

4. Бетцов Р., Криминалле В. Вопросы гидродинамической устойчивости.— М.: Мир, 1971.
5. Басин А. М., Коротин А. И., Козлов Л. Ф. Управление пограничным слоем судна.— Л.: Судостроение, 1968.
6. Реутов В. П. О неустойчивости периодического прогиба панельной поверхности в турбулентном пограничном слое.— Нижний Новгород, 1990.— (Препр./ИПФ АН СССР, № 276); ПМТФ.— 1992.— № 4.
7. Vaicaitis R., Jan C. M., Shinozuka M. Nonlinear panel response from a turbulent boundary layer // AIAA J.— 1972.— V. 10, N 7.
8. Мхитаров Р. А. Излучение звука прямоугольной пластиной, колеблющейся под действием пульсаций давления в турбулентном пограничном слое // Акуст. журн.— 1973.— Т. 19, № 4.
9. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек.— М.: Наука, 1972.
10. Болотин В. В., Новичков Ю. Н., Швейко Ю. Ю. Теория аэроупругости // Прочность. Устойчивость. Колебания.— М.: Машиностроение, 1968.— Т. 3.
11. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем.— М.: Наука, 1979.
12. Лепендин Л. Ф. Акустика.— М.: Высш. шк., 1978.

г. Нижний Новгород

Поступила 5/VIII 1991 г.,
в окончательном варианте — 24/I 1992 г.

УДК 539.374

Р. А. Каюмов

ОБ ОЦЕНКЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ТЕКУЧЕСТИ

Работа является развитием [1]. В рамках модели жесткопластического тела показано, что нижнюю границу предельной нагрузки можно найти из некоторой задачи управления, сводимой к вариационной. Предлагается методика, позволяющая получать одновременно нижнюю и верхнюю оценку. Найдено условие, при котором этот подход даст совпадающие границы. Методика иллюстрируется примерами расчета композитных оболочек.

Постановка задачи. Рассматривается конструкция, изготовленная из материала, поведение которого можно описать моделью идеально пластического тела. Пусть условие текучести имеет вид

$$(1) \quad f_1(\sigma) \cup f_2(\sigma) \cup \dots \cup f_m(\sigma) = 1$$

(σ — вектор, составленный из компонент тензора напряжений).

Нагружение считается однопараметрическим, т. е. объемные силы Q и поверхностные q изменяются пропорционально одному параметру t :

$$Q = Q_0 t, \quad q = q_0 t \quad (t > 0).$$

Уравнения равновесия записываются в символическом виде

$$(2) \quad L\sigma = -Q_0 t \quad (x \in \omega), \quad l\sigma = q_0 t \quad (x \in \Gamma),$$

где L, l — линейные операторы; ω — область, занимаемая телом; Γ — поверхность тела, на которой заданы нагрузки; x — радиус-вектор точки.

Кинематические граничные условия считаются однородными и имеют вид

$$(3) \quad Ku = 0 \quad (x \in \gamma).$$

Здесь K — линейный оператор; u — вектор перемещений; γ — поверхность тела, на которой заданы ограничения на перемещения. В дальнейшем поля перемещений считаются кинематически возможными, т. е. рассматриваются в пространствах, удовлетворяющих условию (3).

В рамках модели жесткопластического тела ставится задача об отыскании t_- и t_+ -нижней и верхней границы коэффициента предельной на-

грузки t_* , приводящей к пластическому разрушению конструкции. Согласно статической теореме [2—4], если при некоторых Q, q вектор σ удовлетворяет уравнениям (2), но не выходит за пределы поверхности текучести, $t = t_*$. Если же найдено поле скоростей u , удовлетворяющее условию $Ku = 0$ на поверхности γ , то можно найти t_+ [2—4].

Решение задачи. Сначала рассматривается ситуация, когда в условии текучести левая часть представляет собой одну однородную функцию:

$$(4) \quad f(\sigma) = c^n f(\sigma),$$

причем f выпукла. Квадратичная функция f исследована в [1]. Здесь изучаются случаи, когда f может быть неквадратичной функцией и когда $n > 2$.

