ЛИТЕРАТУРА

1. **Деревянко В. А., Славин В. С., Соколов В. С.** МГД-генератор на продуктах газификации бурых углей // ПМТФ.— 1980.— № 5.
2. **Boreham B. W.** Study of travelling conduction wave accelerator // AIAA J.— 1976.— V. 14, N 1.
3. **Кухтецкий С. В., Лебедев А. Д., Любочко В. А.** Некоторые особенности движения сильноточного квазистационарного разряда в магнитном поле // Тезисы докл. IX Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы.— Фрунзе: Илим, 1983.
4. **Кухтецкий С. В., Лебедев А. Д., Любочко В. А.** Движение сильноточного разряда в плотном газе // ТВТ.— 1985.— № 3.
5. **Кухтецкий С. В., Любочко В. А. и др.** Интегральная модель разряда в рельсовом ускорителе с учетом обтекания // ПМТФ.— 1986.— № 1.
6. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1970.
7. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1974.
8. **Райзер Ю. П.** Основы современной физики газоразрядных процессов.— М.: Наука, 1980.
9. **Финкельнбург В., Меккер Г.** Электрические дуги и термическая плазма.— М.: ИЛ, 1961.

Поступила 14/III 1986 г.

УДК 532.51

О ПРИЛОЖЕНИЯХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ К ПОЛУЧЕНИЮ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Владимиров

(Новосибирск)

В работе исследуются свойства интегралов движения идеальной несжимаемой жидкости, полезные с точки зрения приложений к задачам устойчивости. Из интегралов движения построен функционал, для которого заданное установившееся течение жидкости — стационарная точка. В случаях знакоопределенности второй вариации этот функционал может играть роль функции Ляпунова [1, 2] в задаче выявления классов устойчивых течений. Анализ второй вариации позволил сделать вывод о том, что в общем случае знакоопределенности нет, она имеет место только для специальных классов движений, характеризующихся наличием одного из типов симметрии. Общие выражения для второй вариации являются интегралами линеаризованных на данном стационарном течении уравнений движения. Анализируются различные формы этих интегралов, и приведены аналогичные интегралы для течений непрерывно стратифицированной по плотности жидкости, находящейся в поле тяжести. Обсуждается гидродинамический смысл результатов и их связь с вариационным принципом [3, 4]. Работа имеет методический характер.

1. Основные уравнения. Рассматриваются пространственные движения однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в области τ с неподвижной твердой границей $\partial\tau$. Используются обозначения: x_1, x_2, x_3 и t — декартовы координаты и время; $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — нормаль к $\partial\tau$; p и $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — поле давления и скорости. Уравнения движения берутся в форме

$$(1.1)\qquad D\mathbf{u} = -\nabla p, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla.$$

На границе $\partial\tau$ выполняются условия непротекания

$$(1.2)\qquad \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} \equiv u_i n_i = 0.$$

По повторяющимся векторным и тензорным индексам повсюду подразумевается суммирование.

Пусть $a(\mathbf{x}, t)$ есть скалярная функция, значения которой сохраняются в каждой жидкой частице:

$$(1.3)\qquad Da = 0.$$

При помощи поля завихренности $\boldsymbol{\omega}$ вводится еще одна функция

$$(1.4)\qquad \lambda(\mathbf{x}, t) \equiv (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)a,$$

также сохраняющая свои значения в любой жидкой частице:

$$D\lambda = 0. \tag{1.5}$$

В частности, поле a можно рассматривать как одну из лагранжевых координат жидких частиц. Соотношения (1.4), (1.5) при этом приобретают смысл одной из компонент интеграла Коши уравнений Эйлера [5].

Стационарные решения уравнений (1.1)—(1.5) обозначим как

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}(\mathbf{x}),\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}),\ p = P(\mathbf{x}),\ a = A(\mathbf{x}), \tag{1.6}$$
$$\lambda = \Lambda(\mathbf{x}),\ \mathbf{U} = (U_1,\ U_2,\ U_3),\ \boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3).$$

Для функций из (1.6) справедливы вытекающие из (1.1)—(1.5) уравнения и граничные условия:

$$(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U} = -\nabla P,\ \operatorname{div}\mathbf{U} = 0; \tag{1.7}$$

$$(\mathbf{U}\cdot\nabla)A = 0,\ (\mathbf{U}\cdot\nabla)\Lambda = 0; \tag{1.8}$$

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ на } \partial\tau. \tag{1.9}$$

В общем случае начально-краевая задача для (1.1)—(1.5) имеет два интеграла: первый из них — энергия

$$2E = \int\limits_{\tau} u_i u_i d\tau = \text{const},$$

второй определяется с помощью произвольной функции двух переменных $\Phi(a,\ \lambda)$:

$$\int\limits_{\tau} \Phi(a,\ \lambda)\, d\tau = \text{const}.$$

Из этих интегралов составляется сохраняющийся функционал

$$F = \int\limits_{\tau} \left[\frac{1}{2} u_i u_i + \Phi(a,\ \lambda)\right] d\tau. \tag{1.10}$$

Ниже показано, что при подходящем выборе функции Φ установившееся течение (1.6)—(1.9) является стационарной точкой функционала F. На основе выражения для второй вариации изучаются свойства F вблизи этой точки. Даются приложения к теории устойчивости.

