{R_g T_1}; \quad (7)$$

Дисперсная фаза — частицы ( $i = 2, 3$ )

$$\frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r(\rho_i v_i + \overline{\rho_i' v_i'}) \right] = J_i, \quad (8)$$

$$\rho_i u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + (\rho_i v_i + \overline{\rho_i' v_i'}) \frac{\partial u_i}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_i \overline{u_i' v_i'}) + F_{xi} - \rho_i g_x + J_i(u_3 - u_i), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \rho_i u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + (\rho_i v_i + \overline{\rho_i' v_i'}) \frac{\partial v_i}{\partial r} = & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r(\rho_i \overline{v_i'^2} + \overline{\rho_i' v_i' v_i}) \right] + \frac{\overline{\rho_i w_i'^2}}{r} + \\ & + F_{ri} + J_i(v_3 - v_i), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \rho_i u_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x} + (\rho_i v_i + \overline{\rho_i' v_i'}) \frac{\partial \omega_i}{\partial r} = & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_i \overline{\omega_i' v_i'}) - \\ & - \frac{\rho_i}{\tau_\omega} \left( \omega_i + \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) + J_i(\omega_3 - \omega_i), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \rho_i u_i \frac{\partial T_i}{\partial x} + (\rho_i v_i + \overline{\rho_i' v_i'}) \frac{\partial T_i}{\partial r} = & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_i \overline{v_i' T_i'}) + \frac{Q_i}{C_2} + \\ & + J_i(T_3 - T_i) + \frac{J_i}{2C_2} \left[ (u_3 - u_i)^2 + (v_3 - v_i)^2 \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где  $u, v, p, T$  — компоненты вектора скорости, давление и температура;  $\rho_i = \rho_p^0 \alpha_i$ ,  $\rho_p^0$  — плотность материала частиц;  $\alpha_i$  — объемная доля  $i$ -й фракции частиц;  $i = 2$  соответствует фракции падающих на стенку частиц,  $i = 3$  — фракции отраженных;  $C_1, C_2$  — удельные теплоемкости газа и частиц;  $g_x$  — проекция ускорения свободного падения на ось  $Ox$  (для невертикальных движений допустимо применение модели (3) – (12), если не нарушается осевая симметрия течения [13]);  $\mu_1, Pr$  — динамическая вязкость и молекулярное число Прандтля газа;  $F_{xi}, F_{ri}, Q_i$  — компоненты силы динамического взаимодействия и интенсивность теплообмена между несущей средой и  $i$ -й фракцией частиц;  $\omega_i$  — угловая скорость вращения частиц  $i$ -й фракции;  $J_i$  — массовая скорость перехода частиц из фракции отраженных частиц ( $i = 3$ ) во фракцию падающих ( $i = 2$ );  $\tau_\omega = \rho_p^0 d^2 / 60 \mu_1$ ;  $\overline{u_i' v_i'}$ ,  $\overline{v_i' T_i'}$ ,  $\overline{\rho_i' v_i'}$ ,  $\overline{u_i' v_i'}$ ,  $\overline{v_i'^2}$ ,  $\overline{w_i'^2}$ ,  $\overline{\omega_i' v_i'}$ ,  $\overline{v_i' T_i'}$  — корреляционные моменты, возникающие в уравнениях переноса в результате применения процедуры осреднения Рейнольдса и описывающие турбулентный перенос массы, импульса и энергии фаз и фракций;  $d$  — диаметр частиц.

Как уже отмечалось, интенсивность силового взаимодействия газа и дисперсной фазы определяется силами аэродинамического сопротивления и Магнуса [12, 13]:

$$F_{xi} = \frac{\rho_i f_{Di}(u_1 - u_i)}{\tau_p} - \frac{c_m \rho_1^0 \rho_i}{\rho_p^0} \left[ \overline{\omega_i' v_i'} - (v_1 - v_i) \left( \omega_i + \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) \right], \quad (13)$$

$$F_{ri} = \frac{\rho_i f_{Di} (v_1 - v_i)}{\tau_p} + \frac{c_m \rho_1^0 \rho_i}{\rho_p^0} \left[ \overline{\omega'_i u'_i} - (u_1 - u_i) \left( \omega_i + \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \right], \quad (14)$$

$$\tau_p = \frac{\rho_p^0 d^2}{18 \mu_1}, \tau_{pi} = \frac{\tau_p}{f_{Di}}, f_{Di}(\text{Re}_i) = \begin{cases} 1 + 0,15 \text{Re}_i^{0,687}, & \text{Re} \leq 1000, \\ 0,44 \text{Re}_i / 24, & \text{Re} > 1000, \end{cases}$$

$$\text{Re}_i = \frac{\rho_1^0 \sqrt{(u_1 - u_i)^2 + (v_1 - v_i)^2} d}{\mu_1} \quad (i = 2, 3),$$

$\rho_1^0$  — истинная плотность газа;  $c_m$  — константа.