При обозначении $\sigma = t\sigma_0$ из (2) вытекает

$$(5) \quad L\sigma_0 = -Q_0 \quad (x \in \omega), \quad l\sigma_0 = q_0 \quad (x \in \Gamma).$$

При $t = t_*$ условие невыхода за пределы поверхности текучести примет вид

$$(6) \quad t_*^n f_{\max_x}(\sigma_0) = 1.$$

Отсюда видно, что для лучшей оценки t_* снизу необходимо найти такое поле σ_0 , которое минимизирует $f_{\max_x}(\sigma_0)$. Задача отыскания σ_0 заменяется задачей отыскания полей перемещений u и поля упругих характеристик E , связанных с σ фиктивным законом Гука:

$$(7) \quad \sigma_0 = E\varepsilon_0, \quad \varepsilon_0(x) = Bu_0(x), \quad E = \lambda(x) E_0(x).$$

Здесь ε_0 — вектор, составленный из компонент тензора деформаций; B — линейный дифференциальный оператор; $\lambda(x)$ — искомый скаляр; E_0 — симметрическая матрица, которая будет определена ниже из условия $t_* = t_+$.

Оператор вычисления $f_{\max_x}(\sigma_0)$ представляется в виде [5]

$$(8) \quad f_{\max_x}(\sigma_0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[(\text{mes } \omega)^{-1} \int_{\omega} f^p(\sigma_0) d\omega \right]^{1/p},$$

и задача минимизации (8) заменяется вариационной задачей минимизации функционала F при ограничении (5):

$$(9) \quad F_* = \min_{\lambda, u_0} F, \quad F = \int_{\omega} [f(\lambda E_0 Bu_0)]^p d\omega.$$

Можно показать, что эта задача эквивалентна изопериметрической о минимизации F при условии

$$(10) \quad \Pi = \int_{\omega} \lambda (Bu_0)^T E_0 Bu_0 d\omega - \int_{\omega} Q_0^T u_0 d\omega - \int_{\Gamma} q_0^T u_0 d\Gamma = b,$$

где индекс T означает операцию транспонирования; $b = \text{const}$. Записывая условие стационарности лагранжиана $\Phi = F + \mu\Pi$ в виде $\delta_\lambda \Phi = 0$ (δ — знак вариации) для λ получим

$$(11) \quad \lambda^{np-1} = (\mu/np)(Bu_0)^T E_0 Bu_0 / f^p(E_0 Bu_0).$$

При обозначении $f_0 = f(\sigma_0)$ из условия $\delta u_0 \Phi = 0$ с учетом (11) вытекает

$$(12) \quad \int_{\omega} [\lambda (Bu_0)^T E_0 Bu_0 (\partial f_0 / \partial \sigma_0) E_0 \delta Bu_0 / n f_0] d\omega - \\ - 2 \int_{\omega} \lambda (Bu_0)^T E_0 \delta Bu_0 d\omega + \int_{\omega} Q_0^T \delta u_0 d\omega + \int_{\Gamma} q_0^T \delta u_0 d\Gamma = 0.$$

Коэффициенты при δBu_0 в первых двух интегралах дают в сумме $-\sigma_0^T$:

$$(13) \quad \lambda (Bu_0)^T E_0 Bu_0 (\partial f_0 / \partial \sigma_0) E_0 / n f_0 - 2\lambda (Bu_0)^T E_0 = -\sigma_0^T.$$

Умножая (13) на Bu_0 справа с учетом (7) и формулы Эйлера для однородных функций

$$(\partial f / \partial \sigma_0)^T \sigma_0 = n f(\sigma_0),$$

убеждаемся в справедливости (13). Таким образом, (12) представляет собой вариационное уравнение Лагранжа, эквивалентное (5), а задача (9), (5) эквивалентна (9), (10). При этом константа b (μ выражается через b из (10)) может выбираться произвольной. Действительно, если представить (5) одним операторным уравнением

$$D\lambda E_0 B u_0 = P_0$$

и записать его решение в виде

$$(14) \quad u_0 = (D\lambda E_0 B)^{-1} P_0,$$

то подстановка (14) в (5), (7) позволяет видеть, что σ_0 не зависит от амплитуды λ .

