

Ф и г. 3

(кривые 1—5 соответственно). Из фиг. 3 видно, что с ростом z (в области $z < 0$) происходит непрерывное возрастание азимутальной скорости. Вязкие напряжения, возникающие вследствие разницы угловых скоростей полубесконечных труб, передаются вверх по потоку и приводят в азимутальное движение жидкость в области $z > 0$ вблизи линии стыка. Наличие неподвижной стенки в области $z < 0$ (стенка неподвижна во вращающейся системе координат) препятствует вращению жидкости. Поэтому азимутальная скорость убывает при приближении к стенке цилиндра. В области $z > 0$ скорость вращения жидкости должна совпадать со скоростью вращения полубесконечной трубы, поэтому с ростом z происходит выравнивание величины азимутальной компоненты скорости вдоль толщины слоя, что согласуется с фиг. 3.

Следует отметить, что эффект «запирания» потока (образование областей замкнутых циркуляций), частично обнаруженный в рассмотренном течении (образование горба на свободной поверхности), также наблюдается при течении жидкости в трубе, состоящей из двух плотно состыкованных труб, вращающихся с разными угловыми скоростями [8], а также в предельном случае, когда одна труба покоится, а другая вращается [9]. Замкнутые циркуляционные зоны образуются также во вращающихся каналах переменного сечения [10].

Поступила 4 V 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштик М. А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981.
2. Гринспен Х. Теория вращающейся жидкости. Л.: Гидрометеоиздат, 1978.
3. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967.
4. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
5. Снеддон Х. Преобразование Фурье. М.: ИЛ, 1959.
6. Ланс Дж. Н. Числовые методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: ИЛ, 1962.
7. Sykes R. I. On three-dimensional boundary layer flow over surface irregularities.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1980, vol. 375, N 1754.
8. Lavan Z., Nielson H., Fijer A. A. Separation and flow in swirling flow in circular ducts.— Phys. Fluids, 1969, vol. 12, N 9.
9. Бодунов Н. Ф. О некоторых закрученных течениях несжимаемой жидкости.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1977, вып. 3.
10. Симуни Л. М. Исследование движения вязкой жидкости между поверхностями вращения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 6.

УДК 532.526

РАСЧЕТ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ СО ВДУВОМ

В. М. Ерошенко, Л. И. Зайчик, В. Б. Рабовский
(Москва)

В [1] проведено экспериментальное исследование перехода ламинарного режима течения в турбулентный для потока в круглой трубе, организованного за счет вдува через пористую боковую поверхность при заглушенном переднем торце трубы. В результате было установлено, что вдув приводит к повышению устойчивости ламинарного режима течения и увеличивает число Рейнольдса перехода до 10 000 вместо значения 2 300, характерного для течения в круглой трубе с непроницаемыми стенками. Аналогичный эффект был обнаружен в [2], где также получено, что число Рейнольдса потери устойчивости под действием вдува может принимать значения, существенно большие, чем в трубах с непроницаемыми стенками. В [3, 4] при относительно невы-

соких значениях числа Рейнольдса на входе экспериментально обнаружено явление реламинизации турбулентного потока в начальном участке круглой трубы под действием вдува. Теоретические исследования устойчивости течения со вдувом проводились только для плоского канала [5, 6]. В данной работе выполнен расчет устойчивости гидродинамически развитого течения в круглой трубе со вдувом через пористую боковую поверхность.

Исследуется устойчивость течения к малым возмущениям в рамках линейной теории. Как и в [5, 6], анализируется случай двумерных возмущений в предположении, что потеря устойчивости определяется свойствами течения вблизи рассматриваемого поперечного сечения трубы, т. е. имеет локальный характер. Линеаризованное уравнение для амплитуды возмущений в безразмерной форме имеет вид [7]