Межфазный теплообмен осуществляется за счет конвекции и описывается следующей зависимостью:

$$Q_i = \frac{6 \rho_i \lambda_i (T_1 - T_i) \text{Nu}_i}{\rho_p^0 d^2}, \text{Nu}_i = 2,0 + 0,459 \text{Re}_i^{0,55} \text{Pr}^{0,33} \quad (i = 2, 3), \quad (15)$$

где  $\lambda_i$  — коэффициент теплопроводности газа.

Для определения интенсивности обмена массой между фракциями падающих и отраженных частиц используется выражение [11]

$$J_i = (-1)^i \chi_J \frac{\rho_2 \rho_3 \sqrt{(u_2 - u_3)^2 + (v_2 - v_3)^2}}{\rho_p^0 d} \quad (i = 2, 3), \chi_J = 100,0. \quad (16)$$

Турбулентная структура несущей среды моделируется с использованием гипотезы Буссинеска для корреляции  $\overline{u'_1 v'_1}$ , однопараметрической модели турбулентности Васильева — Квона [15, 16], модифицированной на случай присутствия в потоке частиц, а также уравнений переноса для турбулентных моментов  $\overline{v_1'^2}$  и  $\overline{v_1' T_1'}$ :

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 \frac{\partial k}{\partial x} + \rho_1 v_1 \frac{\partial k}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r (\mu_1 + \alpha \mu_{t1}) \frac{\partial k}{\partial r} \right] + \mu_{t1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) - \\ &- \frac{3,93 (\mu_1 + \alpha \mu_{t1}) k}{L^2} - 2k \sum_{i=2}^3 \frac{\rho_i [1 - f(\psi_i)]}{\tau_{pi}}, \\ -\rho_1 \overline{u'_1 v'_1} &= \mu_{t1} \frac{\partial u_1}{\partial r}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{L(r)}{r_0} = 0,37 - 0,24 \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 - 0,13 \left( \frac{r}{r_0} \right)^4, \quad (18)$$

$$\mu_{t1} = 0,2 \rho_1 \sqrt{kL} \left[ 1 - \exp(-\sigma_1 \text{Re}_t^2) + \sigma_3 \sqrt{\text{Re}_t} \exp(-\sigma_2 \text{Re}_t^2) \right], \quad (19)$$

$$\rho_1 u_1 \frac{\partial \overline{v_1'^2}}{\partial x} + \rho_1 v_1 \frac{\partial \overline{v_1'^2}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r (\mu_1 + \alpha \mu_{t1}) \frac{\partial \overline{v_1'^2}}{\partial r} \right] + 0,7 \frac{\rho_1 k^{3/2}}{L} -$$

$$\begin{aligned}
& -1,4 \frac{\overline{\rho_1 v_1'^2} \sqrt{k}}{L} - 140,0 \frac{\overline{\mu_1 v_1'^2}}{L^2} - \frac{2 \overline{\mu_1 v_1'^2}}{r^2} - 2 \overline{\rho_1 v_1'^2} \frac{\partial v_1}{\partial r} - \\
& - 2 \overline{v_1'^2} \sum_{i=2}^3 \frac{\rho_i [1 - f(\psi_i)]}{\tau_{pi}} + 2 \frac{c_m \rho_1^0}{\rho_p^0} \overline{u_1' v_1'} \sum_{i=2}^3 \rho_i \left( \omega_i + \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) [1 - f(\psi_i)], \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_1 u_1 \frac{\partial \overline{v_1' T_1'}}{\partial x} + \rho_1 v_1 \frac{\partial \overline{v_1' T_1'}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \mu_1 + \frac{\mu_1}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial \overline{v_1' T_1'}}{\partial r} \right] - \rho_1 \overline{v_1'^2} \frac{\partial T_1}{\partial r} - \\
& - \frac{\overline{\mu_1 v_1' T_1'}}{r^2} - 1,5 \rho_1 \overline{v_1' T_1'} \frac{\sqrt{k}}{L} - 10,0 \left( \mu_1 + \frac{\mu_1}{\text{Pr}} \right) \frac{\overline{v_1' T_1'}}{\left[ L \left( 1 + \frac{0,871}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) \right]^2} - \\
& - \rho_1 \overline{v_1' T_1'} \frac{\partial v_1}{\partial r} - \overline{v_1' T_1'} \sum_{i=2}^3 \left\{ \frac{\rho_i [1 - f(\psi_i)]}{\tau_{pi}} + \frac{6 \rho_i \lambda_i \text{Nu}_i [1 - f(\theta_i)]}{\rho_p^0 d^2 C_1} \right\}, \quad (21)
\end{aligned}$$

где  $k$  — энергия турбулентности газа,  $\mu_1$  — коэффициент турбулентной вязкости несущей среды,  $L$  — масштаб турбулентности,  $r_0$  — радиус трубы,

$$f(\psi_i) = \exp\left(\psi_i^2 / \pi\right) \text{erfc}(\psi_i / \pi) \psi_i, \quad \psi_i = L / \left( \sqrt{\overline{v_1'^2}} + |u_1 - u_i| \right) \tau_{pi},$$

$$\theta_i = \psi_i \tau_{pi} / \left( \rho_p^0 d^2 C_2 / 6 \lambda_1 \text{Nu}_i \right), \quad i = 2, 3, \quad \text{Re}_i = \rho_1 \sqrt{k} L / \mu_1,$$

$$\alpha = 0,4, \quad \sigma_1 = 2,1 \cdot 10^{-4}, \quad \sigma_2 = 4 \cdot 10^{-4}, \quad \sigma_3 = 0,02.$$

Использование уравнения (21) позволяет не привлекать допущение Бусинеска относительно турбулентного потока тепла, а также обойтись без введения понятия турбулентного аналога числа Прандтля для турбулизованной несущей среды, загруженной твердыми частицами.