При $p \rightarrow \infty$ скаляр $\lambda(x)$ представим в виде

$$(15) \quad \lambda = c / [f(E_0 B u_0)]^{1/n}.$$

Оценка сверху. Пусть найдено решение задачи (9), (10). Для оценки сверху в качестве полей скоростей $v = \dot{u}$ и скоростей деформаций $\xi = \dot{\epsilon}$ примем

$$v = u_0 / \tau, \quad \xi = B u_0 / \tau$$

(τ — константа размерности времени).

Зная ξ , вообще говоря, можно найти поле напряжений σ_+ из закона течения:

$$(16) \quad \xi^T = v [\partial f(\sigma_+) / \partial \sigma]^T,$$

причем v определится из условия текучести $f(\sigma_+) = 1$. Для практического вычисления σ_+ можно использовать следующий подход. Умножение (16) на σ_+ справа с учетом формулы Эйлера дает

$$\xi^T \sigma_+ = v n f(\sigma_+) = v n.$$

В силу той же формулы Эйлера

$$(17) \quad (n-1) \partial f(\sigma) / \partial \sigma = (\partial [\partial f / \partial \sigma]^T / \partial \sigma) \sigma,$$

если f дважды непрерывно дифференцируема. Тогда (16) примет вид

$$(18) \quad \xi = v [A(\sigma_+) / (n-1)] \sigma_+, \quad A(\sigma) = \partial [\partial f / \partial \sigma]^T / \partial \sigma.$$

При вычислении границ предельной нагрузки предполагается применение итерационного процесса. Пусть поэтому в (18) в качестве аргумента использован вектор $\sigma_0 t_-$. При обозначении $A_0 = A(\sigma_0 t_-)$ и предположении неособенности A_0 из (18) следует

$$(19) \quad \sigma_+ \cong A_0^{-1} \xi (n-1) / v.$$

Делитель v определяется из условия текучести $f(\sigma_+) = 1$:

$$v = (n-1) [f(A_0^{-1} \xi)]^{1/n}.$$

Тогда

$$(20) \quad \sigma_+ \cong A_0^{-1} \xi / [f(A_0^{-1} \xi)]^{1/n}.$$

Можно попытаться решить (18) итерационно следующим образом. Используя в качестве аргумента матрицы A вектор $\sigma_+^{(r-1)}$, где r — номер итерации, $\sigma_+^{(n)} = t_- \sigma_0$, из (18) получим

$$\sigma_+^r = A_{(r-1)}^{-1} \xi / [f(A_{(r-1)}^{-1} \xi)]^{1/n}, \quad A_{(r-1)} = A(\sigma_+^{(r-1)}),$$

если только $A_{(r-1)}$ — неособенные матрицы.

Если σ_+ найдено (точно или приближенно), то можно вычислить верхнюю границу предельной нагрузки. Согласно кинематической теореме, имеем

$$(21) \quad t_+ = \int_{\omega} \sigma_+^T \xi d\omega / \left(\int_{\omega} Q_0^T v d\omega + \int_{\Gamma} q_0^T v d\Gamma \right).$$

Итерационный процесс решения уравнений (12), (15) и вычисления границ t_- и t_+ можно строить следующим образом. На первом шаге принимается $\lambda^{(1)} = 1$. На основе решения задачи теории упругости (3), (5), (7) отыскивается поле $u_0^{(1)}$. Из соотношения (6) находим нижнюю границу t_- , а с помощью (21) — значение t_+ . Необходимо отметить, что в случае использования формулы (20) это не строго верхняя граница, поскольку соотношение (20) приближенное. На втором шаге вычисляется $\lambda^{(2)}$ по формуле (15), вновь решается задача теории упругости (3), (5), (7), но с $\lambda = \lambda^{(2)}$, вновь отыскиваются $t_-^{(2)}$, $t_+^{(2)}$ и т. д. Как показано ниже на примерах для композитной оболочки и в [4] для пластин, итерационный процесс сходится достаточно быстро.