2. Стационарные течения. Пусть

$$A(\mathbf{x}) = \text{const}, \qquad \Lambda(\mathbf{x}) = \text{const} \tag{2.1}$$

— два семейства поверхностей тока (1.8). По определению, поверхностью тока называется та, в каждой точке которой скорость лежит в касательной плоскости. Предполагается, что во всей области τ $\nabla A \times \nabla\Lambda \neq 0$ и каждая линия тока течения (1.6) есть пересечение пары поверхностей (2.1). Интеграл Бернулли уравнений (1.7) записывается в форме

$$\frac{1}{2} U^2 + P = H(A,\ \Lambda), \tag{2.2}$$

где $U = |\mathbf{U}|$; H — константа Бернулли, постоянная вдоль каждой линии тока. Из (2.2), (1.7) следует

$$\mathbf{U} \times \boldsymbol{\Omega} = \nabla H = H_A \nabla A + H_\Lambda \nabla\Lambda. \tag{2.3}$$

Индексами A и Λ обозначаются соответствующие частные производные. После векторного умножения (2.3) поочередно на ∇A и $\nabla\Lambda$ можно получить

$$\Lambda\mathbf{U} = H_\Lambda \nabla A \times \nabla\Lambda,\ [(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\Lambda]\mathbf{U} = -H_A \nabla A \times \nabla\Lambda. \tag{2.4}$$

Из (2.4) вытекает

$$(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\Lambda = -H_A \Lambda / H_\Lambda. \tag{2.5}$$

Введение функции $\Psi(A, \Lambda)$ такой, что

$$\Psi_\Lambda = H_\Lambda/\Lambda, \tag{2.6}$$

позволяет любое из равенств (2.4) записать в виде

$$\mathbf{U} = \nabla A \times \nabla \Psi. \tag{2.7}$$

Пара функций $A(\mathbf{x})$ и $\Psi(\mathbf{x})$ образует для данного трехмерного течения (1.6) обобщенную функцию тока (см. [6], с. 62).

3. Условия экстремума. Для первой вариации функционала (1.10), взятой на решении (1.6), справедливо представление

$$\delta F = \int_\tau \left[U_i \delta u_i + \Phi_A \delta a + \Phi_\Lambda \left(\delta\omega_i \frac{\partial A}{\partial x_i} + \Omega_i \frac{\partial \delta a}{\partial x_i} \right) \right] d\tau. \tag{3.1}$$

Интеграл (3.1) с использованием (2.7) преобразуется к форме

$$\delta F = \int_{\partial\tau} \Psi \left(e_{ikm} \frac{\partial A}{\partial x_k} \delta u_i + \Omega_m \delta a \right) n_m dS + \\ + \int_\tau \left[(\Phi_\Lambda - \Psi) \frac{\partial A}{\partial x_i} \delta\omega_i + (\Phi_A - \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Phi_\Lambda) \delta a \right] d\tau. \tag{3.2}$$

Оба выражения в круглых скобках в объемном интеграле обращаются в нуль, если, пользуясь произволом функции Φ, выбрать ее удовлетворяющей уравнению

$$\Phi + H - \Phi_\Lambda \Lambda = 0. \tag{3.3}$$

Действительно, взяв производную от (3.3) по переменной Λ и используя (2.6), получим

$$\Phi_{\Lambda\Lambda} = H_\Lambda/\Lambda = \Psi_\Lambda. \tag{3.4}$$

Интегрирование (3.4) приводит к равенству

$$\Phi_\Lambda = \Psi, \tag{3.5}$$

в котором возникающая при интегрировании произвольная функция аргумента A включена в Ψ. Такое включение возможно в силу определения Ψ (2.6). Привлекая (2.5), также можно показать, что

$$\Phi_A - (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) \Phi_\Lambda = (\Phi + H - \Lambda \Phi_\Lambda)_A = 0. \tag{3.6}$$

Выполнение (3.5), (3.6) означает, что объемный интеграл из (3.2) обращается в нуль.

Далее в качестве граничных условий и ограничений на вариации принимаются условия, достаточные для обращения в нуль поверхностного интеграла в (3.2). Ниже указывается три типа таких условий, в которых используется оставшийся произвол в выборе функций $\Phi(\Lambda, A)$, $A(\mathbf{x})$ и свойства течения (1.6) и его границы $\partial\tau$.