Для замыкания системы осредненных уравнений движения дисперсной фазы (8) – (12) использовались следующие представления для моментов второго и третьего порядков, а также некоторые транспортные уравнения для корреляций поля пульсации среды частиц ( $i = 2, 3$ ):

$$-\overline{u_i' v_i'} = -f(\psi_i) \overline{u_1' v_1'} + \frac{\tau_{pi} \overline{v_i'^2}}{2} \frac{\partial u_i}{\partial r}, \quad (22)$$

$$-\overline{\rho_i' v_i'} = D_i \frac{\partial \rho_i}{\partial r}, \quad D_i = \frac{1}{\rho_1} f(\psi_i) \mu_{t1} + \frac{\tau_{pi} \overline{v_i'^2}}{2}, \quad (23)$$

$$-\overline{\omega_i' v_i'} = \frac{\tau_{pi} \tau_\omega \overline{v_i'^2}}{\tau_{pi} + \tau_\omega} \frac{\partial \omega_i}{\partial r}, \quad (24)$$

$$-\overline{\omega_i' u_i'} = \frac{\tau_{pi} \tau_\omega \overline{u_i' v_i'}}{\tau_{pi} + \tau_\omega} \frac{\partial \omega_i}{\partial r}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \rho_i u_i \frac{\partial \overline{v_i'^2}}{\partial x} + (\rho_i v_i + \overline{\rho_i' v_i'}) \frac{\partial \overline{v_i'^2}}{\partial r} = -2\rho_i \overline{v_i'^2} \frac{\partial v_i}{\partial r} + \frac{2\rho_i \overline{v_i' w_i'^2}}{r} + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho_i D_i \frac{\partial \overline{v_i'^2}}{\partial r} \right) + \frac{2\rho_i \left[ f(\psi_i) \overline{v_i'^2} - \overline{v_i'^2} \right]}{\tau_{pi}} - \\ - \frac{2c_m \rho_1^0}{\rho_p^0} \left[ \frac{\rho_i \tau_{pi} \overline{v_i'^2}}{2} \left( \omega_i + \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \frac{\partial u_i}{\partial r} + \rho_i (u_1 - u_i) \overline{\omega_i' v_i'} \right] + 2J_i \left( \overline{v_3'^2} - \overline{v_i'^2} \right), \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_i u_i \frac{\partial \overline{w_i'^2}}{\partial x} + (\rho_i v_i + \overline{\rho_i' v_i'}) \frac{\partial \overline{w_i'^2}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho_i \overline{v_i' w_i'^2} \right) - \\ - \frac{2\rho_i}{r} \left( \overline{v_i' w_i'^2} + \overline{w_i'^2 v_i} \right) + \frac{2\rho_i \left[ f(\psi_i) \overline{w_i'^2} - \overline{w_i'^2} \right]}{\tau_{pi}} + 2J_i \left( \overline{w_3'^2} - \overline{w_i'^2} \right), \quad (27) \end{aligned}$$

$$-\overline{v_i' w_i'^2} = \frac{D_i}{3} \frac{\partial \overline{w_i'^2}}{\partial r}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \rho_i u_i \frac{\partial \overline{v_i' T_i'}}{\partial x} + (\rho_i v_i + \overline{\rho_i' v_i'}) \frac{\partial \overline{v_i' T_i'}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho_i D_i \frac{\partial \overline{v_i' T_i'}}{\partial r} \right) - \\ - \rho_i \overline{v_i'^2} \frac{\partial T_i}{\partial r} - \rho_i \overline{v_i' T_i'} \frac{\partial v_i}{\partial r} + \frac{\rho_i \left[ f(\theta_i) \overline{v_i' T_i'} - \overline{v_i' T_i'} \right]}{\tau_{pi}} + \\ + \frac{6\rho_i \lambda_i Nu_i}{\rho_p^0 d^2 C_2} \left[ f(\psi_i) \overline{v_i' T_i'} - \overline{v_i' T_i'} \right] + 2J_i \left( \overline{v_3' T_3'} - \overline{v_i' T_i'} \right). \quad (29) \end{aligned}$$

Соотношение (22) выражает баланс членов “порождение — диссипация” в соответствующем дифференциальном уравнении переноса корреляции  $\overline{u_i' v_i'}$ . Оно частично учитывает предысторию развития движения дисперсной фазы [5], поскольку  $\overline{v_i'^2}$  определяется транспортным уравнением (26). Соотношение (23) определяет механизм турбулентной диффузии частиц конкретной фракции. Справедливость использования этих допущений при описании процессов турбулентного переноса импульса и массы частиц подтвердили результаты сопоставления расчетных и экспериментальных данных, приведенные в [13].