Условие совпадения t_- и t_+ . Пусть найдено решение задачи теории упругости (3), (5), (7), а u_0 , λ представлены в виде

$$u_0 = \alpha \varphi(x), \quad \alpha = \text{const}, \quad \lambda = c/[f(E_0 B \varphi)]^{1/n}.$$

Согласно (4), имеем

$$(22) \quad f(\sigma_0 t_-) = \lambda^n t_-^n \alpha^n f(E_0 B \varphi) = t_-^n c^n \alpha^n.$$

Поскольку должно быть $f_{\max} = 1$, то

$$(23) \quad t_- = |c\alpha|^{-1}.$$

Ввиду того что σ_0 удовлетворяет уравнениям равновесия (5), должно выполняться энергетическое тождество

$$\int_{\omega} \sigma_0^T \varepsilon_0 d\omega = \int_{\omega} \bar{Q}_0^T u_0 d\omega + \int_{\Gamma} q_0^T u_0 d\Gamma.$$

Подстановка сюда σ_0 , ε_0 , согласно (7), с учетом (23) дает

$$(24) \quad \int_{\omega} (B\varphi)^T E_0 B \varphi / [f(E_0 B \varphi)]^{1/n} d\omega = \left(\int_{\omega} Q_0^T \varphi d\omega + \int_{\Gamma} q_0^T \varphi d\Gamma \right) t_-.$$

С другой стороны, подставляя в формулы для оценки сверху (20), (24) значения $v = \alpha \varphi / \tau$, $\xi = \alpha B \varphi / \tau$, получим

$$(25) \quad \int_{\omega} (B\varphi)^T A_0^{-1} (B\varphi) / [f(A_0^{-1} B \varphi)]^{1/n} d\omega = \left(\int_{\omega} Q_0^T \varphi d\omega + \int_{\Gamma} q_0^T \varphi d\Gamma \right) \tilde{t}_+,$$

где \tilde{t}_+ вычисляется с помощью приближенной формулы (20).

Из сравнения (24), (25) вытекает, что \tilde{t}_+ и t_- совпадут, если E_0 найти из уравнения

$$(26) \quad E_0 = A_0^{-1} / \sigma_s, \quad A_0 = \partial [\partial f(t_- \lambda E_0 B \varphi) / \partial \sigma]^T / \partial \sigma$$

(σ_s — константа размерности напряжений).

Остается показать, что $t_+ = \tilde{t}_+$ при точном удовлетворении уравнений (12), (15). Для этого достаточно убедиться в том, что σ_- , найденное из (12), (15), удовлетворяет закону течения (16). Действительно, как следует из (22) и (23), условие текучести удовлетворяется, т. е. $f(\sigma_-) = 1$.

Закон течения (16) с учетом (17) примет вид

$$\xi = v \partial f(\sigma_-) / \partial \sigma = [v / (n - 1)] \{ \partial [\partial f(\sigma_-) / \partial \sigma]^T / \partial \sigma \} \sigma_- = [v / (n - 1)] A_0 \sigma_-.$$

Подстановка сюда $\sigma_- = \alpha t_- \lambda E_0 B \varphi = \alpha t_- \lambda A_0^{-1} B \varphi / \sigma_s$ дает

$$(27) \quad \xi = \{ v \alpha t_- \lambda \tau / [(n - 1) \sigma_s] \} \xi = \beta \xi$$

($\beta = [\cdot]$ — скаляр). Таким образом, как видно из (27), векторы ζ и ξ коллинеарны, т. е. ξ ортогонален поверхности текучести в точке σ_- , а значит, σ_- и ξ удовлетворяют закону текучести (16). Следовательно, $\sigma_- = \sigma_+$ и $t_+ = t_- = t_*$.