1. Если граница $\partial\tau$ состоит из одной замкнутой поверхности, то функция $\Phi(\Lambda, A)$ выбирается так, что

$$\Psi = \Phi_\Lambda = 0 \text{ на } \partial\tau. \tag{3.7}$$

Возможность такого выбора обусловлена двумя факторами. Во-первых, из принятых определений следует, что на $\partial\tau$ имеет место функциональная зависимость между Λ и A: $\varphi(\Lambda, A) = 0$. Во-вторых, функция $\Phi(\Lambda, A)$, являющаяся решением уравнения (3.3), определена с точностью до слагаемого $\Lambda f(A)$, где $f(A)$ — произвольная функция аргумента A.

2. Функция $A(\mathbf{x})$ выбирается так, что граница $\partial\tau$ оказывается одной из поверхностей $A = \mathrm{const}$. Тогда для обращения (3.2) в нуль уместно принять также $\delta a = 0$ на $\partial\tau$:

$$A = \mathrm{const}, \quad \delta a = 0 \text{ на } \partial\tau. \tag{3.8}$$

Рассмотрение более широкого класса вариаций δa с точки зрения теории устойчивости излишне, поскольку при реальных движениях равенство $a = \text{const}$ на $\partial\tau$ выполняется всегда, если оно было выполнено в начальный момент времени.

3. Пусть линии пересечения поверхностей $A = \text{const}$ и $\partial\tau$ есть замкнутые кривые, циркуляция скорости по каждой из которых обозначается через $\Gamma(A)$. Тогда достаточно выполнения равенств

$$\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}\times\nabla A = \mathbf{f}(A), \quad \delta\Gamma(A) = 0 \text{ на } \partial\tau. \tag{3.9}$$

Здесь функция $\mathbf{f}(A)$ может быть выбрана произвольно. Условия типа (3.9) удобно использовать при формулировке вариационного принципа для двумерных (плоских, осесимметричных и др.) течений, где требование $\delta\Gamma = 0$ сводится к неизменности при варьировании циркуляции скорости по контуру границы [7—9].

Таким образом, если в качестве Φ в (1.10) взять функцию, удовлетворяющую уравнению (3.3), и принять одну из групп граничных условий 1—3 (или их комбинацию), то функционал F достигает на заданном течении (1.6) стационарного значения.

4. Вторая вариация. Для $\delta^2 F$ справедливо представление

$$2\delta^2 F = \int [\delta u_i \delta u_i + \Phi_{AA}(\delta a)^2 + \Phi_{\Lambda\Lambda}(\delta\lambda)^2 + 2\Phi_{A\Lambda}\delta a\delta\lambda + 2\Phi_\Lambda \delta^2\lambda]\, d\tau, \tag{4.1}$$

где $\delta\lambda \equiv \Omega_i \dfrac{\partial \delta a}{\partial x_i} + \delta\omega_i \dfrac{\partial A}{\partial x_i}$; $\delta^2\lambda \equiv \delta\omega_i \dfrac{\partial \delta a}{\partial x_i}$.

Прямыми преобразованиями с использованием (3.3) получим

$$2\delta^2 F = \int\limits_\tau \left[\delta u_i \delta u_i - \frac{2}{\Lambda}\mathbf{U}\times\mathbf{\Omega}\delta\omega\delta a + (H_\Lambda \delta\lambda + H_A \delta a)^2/\Lambda H_\Lambda\right] d\tau + \int\limits_{\partial\tau}\left[\frac{\Phi_A}{\Lambda}\Omega_i \delta a + 2\Phi_\Lambda \delta\omega_i\right]\delta a n_i dS. \tag{4.2}$$

Производные Φ_A и Φ_Λ в (4.2) выражаются через функцию Ψ с использованием (3.5) и (3.6):

$$\Phi_A = (\mathbf{\Omega}\cdot\nabla)\Psi. \tag{4.3}$$

Выражения под интегралами (4.1), (4.2) — квадратичные формы вариаций $\delta\mathbf{u}$ и δa. В случаях знакоопределенности этих форм течение (1.6) будет устойчивым. К сожалению, пропорциональное $\delta\omega\delta a$ слагаемое в объемном интеграле в общем случае исключает такую возможность. Знакоопределенность имеет место только в частных случаях.