$$(1) \quad \left(\frac{d^2}{dr_0^2} - \frac{1}{r_0} \frac{d}{dr_0} - \alpha^2 \right)^2 \varphi = \frac{\text{Re}}{2} i\alpha \left[(u_{x0} - c) \left(\frac{d^2 \varphi}{dr_0^2} - \frac{1}{r_0} \frac{d\varphi}{dr_0} - \alpha^2 \varphi \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial^2 u_{x0}}{\partial r_0^2} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial u_{x0}}{\partial r_0} \right) \varphi \right] + u_{r0} \left(\frac{d^3 \varphi}{dr_0^3} - \frac{3}{r_0} \frac{d^2 \varphi}{dr_0^2} + \frac{4}{r_0^2} \frac{d\varphi}{dr_0} - \alpha^2 \frac{d\varphi}{dr_0} + \frac{2\alpha^2}{r_0} \varphi \right) - \\ - \left(\frac{\partial^2 u_{r0}}{\partial r_0^2} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial u_{r0}}{\partial r_0} \right) \frac{d\varphi}{dr_0}.$$

Здесь в качестве масштаба длины используется радиус трубы r_w ; масштаб скорости — средняя скорость в рассматриваемом сечении $U = U_0 - -2V_w x/r_w$; $\text{Re} = 2Ur_w/\nu$ — число Рейнольдса основного потока; V_w — скорость вдува ($V_w < 0$); $r_0 = r/r_w$; $u_{x0} = u_x/U$; $u_{r0} = u_r/U$. Два последних члена в уравнении (1) описывают эффекты непараллельности течения вследствие наличия радиальной составляющей скорости.

В случае равномерного по длине трубы вдува система уравнений Навье—Стокса для невозмущенного движения имеет автомодельное решение [8]

$$(2) \quad u_x = (U_0 - 2V_w x/r_w)F'(\eta), \quad u_r = V_w F(\eta)/\sqrt{\eta},$$

где $\eta = r_0^2$. Функция $F(\eta)$ находится из решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$(3) \quad (\eta F'')' + (R/2)(F'F'' - FF''') = 0, \quad R = V_w r_w/\nu$$

с граничными условиями

$$(4) \quad F(1) = 1, \quad F'(1) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} F/\sqrt{\eta} = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \sqrt{\eta} F'' = 0.$$

Переходя в (1) к переменной η , с учетом выражений (2) получим следующее уравнение для амплитуды возмущений:

$$(5) \quad (\eta \varphi'')'' - 2\alpha_1^2 \varphi'' + \alpha_1^4 \varphi/\eta = i\alpha_1 \text{Re}_1 \left[(F' - c) \left(\varphi'' - \alpha_1^2 \frac{\varphi}{\eta} \right) - F'' \varphi \right] + \\ + R_1 \left\{ F \left[\varphi''' - \alpha_1^2 \left(\frac{\varphi}{\eta} \right)' \right] - F'' \varphi' \right\},$$

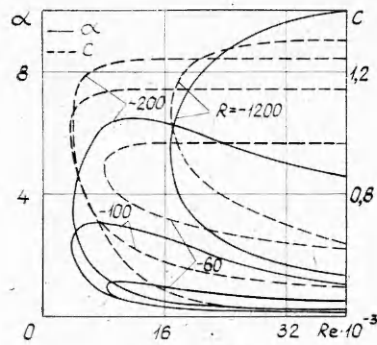
где $\text{Re}_1 = \text{Re}/4$; $R_1 = R/2$; $\alpha_1 = \alpha/2$. Граничные условия для уравнения (5) задаются в виде

$$(6) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \varphi/\sqrt{\eta} = 0, \quad \varphi'(0) = \text{const}, \quad \varphi(1) = \varphi'(1) = 0.$$