Общий случай условия текучести. Пусть оно имеет вид (1) и может быть аппроксимировано некоторой вписанной кусочно-гладкой поверхностью, каждый кусок которой выпуклый и описывается уравнением

$$(28) \quad b_i(\sigma) = 1, \quad i = 1, \dots, p,$$

где p — число кусков; b_i — однородная функция степени $2n$ (например, квадратичная). Тогда условие текучести

$$(29) \quad b_1(\sigma) \cup b_2(\sigma) \cup \dots \cup b_p(\sigma) = 1$$

можно заменить одним

$$(30) \quad g = \left(\sum_{i=1}^p [b_i(\sigma)]^k \right)^{1/k}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Действительно, если хотя бы одно из условий (28) удовлетворяется, то $g = 1$. Если же $g = 1$, то хотя бы одно из условий (28) должно выполняться.

Функция g в отличие от (29) описывает гладкую поверхность. Правомерность такой замены можно обосновать следующим образом. При оценке снизу, согласно статической теореме, требуется лишь то, чтобы статически возможное поле напряжений σ_- не приводило к нарушению условий $b_i(\sigma) \leq 1, i = 1, \dots, p$. Поскольку при $k \rightarrow \infty$ значение $g \rightarrow \max \{b_1, \dots, b_p\}$, то при $g(\sigma_-) \leq 1, k \rightarrow \infty$ ни одно из значений b_i не превысит единицы, т. е. условие $b_i(\sigma_-) \leq 1$ не нарушится.

Функция $g(\sigma)$ является однородной, поэтому для нее справедливы результаты, полученные выше. Тогда

$$\lambda = c/[g(E_0 B u_0)]^{1/2n} = b_*^{1/2n}, \\ b_* = \max \{b_1(E_0 B u_0), \dots, b_p(E_0 B u_0)\}.$$

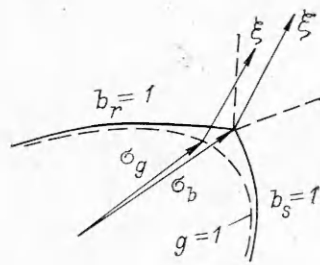
Здесь учтено, что при возведении в степень k другие члены ряда, входящего в (30), дают бесконечно малый вклад.

С геометрической точки зрения σ_+ определяется путем отыскания вектора, изображающего точку на поверхности (29), нормаль к которой в этой точке коллинеарна вектору скоростей деформации ξ . Если же ξ оказывается лежащим внутри угла, составленного нормалью к смежному ребру поверхностям $b_r = 1, b_s = 1$, то σ_+ принимается равным значению вектора σ_b , изображающему точку на ребре (рис. 1). Аналогично поступают в случае конических точек [3, 4]. При замене поверхности (29) гладкой (30) значение σ_g будет мало отличаться от σ_b при $k \rightarrow \infty$, в силу чего ошибка от замены кусочно-гладкой поверхности гладкой будет тем меньше, чем больше k .

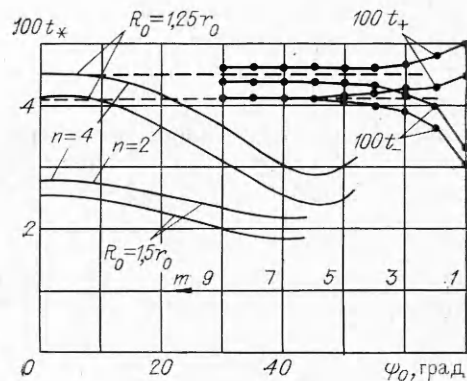
В случае $\xi = 0$, т. е. когда напряжения не выходят на поверхность текучести, вектор σ_+ может быть произвольным, но на значении t_+ это не отражается, что видно из (21).