Необходимость привлечения дифференциального уравнения для  $\overline{w_i'^2}$  обусловлена тем, что решение уравнения (10), позволяющее найти поперечную составляющую скорости частиц, оказывается весьма чувствительным к моделированию члена  $\rho_i \frac{w_i'^2}{r}$  ( $i = 2, 3$ ). В сущности, от точности моделирования этого члена, выражающего собой действие центробежной силы (обусловленной наличием пульсационного движения частиц в окружном направлении), в определяющей степени зависит качество в описании характера распределения концентраций частиц.

Граничные условия для системы уравнений (3) – (12), (17), (20), (21), (26), (27) и (29) задавались следующим образом:  
на оси симметрии при  $r = 0$  ( $i = 2, 3$ )

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial \overline{v_1'^2}}{\partial r} = \overline{v_1' T_1'} = \frac{\partial T_1}{\partial r} = \frac{\partial u_i}{\partial r} = \omega_i = \frac{\partial \overline{v_i'^2}}{\partial r} = \frac{\partial \overline{w_i'^2}}{\partial r} = \overline{v_i' T_i'} = 0,$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial r} = \frac{\partial \rho_i}{\partial r} = v_i = 0; \quad (30)$$

на стенке трубы при  $r = r_0$ :  
для несущей среды

$$u_1 = v_1 = k = \overline{v_1'^2} = \overline{v_1' T_1'} = 0, \quad -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = q_w - C_2 \sum_{i=2}^3 \left[ (\rho_i v_i + \overline{\rho_i' v_i'}) T_i + \rho_i \overline{v_i' T_i'} \right], \quad (31)$$

для фракции падающих ( $i = 2$ ) частиц

$$\frac{\partial u_2}{\partial r} = \frac{\partial \omega_2}{\partial r} = \frac{\partial \overline{v_2'^2}}{\partial r} = \frac{\partial \overline{w_2'^2}}{\partial r} = 0, \quad \overline{\rho_2' v_2'} = \rho_2 \sqrt{\overline{v_2'^2}}, \quad (32)$$

для фракции отраженных ( $i = 3$ ) частиц

$$u_3 = \frac{5 + 2a_\tau}{7} u_2 + \frac{1 - a_\tau}{7} \omega_2 d, \quad \omega_3 = \frac{5a_\tau + 2}{7} \omega_2 + \frac{10(1 - a_\tau)}{7} \frac{u_2}{d},$$

$$v_3 = -a_n v_2, \quad \overline{v_3'^2} = a_n^2 \overline{v_2'^2}, \quad \overline{w_3'^2} = \overline{v_3'^2} / 4, \quad T_3 = T_2 + a_T (T_w - T_2),$$

$$\rho_3 v_3 + \overline{\rho_3' v_3'} = -(\rho_2 v_2 + \overline{\rho_2' v_2'}),$$

$$\overline{v_3' T_3'} = -a_n \overline{v_2' T_2'} + a_T a_n \sqrt{\overline{v_2'^2}} (T_2 - T_w); \quad (33)$$

на входе в трубу при  $x = 0$  задавались однородные профили для всех характеристик в соответствии с рассматриваемыми условиями турбулентного течения и теплообмена газозвеси.

Задача решалась численно на неравномерных сетках, сгущающихся к стенке трубы таким образом, чтобы в вязком подслое находилось не менее 5 – 10 узловых точек сетки. Для радиальных компонент скорости  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и турбулентных тепловых потоков  $\overline{v_i' T_i'}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) газа и частиц используется смещенная сетка, отличающаяся от основной тем, что узлы, в которых рассчитывались значения  $v_i$ ,  $\overline{v_i' T_i'}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), лежат посередине между узлами основной сетки. Дискретные аналоги исходной дифференциальной задачи получались в результате применения метода контрольного объема [17], неявных разностных схем и решались эффективным методом прогонки. Поскольку основные уравнения математической модели нелинейные и взаимосвязанные, на каждом шаге интегрирования по  $x$  организовывались дополнительные глобальные итерации. Предложенный численный алгоритм был протестирован на автомодельных распределениях, относящихся к ламинарному и турбулентному течению однофазной жидкости в круглой трубе. Все представленные в работе расчеты выполнены на сетках, содержащих 40 либо 50 узлов в поперечном направлении. Кроме того, были проведены расчеты методического характера на вложенных по отношению к базовым сеткам (80, 100 узлов по радиальной координате). При этом, например, по напряжению трения на



Рис. 1. Сравнение рассчитанных и измеренных [18] значений скорости газа и частиц при стабилизированном восходящем движении в трубе.

Поясн. см. в тексте.

стенке результаты отличались на величину (0,5 – 1) %. Шаг интегрирования по продольной координате подбирался из соображений, обеспечивающих устойчивость алгоритма и экономичность вычислений, и в методических расчетах также уменьшался в кратное число раз.