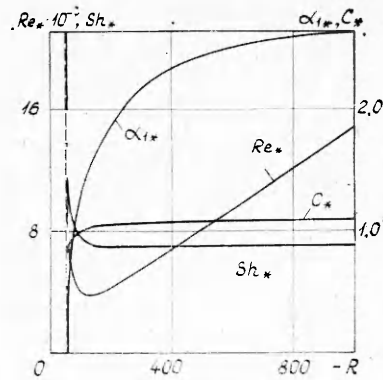
Для численного интегрирования уравнение (5) заменялось системой уравнений

$$(7) \quad \eta \varphi'' = \eta \theta + \alpha_1^2 \varphi,$$

$$(\eta \theta)'' = [\alpha_1^2 + i\alpha_1 \text{Re}_1 (F' - c)] \theta - i\alpha_1 \text{Re}_1 F''' \varphi + R_1 F \theta' - R_1 F'' \varphi'.$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Граничные условия для уравнений (7) с учетом (4), (6) задавались в виде

$$(8) \quad \varphi(0) = 0, \quad \theta'(0) = \frac{\alpha_1^* + i\alpha_1 \text{Re}_1 [F'(0) - c]}{2} \theta(0) - \frac{\text{Re}_1 F''(0)}{2} \varphi'(0),$$

$$\varphi(1) = \varphi'(1) = 0.$$

Задача на собственные значения для (7), (8) решалась методом дифференциальной прогонки, описанным в [9]. Из ее решения находятся нейтральные кривые $\alpha(\text{Re})$ и $c(\text{Re})$ при заданном R (фиг. 1) и определяются критические параметры, соответствующие минимальному значению Re (фиг. 2). Решения для нейтральных возмущений были получены в диапазоне изменения параметра вдува $-\infty < R < 52,6$. При $R \rightarrow -52,6$ критическое число Рейнольдса Re_* неограниченно возрастает, а α_* стремится к нулю. Таким образом, в случае вдува при $-52,6 < R < 0$ развитое ламинарное течение в круглой трубе так же, как и течение Пуазейля, оказывается устойчивым к малым возмущениям и теоретически может существовать при сколь угодно больших числах Рейнольдса. С увеличением $|R|$ значение Re_* падает, достигает минимума при $|R| \approx 120$ и затем начинает расти, причем для $|R| > 200$ по закону, близкому к линейному. При больших вдувах область нарастающих возмущений, заключенная внутри нейтральной кривой $\alpha_1(\text{Re}_1)$, становится незамкнутой (верхняя ветвь нейтральной кривой неограниченно возрастает с увеличением Re_1). Следует отметить, что верхней ветви нейтральной кривой $\alpha_1(\text{Re}_1)$ соответствует нижняя ветвь кривой $c(\text{Re}_1)$. Следовательно, в отличие от ситуации для течения Пуазейля в плоском канале и течения Блазиуса в пограничном слое, в данном случае коротковолновые возмущения распространяются с меньшей скоростью, чем длинноволновые. Критическое значение числа Струхали $\text{Sh}_* = \alpha_* c_* U / (2\pi |V_w|)$ при $|R| > 200$ принимает практически постоянное значение $\text{Sh}_* \approx 7$. Полученное значение числа Струхали хорошо согласуется с экспериментальным значением [2] $\text{Sh}_m = \alpha c U_m / (2\pi |V_w|) \approx 11$ (U_m — максимальная скорость в заданном сечении), так как $\text{Sh}_m / \text{Sh} = U_m / U \approx \pi/2$.

В предельном случае сильного вдува при $R \rightarrow -\infty$ параметры устойчивости рассматриваемого течения, как и в случае плоского течения вблизи лобовой точки цилиндрического тела [10], могут быть рассчитаны из решения задачи без учета вязких слагаемых в уравнении (5), т. е. из решения уравнения

$$(9) \quad i\alpha_1 \Omega [(F' - c)(\varphi'' - \alpha_1^2 \varphi / \eta) - F''' \varphi] - F [\varphi''' - \alpha_1^2 (\varphi / \eta)'] + F'' \varphi' = 0,$$

где $\Omega = -\text{Re}/2R = -U/V_w$.