Числовые примеры. Для иллюстрации предложенного подхода на рис. 2 приводятся некоторые результаты расчета методом конечных элементов тонких композитных оболочек вращения, образованных симметричной намоткой ленты под углом $\pm\psi$ к меридиану вдоль геодезических линий срединной поверхности. Кольцевая нагрузка $P = P_0 t$ направлена вдоль оси вращения и приложена к краю с меньшим радиусом r_0 . Результаты приведены для конической оболочки с радиусом R_0 большего свободно опертого края, толщиной $h_0 = 0,05r_0$ и с углом намотки ψ_0 у опертого края. В других точках меридиана толщина h и угол ψ связаны с расстоянием до оси вращения r соотношением [6]

$$r \sin \psi = R_0 \sin \psi_0, \quad hr \cos \psi = h_0 R_0 \cos \psi_0.$$



Р и с. 1



Р и с. 2

Для ленты принимались следующие условия текучести:

$$(\sigma^{11}/\sigma_s^{11})^n + (\sigma^{22}/\sigma_s^{22})^n + (\sigma^{12}/\sigma_s^{12})^n = 1.$$

Результаты приведены для $n = 2$ и 4 . Полагалось, что $P_0 = \sigma_s R_0$, $\sigma_s^{11}/\sigma_s^{22} = 2$, $\sigma_s^{22}/\sigma_s^{12} = \sqrt{5}$, $t_* \cong t_{**} = (t_+ + t_-)/2$, а высота оболочки равна r_0 . Небольшое увеличение t_* при больших ψ_0 вызвано, во-первых, тем, что толщина оболочки растет вблизи края с меньшим радиусом r_0 при увеличении ψ_0 , во-вторых, тем, что $\sigma_s^{12} < \sigma_s^{22}$.

На рис. 2 приведены также графики сходимости итерационного процесса, изложенного выше. Видно, что значение t_{**} стабилизируется очень быстро. Результаты расчетов показали также, что значения t_- и t_+ сильно зависят от степени дискретизации области (количества элементов и точек интегрирования по толщине оболочки). При невысокой степени дискретизации может случиться, что числовое значение t_- будет даже больше t_+ . Объясняется это двумя причинами. Во-первых, при использовании приближенных методов решения задач теории упругости уравнения равновесия, как правило, удовлетворяются неточно. Во-вторых, при вычислении $f_{\max}(\sigma_0)$ пики функции f «срезаются» (сглаживаются) при использовании численных методов.

Для устойчивости счета и лучшей сходимости необходимо ограничивать отношение максимального значения λ к минимальному. Аналогичного условия необходимо придерживаться при вычислении E_0 по (26). Приведенные ниже результаты получены для $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 100$ и (при $n = 4$) $|\sigma^{ij}|_{\max} / |\sigma^{ij}|_{\min} = 100$ при вычислении E_0 в (26). Но даже при достаточно больших отклонениях от условия (26) величины t_+ и t_- получаются достаточно близкими, а $t_{**} = (t_+ + t_-)/2$ стабилизируется (с погрешностью около 1 %) после 3—4 итераций.

Таким образом, предложенная методика позволяет получать двустороннюю оценку предельной нагрузки на основе решения некоторой задачи теории упругости, упругие характеристики которой определяются через параметры пластичности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каюмов Р. А. Метод вариации упругих характеристик в задаче о предельной нагрузке // ПМТФ.— 1990.— № 3.
2. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести.— М.: Машиностроение, 1975.
3. Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций.— М.: Наука, 1978.
4. Ключников В. Д. Математическая теория пластичности.— М.: Изд-во МГУ, 1979.
5. Баничук Н. В. Введение в оптимизацию конструкций.— М.: Наука, 1986.
6. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов.— М.: Машиностроение, 1977.

г. Казань

Поступила 24/VI 1991 г.

в окончательном варианте — 27/XII 1991 г.