5. Плоские течения. Пусть основное течение (1.6) и его возмущения (вариации) плоские, так что все входящие в (4.2) функции не зависят от декартовой координаты x_3. Тогда выбирается

$$A \equiv x_3, \quad \Psi = \Psi(x_1, x_2), \tag{5.1}$$

после чего Ψ приобретает смысл функции тока плоского движения:

$$U_1 = -\partial\Psi/\partial x_2, \quad U_2 = \partial\Psi/\partial x_1, \quad U_3 \equiv 0.$$

Из (5.1) следует $\Lambda = \Omega_3 \equiv \Omega$, а из (4.3), (3.3)

$$\Phi = \Phi(\Omega), \quad H = H(\Omega), \quad \Psi = \Psi(\Omega). \tag{5.2}$$

Поскольку при плоских движениях траектории жидких частиц не выходят из плоскости $x_3 = \text{const}$, в которой, согласно (5.1), также $A = \text{const}$, то можно принять $\delta a \equiv 0$. После этого (4.2) редуцируется к форме

$$2\delta^2 F = \int\left[(\delta u_1)^2 + (\delta u_2)^2 + \frac{\nabla\Psi}{\nabla\Omega}(\delta\omega_3)^2\right] dx_1 dx_2. \tag{5.3}$$

Обозначение $\nabla\Psi/\nabla\Omega$ имеет смысл в силу (5.2). В рассматриваемом случае плоских движений как исходный функционал F (1.10), так и выражение для его второй вариации (5.3) совпадают с полученными ранее [7]. В [8] даны достаточные условия нелинейной устойчивости, связанные со знакоопределенностью формы (5.3).

6. Другие движения с симметриями. Аналогичное (5.3) выражение для (4.2) получается для движений с осевой или винтовой симметриями. Для рассмотрения осесимметричных движений вводятся цилиндрические координаты r, θ, z

$$x_1 = z,\ x_2 = r\cos\theta,\ x_3 = r\sin\theta$$

и выбирается

$$A = \theta,\ \Psi = \Psi(r,\ z). \tag{6.1}$$

Здесь Ψ — функция тока осесимметричного движения: $rU_z = -\partial\Psi/\partial r$, $rU_r = \partial\Psi/\partial z$, $U_\theta \equiv 0$; индексами r, θ, z обозначены соответствующие компоненты скорости. Из (6.1) следует $\Lambda = (\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)A = \Omega/r$, $\Omega \equiv \Omega_\theta$ и условие типа (5.2) дает $\Psi = \Psi(\Omega/r)$. Поскольку при осесимметричных движениях частицы жидкости остаются в плоскостях $\theta = \mathrm{const}$, то аналогично предыдущему можно взять $\delta a \equiv 0$. Вторая вариация (4.2) примет вид

$$2\delta^2F = \int\left[(\delta u_r)^2 + (\delta u_z)^2 + \frac{\nabla\Psi}{\nabla(\Omega/r)}\left(\frac{\delta\omega_\theta}{r}\right)^2\right]drdz. \tag{6.2}$$

Несколько более громоздкое выражение получается для движений с винтовой симметрией, для которых надо принять $A = a\theta + bz$ с постоянными a и b. Условия нелинейной устойчивости, связанные со знакоопределенностью формы (6.2) и аналогичного выражения в случае винтовой симметрии, даны в [9].

7. Вторая вариация — интеграл линейной задачи. Замечательным свойством величины (4.1), (4.2) является ее сохранение в силу линеаризованных уравнений движения. Для формулировки и доказательства этого факта удобно принять следующие обозначения. Пусть $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\omega}$, a, λ — бесконечно малые по амплитуде возмущения течения (1.6), описываемые уравнениями

$$Du_i + \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha}u_\alpha = -\frac{\partial p}{\partial x_i}, \tag{7.1}$$

$$Da + \frac{\partial A}{\partial x_\alpha}u_\alpha = 0,\quad D\lambda + \frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}u_\alpha = 0,$$

$$D\omega_i + \frac{\partial\Omega_i}{\partial x_\alpha}u_\alpha = \Omega_\alpha\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \omega_\alpha\frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha},$$

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + U_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

в которых $\Lambda \equiv \Omega_i\dfrac{\partial A}{\partial x_i}$, $\lambda \equiv \Omega_i\dfrac{\partial a}{\partial x_i} + \omega_i\dfrac{\partial A}{\partial x_i}$, а поля $\mathbf{U}$ и $\mathbf{u}$ удовлетворяют условиям непротекания на $\partial\tau$:

$$U_in_i = u_in_i = 0. \tag{7.2}$$

Далее выписывается выражение

$$2F = \int\limits_\tau\left(u_iu_i + \Phi_{AA}a^2 + \Phi_{\Lambda\Lambda}\lambda^2 + 2\Phi_{A\Lambda}a\lambda + 2\Phi_\Lambda\omega_i\frac{\partial a}{\partial x_i}\right)d\tau, \tag{7.3}$$

получаемое отбрасыванием символов δ в (4.1). Функция $\Phi(A,\ \Lambda)$ в (7.3) по-прежнему удовлетворяет (3.3). Прямыми вычислениями показывается, что производная dF/dt, вычисленная в силу (7.1), (7.2), сводится к интегралу от дивергентной формы, преобразование которого к поверхностному дает

$$2\frac{dF}{dt} = \int\limits_{\partial\tau}\left\{\Psi\left[\left(\Omega_\alpha\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - u_\alpha\frac{\partial\Omega_i}{\partial x_\alpha}\right)a - \omega_iu_\alpha\frac{\partial A}{\partial x_\alpha}\right] - a\Omega_iu_\alpha\frac{\partial\Psi}{\partial x_\alpha}\right\}n_idS.$$

Если на $\partial\tau$ принять условие (3.7) или (3.8), то этот поверхностный интеграл обращается в нуль и имеет место сохранение F (7.3). Для движений с симметрией интегралы линеаризованных уравнений движения получаются из (5.3), (6.2).