Доказательство возможности применения предложенной математической модели для предсказания характеристик турбулентного течения и теплообмена газозвеси в круглой трубе проводилось на основе сравнительного анализа результатов расчетов с экспериментальными данными в широком диапазоне изменения определяющих параметров. На рис. 1 представлены рассчитанные и измеренные [18] значения продольной компоненты скорости газа и частиц  $u_p = (\alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3) / (\alpha_2 + \alpha_3)$  для стабилизированного восходящего движения газо-

звеси в вертикальной трубе ( $Re_D = 24500$ ,  $a$  —  $M = 5$ ,  $Stk = \frac{\tau_p U_b}{r_0} = 146,8$ ,

$Fr = \sqrt{gr_0} / U_b = 0,0087$ ,  $\varphi_u = 0,92$ ,  $b$  —  $M = 1$ ,  $Stk = 146,8$ ,  $\varphi_u = 0,81$ ,  $c$  —  $M = 1$ ,  $Stk = 36,8$ ,  $Fr = 0,024$ ,  $\varphi_u = 1,4$ ). Нормировка профилей  $u_1(r)$  и  $u_p(r)$  осуществлялась по величине скорости соответствующей фазы на оси трубы. Значения коэффициентов восстановления продольной и нормальной компонент скорости частиц при их ударе о стенку, позволяющие получить лучшее согласование расчетов с экспериментальными данными, должны быть следующими:  $a_\tau = 0,95$ ,  $a_n = 0,998$ . По классификации Мульги [1] рассматриваемый случай двухфазного турбулентного течения в трубе относится к режиму неравновесного гетерогенного потока, когда на движение частиц существенное влияние оказывает сила Магнуса, обусловленная их вращением. Однако свойства частиц и стенки таковы, что значения  $a_\tau$  и  $a_n$  мало отличаются от единицы, поэтому происходит практически идеальное взаимодействие дисперсной фазы с внутренней поверхностью трубы, вследствие чего дополнительное после удара частицами дополнительное вращение характеризуется малыми величи-

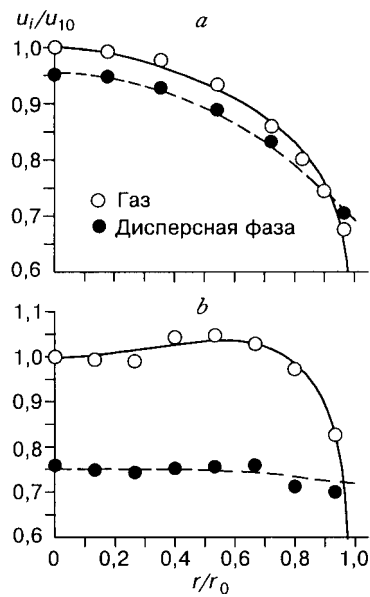
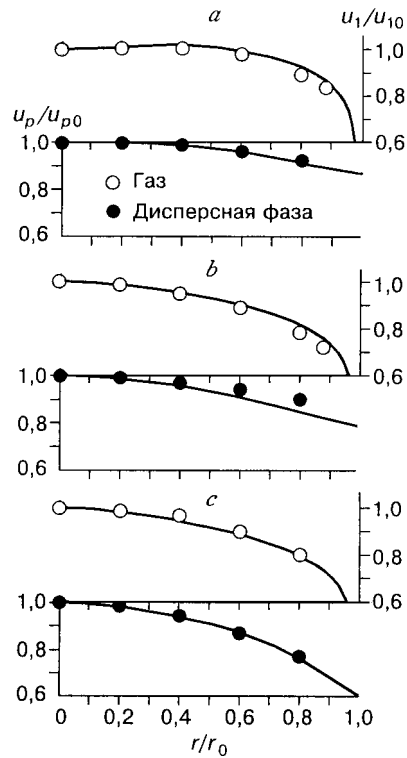


Рис. 2. Сопоставление рассчитанных значений скорости газа и частиц с экспериментальными данными [20] (a) и [21] (b).

Поясн. см. в тексте.



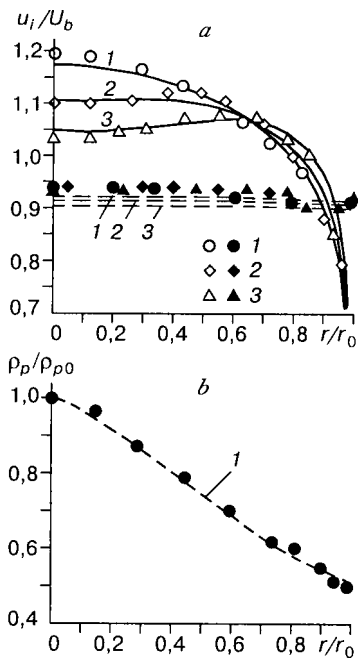


Рис. 3. Рассчитанные и измеренные [22] профили скорости несущей среды и дисперсной фазы (а), а также концентрации частиц (б) при стабилизированном течении газозвеси в горизонтальной трубе.