Функция скорости $F(\eta)$ в уравнении (9) задается из невязкого предельного решения уравнения (3) и имеет вид

$$(10) \quad F = \sin(\pi\eta/2).$$

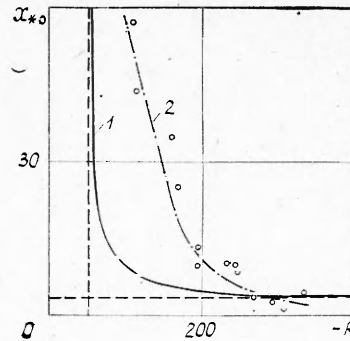
Интересно отметить, что решение дифференциального уравнения третьего порядка (9) удовлетворяет всем четырем граничным условиям (6) так же, как решение для основного течения (10) удовлетворяет всем граничным условиям (4). В силу этого обстоятельство решение уравнения (9) является равномерным по сечению трубы пределом для решения полного уравнения (5) при $R \rightarrow -\infty$. Значения критических параметров, определенные из уравнения (9), равны: $\Omega_* = 6,84$, $\alpha_{1*} = 2,94$, $c_* = 1,08$. Таким образом, механизм потери устойчивости в круглой трубе при сильном вдуве носит невязкий характер.

На фиг. 3 показано сравнение результатов расчета координаты сечения, в котором происходит потеря устойчивости течения к малым возмущениям (кривая 1), с экспериментальными данными по началу перехода [2] (кружки и кривая 2). Точка потери устойчивости определялась на основании зависимости Re_* от R из соотношения

$$x_{*0} = x_*/r_w = Re_*/4 |R|.$$

Удовлетворительное соответствие экспериментальных и расчетных данных при сильном вдуве свидетельствует о близости координат точек потери устойчивости и начала перехода ламинарного течения в турбулентное. С ростом интенсивности вдува, как видно из фиг. 3, происходит монотонное уменьшение значения x_{*0} , которое стремится к $\Omega_*/2$. Следовательно, несмотря на то что сильный вдув приводит к повышению устойчивости ламинарной формы течения в смысле увеличения Re_* , протяженность области ламинарного течения, организованного притоком жидкости через проницаемую боковую поверхность, как и в плоском канале [5], уменьшается с ростом числа Рейнольдса вдува. Однако на участке $x_0 < \Omega/2$ может существовать течение, устойчивое к малым возмущениям при сколь угодно больших значениях $|R|$.

В заключение оценим справедливость используемого локально-однородного метода решения уравнений для малых возмущений. Рассматриваемое приближение правомочно в случае, когда длина волны возмущений много меньше масштаба неоднородности потока, т. е. при $|dU/dx| \times x r_w / (\alpha U) = 2/(\Omega\alpha) \ll 1$. Из результатов расчета следует, что величина $2/(\Omega\alpha)$ для критической точки при сильном вдуве ($R \rightarrow -\infty$) достигает максимального значения $((2/(\Omega\alpha))_{\max} \approx 0,1)$. Следовательно, локально-однородное приближение хорошо выполняется при всех интенсивностях вдува.



Ф и г. 3

Поступила 11 IV 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Huesmann K., Eckert E. R. G. Untersuchungen über die laminare Strömung und den Umschlag zur Turbulenz in porösen Rohren mit Gleichmassiger Einblasung durch die Rohrwand.— Wörme — und Stoffübertragung, 1968, Bd 1, N 1.
2. Ягодкин В. И. Применение каналов с пористыми стенками для исследования внутриканального горения твердых ракетных топлив.— В кн.: Труды XVIII Международного астронавтического конгресса. Белград, 1967.
3. Eckert E. R. C., Rodi W. Reverse transition turbulent-laminar for flow through a tube with fluid injection.— J. Appl. Mech., 1968, vol. 35, N 4.
4. Pennel W. T., Eckert E. R. G., Sparrow E. M. Laminarization of turbulent pipe flow by fluid injection.— J. Fluid Mech., 1972, vol. 52, N 3.
5. Варапаев В. Н., Ягодкин В. И. Об устойчивости течения в канале с проницаемыми стенками.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 5.
6. Варапаев В. Н., Курильская Н. А. и др. Об устойчивости неавтономных течений в каналах с проницаемыми стенками.— Тр. МИСИ, 1973, № 102.
7. Shen F. C. T., Chen T. S., Huang L. M. The effects of main-flow radial velocity on the stability of developing laminar pipe flow.— J. Appl. Mech., 1976, vol. 43, N 2.