8. Интеграл движения в терминах лагранжевых смещений. Существование для (7.1) интеграла типа (7.3) можно было ожидать в силу независимости коэффициентов (7.1) от времени. Интеграл (7.3) играет при этом роль энергии. При такой трактовке неожиданной и искусственной будет зависимость (7.2) от полей скалярных примесей a и λ. Однако оказывается, что роль этих полей фактически состоит в неявном введении лагранжевых переменных.

Лагранжевы смещения жидких частиц наиболее естественно вводятся посредством рассмотрения связей лагранжевых $\mathbf{X}$ и эйлеровых $\mathbf{x}$ координат основного и возмущенного движений. Пусть функция $\mathbf{x}(\mathbf{X},\ t)$ и обратная $\mathbf{X}(\mathbf{x},\ t)$ описывают основное (невозмущенное) движение жидкости. Далее, пусть

$$\mathbf{x}_1(\mathbf{X},\ t) = \mathbf{x}(\mathbf{X},\ t) + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{X},\ t) \tag{8.1}$$

есть возмущенное движение с полем смещений $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X},\ t)$. Последнее с помощью функции $\mathbf{X}(\mathbf{x},\ t)$ выражается в виде $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x},\ t)$. Тем самым поле лагранжевых смещений жидких частиц представляется как функция эйлеровых координат.

Пусть теперь $Q(\mathbf{x},\ t)$ — какая-либо характеристика среды, определенная на возмущенном движении (8.1), а $Q_0(\mathbf{x},\ t)$ — эта же характеристика на основном (невозмущенном) движении. Разность $q \equiv Q(\mathbf{x},\ t) - Q_0(\mathbf{x},\ t)$ называется эйлеровым возмущением поля Q. В то же время разность $\Delta Q \equiv Q(\mathbf{x}_1,\ t) - Q_0(\mathbf{x},\ t)$ с $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x},\ t)$ (8.1) называется лагранжевым возмущением характеристики Q. Если возмущения малы, то в первом порядке справедлива связь

$$\Delta Q = q + \xi_\alpha \frac{\partial Q}{\partial x_\alpha}. \tag{8.2}$$

Если величина Q сохраняется в каждой жидкой частице и возмущения состоят только в смещениях частиц, то $\Delta Q = 0$ и

$$q = -\xi_\alpha \frac{\partial Q}{\partial x_\alpha}. \tag{8.3}$$

Для поля скорости имеют место соотношения

$$\Delta u_i = u_i + \xi_\alpha \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha},\quad \Delta u_i = \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + U_\alpha \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\alpha}, \tag{8.4}$$

где Δu_i — лагранжево возмущение скорости, а U_i — поле скорости невозмущенного движения. Первое из равенств (8.4) вытекает из (8.2), а второе — из определения поля $\boldsymbol{\xi}$. Из (8.4) следует

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = u_i + \{\mathbf{U},\ \boldsymbol{\xi}\}_i \equiv u_i + \xi_\alpha \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} - U_\alpha \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\alpha}. \tag{8.5}$$

Фигурными скобками $\{\mathbf{A},\ \mathbf{B}\}$ обозначена скобка Пуассона векторных полей $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Граничные условия непротекания приводят к отсутствию на $\partial\tau$ нормальных смещений, что в первом порядке малости дает

$$\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{n} = 0. \tag{8.6}$$

Уравнение для возмущений завихренности (7.1) переписывается в виде

$$\boldsymbol{\omega}_t = \{\mathbf{U},\ \boldsymbol{\omega}\} + \{\mathbf{u},\ \boldsymbol{\Omega}\}. \tag{8.7}$$

Выражая в (8.7) $\mathbf{u}$ из (8.5), после преобразований (с использованием тождества Якоби для скобок Пуассона и равенства $\{\mathbf{U},\ \boldsymbol{\Omega}\} = 0$) для $\boldsymbol{\alpha} \equiv \boldsymbol{\omega} - \{\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\Omega}\}$ можно получить уравнение $\boldsymbol{\alpha}_t = \{\mathbf{U},\ \boldsymbol{\alpha}\}$. Если выбрать $\boldsymbol{\alpha} \equiv 0$, то будет существовать связь

$$\boldsymbol{\omega} = \{\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\Omega}\}. \tag{8.8}$$

Проведенный выбор равносилен определению начальных значений $\xi(\mathbf{x}, 0)$ по заданному полю $\omega(\mathbf{x}, 0)$.