$Fr = 0,009$ ,  $\varphi_u = 0,58 - 0,68$ ,  $Re_D = 36250$ ,  $Stk = 446,5$ ; 1 - 3 —  
 $M = 1,92$ ; 6,1; 14,4.

нами угловой скорости. Этот факт косвенно подтверждается удовлетворительным согласованием экспериментальных данных [18] с результатами расчетов, выполненных на основе модели, не учитывающей влияния силы Магнуса в общем балансе сил, действующих на частицы [16, 19]. Анализируя приведенные на рис. 1 распределения продольной скорости газа и частиц, можно отметить, что с ростом значений параметра загрузки  $M$  и числа Стокса  $Stk$  профили скоростей фаз становятся более заполненными.

На рис. 2 представлены рассчитанные и измеренные [20, 21] значения продольной компоненты скорости несущей среды и дисперсной фазы на участке стабилизированного течения, отнесенные к величине скорости газа на оси трубы  $u_{10}$ . Условия проведения эксперимента [20] соответствуют следующим значениям определяющих параметров:

$Re_D = 100000$ ;  $M = 0,34$ ;  $Stk = 33,1$ ;  $Fr = 0,01$  (горизонтальная ориентация течения) и по классификации [1] относится к режиму локально неравновесного движения ( $\varphi_u = 1,34$ ), характеризующегося небольшими скоростями скольжения фаз. В ядре потока скорость несущей среды превышает скорость частиц ( $u_1 > u_p$ ), вблизи стенки наблюдается обратная картина ( $u_1 < u_p$ ). Рассчитанные распределения скорости фаз были получены при следующих значениях параметров, определяющих характер взаимодействия частиц со стенками трубы:  $a_\tau = 0,88$ ;  $a_n = 0,992$ . Профили продольных компонент скорости газа и частиц, изображенные на рис. 2, *b*, соответствуют режиму существенно неравновесного турбулентного движения газозвеси в вертикальной трубе [1] ( $\varphi_u = 0,82$ ;  $Re_D = 18000$ ;  $M = 3,6$ ;  $Stk = 470,0$ ;  $Fr = 0,043$ ;  $a_\tau = 0,99$ ;  $a_n = 1,0$ ). В этом случае распределение концентрации частиц ( $\rho_p = \rho_2 + \rho_3$ ) по сечению трубы имеет колоколообразную форму с выраженным максимумом на оси канала. Турбулентная структура дисперсной фазы практически не реагирует на турбулентные пульсации несущей среды ( $\psi_i \ll 1$ ,  $f(\psi_i) \rightarrow 0$ ), а продольная скорость частиц слабо изменяется по радиальной координате. С ростом параметра загрузки  $M$  профиль скорости газа в ядре течения становится более плоским (рис. 3, горизонтальная ориентация ка-

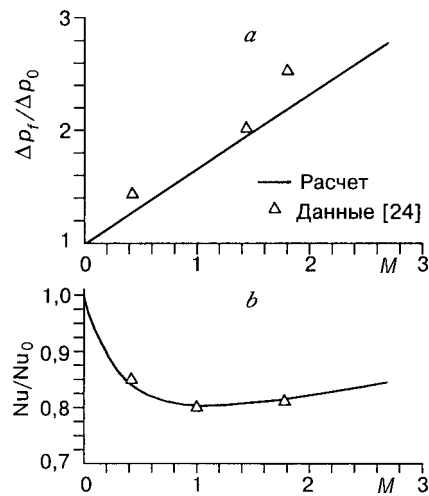


Рис. 4. Влияние концентрации частиц на гидравлическое сопротивление (а) и теплообмен (б) при турбулентном стабилизированном течении газозвеси в вертикальной трубе.

Поясн. см. в тексте.

Рис. 5. Сравнение рассчитанных и измеренных [25] значений числа Нуссельта при различных концентрациях частиц в потоке.

Поясн. см. в тексте.

нала;  $a_\tau = 0,85$ ,  $a_n = 0,92$ ). Последнее связано с различным характером влияния силы аэродинамического сопротивления (линейно зависящей от концентрации частиц) на разных участках поперечного сечения трубы. В приосевой зоне среда частиц имеет высокую плотность и ее воздействие на газовую фазу оказывается более мощным, чем в пристеночной области. Дальнейший рост значений  $M$  приводит к тому, что под воздействием этого же механизма максимум скорости смещается от оси на периферию и распределение  $u_1(r)$  приобретает седловидную форму [1, 13, 22].