8. Terrill R. M., Thomas P. W. On laminar flow through a uniformly porous pipe.— Appl. Scient. Res., 1969, vol. 21, N 1.
9. Гольдштик М. А., Шгерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.
10. Ерошенко В. М., Зайчик Л. П., Рабовский В. Б. Устойчивость плоского течения вблизи передней критической точки при сильном вдуве.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 2.

УДК 532.59

НЕЛИНЕЙНЫЕ АЗИМУТАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ЦЕНТРИФУГЕ

А. А. Абрашкин

(Горький)

В настоящей работе рассматриваются азимутальные волновые движения в жидкости, частично заполняющей быстро вращающийся вокруг горизонтальной оси цилиндр (центрифуга). Под действием центробежной силы жидкость оказывается прижатой к стенке цилиндра и движется вместе с ним вокруг центрального воздушного ядра. Возникающие при этом колебания свободной поверхности называют центрифуговыми волнами [1]. Трудности их теоретического исследования связаны как с нелинейностью основных уравнений, так и граничного условия для давления на свободной поверхности, поэтому ранее они изучались только линейными методами [1, 2].

Ниже будут аналитически описаны нелинейные азимутальные волны в центрифуге с бесконечным радиусом вращающегося цилиндра. Найденные волны являются аналогом трохидальных волн Гертнера на цилиндрической поверхности. Для центрифуги с конечным внешним радиусом построено приближенное решение путем сшивки полученных волн с известными линейными.

1. Рассмотрим азимутальные волны в центрифуге, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω . В линейном приближении они исследовались в [2]. В полярной системе координат R, θ , вращающейся со скоростью Ω , радиальная u и азимутальная v скорости равны соответственно

$$(1.1) \quad u(R, \theta, t) = \frac{\sigma_n d}{[(R_2/R_1)^{2n} - 1]} \left(\frac{R}{R_1}\right)^{n-1} \left[\left(\frac{R_2}{R}\right)^{2n} - 1\right] \sin(n\theta - \sigma_n t);$$

$$(1.2) \quad v(R, \theta, t) = \frac{\sigma_n d}{[(R_2/R_1)^{2n} - 1]} \left(\frac{R}{R_1}\right)^{n-1} \left[\left(\frac{R_2}{R}\right)^{2n} + 1\right] \cos(n\theta - \sigma_n t),$$

где R_1, R_2 — внутренний и внешний радиусы невозмущенного жидкого кольца; d — амплитуда синусоидального профиля на свободной границе; n — номер азимутальной моды; σ_n — частота волны, определяемая равенством

$$(1.3) \quad \sigma_n^\pm = \frac{n\Omega}{\pm(n-1 + (n+1)(R_2/R_1)^{2n})^{1/2}((R_2/R_1)^{2n} - 1) - 1}.$$

Волны частоты σ_n^+ движутся в направлении вращения системы координат, а частоты σ_n^- — в противоположном направлении. В неподвижной системе координат оба типа волн распространяются в сторону вращения потока. Заметим, что траекториями жидких частиц являются эллипсы.

Рассмотрение волн конечной амплитуды вначале удобно провести для центрифуги с бесконечным внешним радиусом R_2 (это соответствует случаю $R_2 \gg R_1$), когда задачу удается решить точно.

В [3] показано, что система уравнений двумерной гидродинамики эквивалентна следующим уравнениям:

$$(1.4) \quad (W_\eta(\bar{W})_{\bar{\eta}} - W_{\bar{\eta}}(\bar{W})_\eta)_t = 0, \quad (W_{i\eta}(\bar{W})_{\bar{\eta}} - W_{i\bar{\eta}}(\bar{W})_\eta)_t = 0.$$

Здесь $W = X + iY$; $\bar{W} = X - iY$; $\eta = a + ib$; $\bar{\eta} = a - ib$; X, Y — эйлеровы; a, b — лагранжевы декартовы координаты; t — время; индексы обозначают дифференцирование по соответствующей переменной. Уравнения (1.4) выражают соответственно условия несжимаемости жидкости и сохранения вихря вдоль траектории.