Для возмущений полей a и λ (7.1) в соответствии с (8.3) имеется

$$a = -\xi_i \frac{\partial A}{\partial x_i}, \quad \lambda = -\xi_i \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}. \tag{8.9}$$

Можно проверить, что выписанные связи (8.9), (8.8), (8.5) согласуются с уравнениями (7.1) и друг с другом. В частности, выполнение (8.5) гарантирует справедливость уравнений на a, λ и ω из (7.1), а выполнение (8.8) приводит к тому, что второе равенство (8.9) следует из первого. Рассмотрение лагранжевых смещений в терминах, близких к изложенным, дано в [10, § 13].

Подстановка (8.8), (8.9) в (7.3) и прямые преобразования приводят к

$$2F = \int_\tau (u_i u_i + \omega_i e_{ikm} U_k \xi_m)\, d\tau + \int_{\partial\tau} \left(2\omega_i \Psi - \Omega_i \xi_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\right) a n_i dS. \tag{8.10}$$

Если на $\partial\tau$ принять условия (3.7) или (3.8), то поверхностный интеграл обращается в нуль и (8.10) совпадает с полученным в [3] выражением для второй вариации энергии.

9. Интегралы движения для течений стратифицированной жидкости. В [11, 12] показано, что точные уравнения и граничные условия, описывающие трансляционно-инвариантные движения однородной идеальной несжимаемой жидкости во вращающейся системе координат, прямыми преобразованиями сводятся к уравнениям и граничным условиям для плоских движений стратифицированной жидкости (записанным в приближении Буссинеска). Пользуясь этой эквивалентностью, можно переформулировать некоторые результаты настоящей работы для стратифицированной жидкости.

В частности, интересный вид имеет получающийся из интеграла типа (7.3), (8.10) сохраняющийся функционал для линейных возмущений плоскопараллельного течения стратифицированной жидкости. Для его записи вводится система декартовых координат x, y. Пусть плоские движения идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости происходят в полосе $0 < y < H$ во внешнем однородном поле тяжести $\mathbf{g} = (0, g)$. Плоскопараллельное движение задается двумя произвольными функциями $U(y)$ и $\rho_0(y)$:

$$U = U(y), \; V \equiv 0, \; \rho_0 = \rho_0(y). \tag{9.1}$$

Здесь U и V — x- и y-компоненты скорости основного течения; $\rho_0(y)$ — распределение плотности в нем. Посредством u, v, ρ, p, $\omega \equiv v_x - u_y$ обозначаются возмущения x-, y-компонент скорости, плотности, давления и вихря, удовлетворяющие системе линеаризованных на (9.1) уравнений и граничным условиям непротекания:

$$Du + U'v = -p_x, \; Dv = -p_y + \rho g, \tag{9.2}$$

$$D\rho + \rho_0' v = 0, \; u_x + v_y = 0, \; D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x};$$

$$v = 0 \text{ при } y = 0; \; H \tag{9.3}$$

(штрихом обозначены обыкновенные производные по y). Прямыми вычислениями можно проверить, что в задаче (9.2), (9.3) не зависит от времени функционал

$$\int \left(u^2 + v^2 + \frac{g\rho_0' - UU''}{(\rho_0')^2}\rho^2 - \frac{2U}{\rho_0'}\rho\omega\right) dx\, dy. \tag{9.4}$$

При этом предполагается, что функции u, v, ρ, ω либо периодичны по x (тогда интеграл берется по периоду), либо достаточно быстро затухают при $x \to \pm\infty$. Из вида (9.4) и галилеевой инвариантности следует, что сохраняется также интеграл

$$\int \left[\frac{U''}{(\rho_0')^2} \rho^2 + \frac{2}{\rho_0'} \rho\omega \right] dx\, dy, \tag{9.5}$$

который можно получить независимо из функционала типа (1.10) для импульса.

По аналогии с (9.4), (9.5) могут быть выписаны также интегралы для линеаризованных на (9.1) полных уравнений движения стратифицированной жидкости (без приближения Буссинеска). В силу уравнений

$$\rho_0(Du + U'v) = -p_x, \ \rho_0 Dv = -p_y + \rho g,$$

$$u_x + v_y = 0, \ D\rho + \rho_0' v = 0$$

и граничных условий (9.3) сохраняется функционал

$$\int \left[\rho_0 (u^2 + v^2) + \frac{(UU' + g)\rho_0' - U(\rho_0 U)'}{(\rho_0')^2} \rho^2 - \frac{2U}{\rho_0'} \sigma\rho \right] dx\, dy, \tag{9.6}$$

где $\sigma \equiv \rho_0\omega - \rho_0' u - (\rho U)_y$. Из (9.6) также следует интеграл типа (9.5)

$$\int \left[\frac{(\rho_0 U)''}{(\rho_0')^2} \rho^2 + \frac{2}{\rho_0'} \sigma\rho \right] dx\, dy.$$