Рис. 4 показывает влияние концентрации твердых частиц в потоке на гидравлическое сопротивление и теплообмен при стабилизированном турбулентном течении газозвеси в вертикальной трубе ( $\varphi_u = 0,7 - 0,8$ ,  $Re_D = 20000$ ,  $Pr = 0,7$ ,  $Stk = 296,0$ ,  $\tilde{C} = C_2/C_1 = 1,17$ ,  $Fr = 0,027$ ,  $a_\tau = 0,0$ ,  $a_n = 0,2$ ,  $a_T = 0,0015$ ). Здесь  $\Delta p_0$ ,  $Nu_0$  — перепад давления на фиксированном участке трубы и безразмерный коэффициент теплоотдачи (число Нуссельта) для однофазного потока,  $\Delta p_f$  — перепад давления при движении газозвеси на том же участке, обусловленный трением газа и взаимодействием дисперсной фазы со стенками трубы. Расчетное значение безразмерного коэффициента теплоотдачи определяется следующим выражением:

$$Nu = \frac{q_w 2r_0}{\lambda_1 (T_w - \tilde{T})}, \quad \tilde{T} = \frac{\int_0^{r_0} (\rho_1 u_1 T_1 + \rho_p u_p T_p) r dr}{\int_0^{r_0} (\rho_1 u_1 + \rho_p u_p) r dr},$$

где  $q_w = \text{const}$  — плотность теплового потока, подводимого для нагрева газозвеси,  $T_w(x)$ ,  $\tilde{T}(x)$  — температура стенки и среднерасходная температура смеси в рассматриваемом сечении трубы. Как следует из рисунка, наличие в потоке частиц, интенсивно взаимодействующих со стенками канала, значительно увеличивает гидравлическое сопротивление потока газозвеси, причем влияние параметра загрузки на относительный коэффициент гидравлического сопротивления описывается линейной зависимостью [13, 23]. При невысоких значениях  $M$  ( $M < 5$ ) наблюдается ухудшение теплоотдачи по сравнению с незапыленным потоком (рис. 4, б и рис. 5,  $Re_D = 30000$ ,  $\tilde{C} = 0,75$ ,  $Pr = 0,7$ ,  $Fr = 0,005$ ,  $1 - \varphi_u = 0,75 - 0,86$ ,  $a_\tau = 0,9$ ,  $a_n = 0,99$ ,  $a_T = 0,001$ ,  $Stk = 386,2$ ,  $2 - \varphi_u = 0,42 - 0,53$ ,  $a_\tau = 0,8$ ,  $a_n = 0,99$ ,  $a_T = 0,0038$ ,  $Stk = 1565,1$ ,  $3 - \varphi_u = 0,38 - 0,46$ ,  $a_\tau = 0,05$ ,  $a_n = 0,99$ ,  $a_T = 0,0038$ ,  $Stk = 3001,0$ ). При значениях параметра загрузки  $M > 1 - 2$  имеет место монотонное увеличение интенсивности теплоотдачи с ростом  $M$ . Такой характер

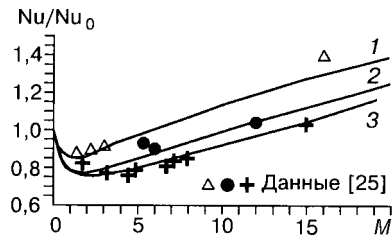
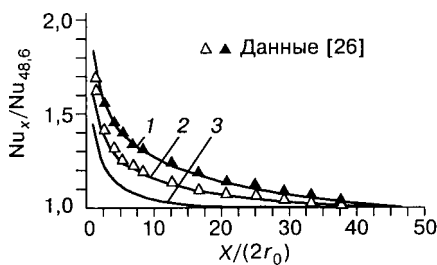


Рис. 6. Влияние концентрации частиц на теплоотдачу газозвеси на термическом начальном участке трубы.

1 - 3 —  $M = 0; 1,14; 3,5$ . Поясн. см. в тексте.

изменения теплоотдачи в зависимости от концентрации частиц в потоке  $\phi$  ксировался в экспериментах [23 – 25].

Влияние концентрации частиц на локальную теплоотдачу газозвеси на термическом начальном участке представляет рис. 6 ( $\varphi_u = 1,65 - 1,79$ ,  $Re_D = 27400$ ,  $Pr = 0,7$ ,  $Stk = 18,5$ ,  $\tilde{C} = 0,8$ ,  $Fr = 0,013$ ,  $a_\tau = 1,0$ ,  $a_n = 1,0$ ,  $a_T = 0,0$ ). Здесь  $Nu_{48,6}$  — значение местного числа Нуссельта  $Nu_x$  при  $x/(2r_0) = 48,6$ . Из рисунка видно, что и результаты расчетов, и экспериментальные данные [26] показывают увеличение длины начального участка с ростом параметра загрузки  $M$ , по крайней мере, до  $M = 3,5$ .

Подытожим исследования следующими в выводами.