Видно, что при $\rho_0' g > 0$ (устойчивая стратификация в смысле убывания плотности вверх) формы (9.4), (9.6) положительно определены только на состоянии покоя $U \equiv 0$ (или равномерного течения $U \equiv \text{const}$). При этом вторая вариация (9.6) приводится к виду [9]

$$\int \left[\rho_0 (u^2 + v^2) + \frac{g}{\rho_0'} \rho^2 \right] dx\, dy.$$

Наложение сколь угодно малого сдвига скорости $U' \neq 0$ нарушает положительную определенность подынтегральных форм (9.4), (9.6). Число Ричардсона $\mathrm{Ri} \equiv \rho_0' g/(U')^2$ как критерий положительной определенности (а значит, и устойчивости) не возникает. Это свидетельствует о том, что критерий устойчивости $\mathrm{Ri} > 1/4$ [13] не является энергетическим (в отличие от критерия Рэлея о точке перегиба, получающегося из (5.3), или условия «центробежной» устойчивости [4, 9]). Этот факт выглядит довольно неожиданно, если напомнить, что физический смысл Ri обычно поясняется из энергетических соображений [14].

В заключение приводится несколько замечаний, дополняющих представленные результаты и поясняющих их связь с другими работами.

1. Кроме (5.3), (6.2) имеются другие случаи знакоопределенности второй вариации функционала (1.10). Эти случаи, как и рассмотренные в п. 5, 6, отвечают движениям с симметриями и соответствуют условиям «центробежной» нелинейной устойчивости, полученным в [9]. Например, для вращательно-симметричных вариаций течения с круговыми линиями тока (с полем угловой составляющей скорости $U(r)$) в (1.10) надо принять $\Phi = \Phi(a)$, $a \equiv ru_\theta$. В результате

$$\delta^2 F = \int \left[(\delta u_r)^2 + (\delta u_z)^2 + \frac{4U^2 r}{(r^2U^2)_r} (\delta u_\theta)^2 \right] dr\, dz,$$

где использованы обозначения п. 6. Положительная определенность этого выражения имеется при выполнении критерия Рэлея «центробежной» устойчивости $(U^2r^2)_r > 0$. Также можно проверить сохранение $\delta^2 F$ в силу линеаризованных уравнений вращательно-симметричных движений.

2. В [3] предложен вариационный принцип, согласно которому энергия стационарных течений экстремальна среди так называемых «равно-

завихренных» течений. Вид интеграла (1.10) естествен с точки зрения этого принципа, поскольку абсолютный экстремум функционала (1.10) можно рассматривать как условный экстремум энергии при наложенной связи

$$\int \Phi(a, \lambda)\, d\tau = \mathrm{const}.$$

Эта связь родственна условию «равнозавихренности» [3], однако слабее него.

3. В [3] получено выражение для второй вариации энергии на приращениях поля скорости, подчиненных условиям «равнозавихренности»

$$\delta^2 E = \int [\delta u_i \delta u_i + \delta\omega_i e_{ikm} U_k f_m]\, d\tau$$

(f_m — «координаты отображения» [3]). После отбрасывания символов δ и замены f_m на ξ_m оказывается, что этот функционал сохраняется в силу линеаризованных уравнений движения (7.1), (7.2), дополненных соотношениями (8.5), (8.6), (8.8). Уравнения на a и λ из (7.1) не привлекаются. Этот факт отмечен в [3]. Уже упоминавшееся сведение $\delta^2 F$ (4.1) к такому же выражению (8.10) поясняет факт сохранения $\delta^2 E$ для возмущений с произвольными начальными данными (а не только для «равнозавихренных»).

4. В [15] также сформулирован вариационный принцип для течений вращающейся неоднородной по плотности жидкости. Функционал типа (1.10) построен из энергии и интеграла от произвольной функции аргумента $\omega \cdot \nabla\rho$, где ρ — плотность, ω — вихрь. В результате из рассмотрения [15] выпал ряд интересных случаев. К ним относятся, например, однородная жидкость или плоские движения стратифицированной жидкости, которым отвечает $\omega \cdot \nabla\rho \equiv 0$.

5. При прямом вычислении производной по времени от энергии в силу линеаризованных уравнений движения (7.1) всегда возникают напряжения Рейнольдса

$$\frac{d}{dt}\int \frac{u_i u_i}{2}\, d\tau = \int \frac{\partial U_i}{\partial x_k} u_i u_k d\tau.$$

Существование интеграла (7.3) означает, что эти напряжения выражаются в виде производной по времени от соответствующего функционала, так что уравнение полной энергии один раз интегрируется.

6. После перехода в (9.4)—(9.6) к спектральной задаче для нормальных волн (поля возмущений пропорциональны $\exp[i(kx - \omega t)]$) непосредственно получаются известные спектральные оценки Синга [13, 16].

7. Добавление скалярного поля a увеличивает число «степеней свободы» функционала F и, следовательно, уменьшает вероятность существования положительно определенных форм. Как было показано в п. 7, роль a состоит в неявном введении лагранжевых переменных. Наличие симметрии движения позволяет эти переменные исключить и получить законы сохранения в терминах только полей скорости и плотности. В отсутствие симметрии такое исключение провести нельзя. Может быть, это порок применившегося метода и в общем случае у уравнений (7.1) существуют интегралы, не содержащие лагранжевых характеристик течения. Нахождение таких интегралов представляло бы несомненный интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Четаев Н. Г.** Устойчивость движения.— М.: ГИТТЛ, 1955.
2. **Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.** Динамика тела с полостями, содержащими жидкость.— М.: Наука, 1965.
3. **Арнольд В. И.** Вариационный принцип для трехмерных стационарных течений идеальной жидкости // ПММ.— 1965.— Т. 29, вып. 5.

4. Fjortoft R. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex // Geophys. Publ.— 1950.— V. 17, N 6.
5. **Серрин Дж.** Математические основы классической механики жидкости.— М.: ИЛ, 1963.
6. **Жермен П.** Курс механики сплошных сред.— М.: Высш. шк., 1983.
7. **Арнольд В. И.** Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости // ДАН СССР.— 1965.— Т. 162, № 5.
8. **Арнольд В. И.** Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости // Изв. вузов. Математика.— 1966.— № 5.
9. **Владимиров В. А.** К нелинейной устойчивости течений несжимаемой жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 3.
10. **Чандрасекхар С.** Эллипсоидальные фигуры равновесия.— М.: Мир, 1973.
11. **Владимиров В. А.** О сходстве эффектов плотностной стратификации и вращения // ПМТФ.— 1985.— № 3.
12. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.— Новосибирск: Наука, 1985.
13. **Yih C. S.** Stratified Flows.— N. Y.: Acad. Press, 1980.
14. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and hydromagnetic stability.— Oxford: Oxford Univ. Press, 1961.
15. **Дикий Л. А.** К нелинейной теории гидродинамической устойчивости // ПММ.— 1965.— Т. 29, вып. 5.
16. **Drazin P. G., Howard L. N.** Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid // Adv. Appl. Mech.— 1966.— V. 9.

Поступила 27/II 1986 г.

УДК 532.59

ПЛАВНЫЕ БОРЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ СО СДВИГОМ СКОРОСТИ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Н. В. Гаврилов

(Новосибирск)

В [1] в рамках второго приближения теории мелкой воды рассмотрена двумерная задача о гравитационных волнах на границе раздела двух невязких несмешивающихся жидкостей разной плотности, заключенных между горизонтальными плоскостями: дном и крышкой. В ней предсказано существование стационарных периодических волн, уединенных внутренних волн в виде «бугра» или «ямы» и одиночных стационарных волн нового типа, которые характеризуются плавным монотонным переходом границы раздела с одного постоянного уровня на другой и названы плавными борами [2]. По своим параметрам эти волны отличаются от других стационарных переходов такого рода: гидравлического прыжка [3, 4], прыжка-волны [5] и моноклинальной волны [6], полученных в рамках первого приближения теории мелкой воды. Ранее плавные боры теоретически не предсказывались и не наблюдались в опытах, поэтому их экспериментальное изучение представляет особый интерес.

Волны в виде плавного бора в покоящейся в невозмущенном состоянии жидкости впервые реализованы и изучены в [2]. В данной работе основное внимание уделено анализу поведения таких волн на сдвиговом течении и при отражении от вертикальной стенки.

Опыты проводились на двух экспериментальных установках, схемы которых приведены на рис. 1, *а, б*. В схеме *а* нижняя жидкость (вода с плотностью $\rho_1 = 1$ г/см^3 и вязкостью $\nu_1 = 0{,}0108$ см^2/с) в невозмущенном состоянии двигалась с постоянными скоростью и глубиной. Верхняя жидкость (керосин с $\rho = 0{,}8$ г/см^3 и $\nu = 0{,}0162$ см^2/с) оставалась практически неподвижной. В ней наблюдалось лишь слабое циркуляционное движение, обусловленное трением на границе раздела слоев. Общая глубина жидкости $H = 6$ см, длина рабочей части установки 250, ширина 18 см.

Генерация волн осуществлялась барьером *1*, расположенным на выходе из рабочей части установки и в исходном положении, выступающим над дном канала на высоту b_1 (рис. 1, *а*). После установления в канале стационарного режима течения нижней жидкости со скоростью u_1 и глубиной h_1 барьер быстро перемещался до высоты b_2 вверх (при генерации волн повышения уровня) или вниз (при генерации волн понижения уровня). При этом вверх по потоку распространяется возмущение, которое только при строго определенном значении глубины h_2, однозначно связанной с b_2, может трансформироваться в плавный бор.