Во-первых, систематическими расчетами, обеспечивающими возможность сопоставления с экспериментальными данными, проведена верификация представленной в работе математической модели. Во-вторых, теоретически установлено, что с ростом параметра загрузки потока  $M$  происходит пропорциональное увеличение гидравлического сопротивления и длины термического начального участка, а также как экстенсификация теплоотдачи (при  $0 < M < 1$ ), так и ее интенсификация (при  $M > 1$ ).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Грант № 97-01-00471).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мульги А.С. Основные закономерности процессов переноса в мелкодисперсном трубном течении // Турбулентные двухфазные течения и техника эксперимента. — Таллин, 1985. — С. 161 – 167.
2. Бусройд Р. Течение газа со взвешенными частицами. — М.: Мир, 1975. — 378 с.
3. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. — М.: Мир, 1971. — 533 с.
4. Андреева И.В., Бубенчиков А.М., Старченко А.В. Математическое моделирование турбулентных течений газозвеси в каналах (обзор) // Аэрогазодинамика. — Томск. — 1992. — С. 26 – 37. — (Сб. тр./ НИИПММ при ТГУ).
5. Naumov V.A., Podvysotsky A.M., Shraiber A.A. The theory of two-phase turbulent polydisperse flows in channels // Proc. of the First Int. Symp. on Two-Phase Modeling and Experim. — Vol. 1. — Rome, 1995. — P. 109 – 116.
6. Зайчик Л.И., Першуков В.А. Проблемы моделирования дисперсных турбулентных течений // Материалы III Междунар. Минского форума “Тепломассообмен-ММФ-96”. Т. 5. — Минск, 1996. — С. 123 – 129.
7. Sommerfield M. Modelling of particle-wall collisions in confined gas-particle flow // J. Multiphase Flow. — 1992. — Vol. 18, No. 6. — P. 905 – 926.
8. Мостафа А.А., Монжиа Х.Ц., Макдонелл В.Г., Самуэльсен Г.С. Распространение запыленных струйных течений. Теоретическое и экспериментальное исследование // Аэрокосмическая техника. — 1990. — № 3. — С. 65 – 82.
9. Зайчик Л.И. Модели турбулентного переноса импульса и тепла в дисперсной фазе, основанные на уравнениях для вторых и третьих моментов пульсаций скорости и температуры частиц // Инж.-физ. журн. — 1992. — Т. 63, № 4. — С. 404 – 413.
10. Деревич И.В. Статистическое описание и расчет гидродинамики и массопереноса дисперсных турбулентных потоков в каналах // Материалы III Междунар. Минского форума “Тепломассообмен-ММФ-96”. Т. 5. — Минск, 1996. — С. 134 – 141.
11. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. — М.: Наука, 1987. — 464 с.
12. Шрайбер А.А., Гавин Л.Б., Наумов В.А., Яценко В.П. Турбулентные течения газозвесей. — Киев: Наук. думка, 1987. — 239 с.
13. Кондратьев Л.В., Шор В.В. Исследование турбулентного течения газозвеси в трубе с учетом соударения со стенкой и вращения частиц // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1990. — № 1. — С. 56 – 64.
14. Кондратьев Л.В. Математическое моделирование турбулентного неізотермического течения газозвеси в вертикальной трубе // Моделир. в механике. — 1988. — Т. 2(19), № 6. — С. 55 – 61.
15. Васильев О.Ф., Квон В.И. Неустановившееся турбулентное течение в трубе // Журн. прикл. механики и техн. физики. — 1971. — № 6. — С. 132 – 140.
16. Старченко А.В. Численное исследование неізотермического турбулентного течения газозвеси во входном участке трубы // Тр. III Междунар. Минского форума “Тепломассообмен-ММФ-96”. Т. 5. — Минск, 1996. — С. 64 – 68.
17. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 152 с.

18. Крамер, Денью. Анализ осредненных характеристик течения смесей газ — твердые частицы // Теор. основы инж. расчетов. — 1972. — Т. 94, № 4. — С. 27 – 35.
19. Андреева И.В., Бубенчиков А.М., Старченко А.В. К численному моделированию турбулентного переноса при движении газозвесей в трубах // Моделир. в механике. — 1992. — Т. 6(23), № 1. — С. 10 – 16.
20. Лаатс М.К., Мульги А.С. Экспериментальное исследование кинематической картины мелко-дисперсного трубного течения // Турбулентные двухфазные течения. — Таллин, 1979. — С. 32 – 46.
21. Tsuji Y., Morikawa Y., Shiomi H. LDV measurements of an air-solid two-phase flow in vertical pipe // J. Fluid Mech. — 1984. — Vol. 139. — P. 417 – 434.
22. Мульги А.С. Экспериментальное исследование течения газа с однородными сферическими частицами в трубе // Турбулентные двухфазные течения. — Таллин, 1979. — С. 47 – 59.
23. Сукомел А.С., Цветков Ф.Ф., Керимов Р.В. Теплообмен и гидравлическое сопротивление при движении газозвеси в трубах. — М.: Энергия, 1977. — 192 с.
24. Shimizu A., Hasegawa S., Tanaka H. Flow and heat transfer characteristics of gaseous solid suspension medium within circular riser tubes // JSME Int. J. Ser. II. — 1988. — Vol. 31, No. 3. — P. 451 — 460.
25. Сукомел А.С., Цветков Ф.Ф., Керимов Р.В. Исследование местной теплоотдачи от стенки трубы к турбулентному потоку газа, несущему взвешенные частицы // Теплоэнергетика. — 1967. — № 2. — С. 77 – 80.
26. Depew C.A., Farbar L. Heat transfer to pneumatically conveyed glass particles of fixed size // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Trans. — 1963. — Vol. 85, No. 2. — P. 164 – 172.

*Статья поступила в редакцию 21 мая 1997 г.,  
в доработанном виде — 9 апреля 1998 г.*