

5. Генлейн А. Распад струи жидкости.— В кн.: Двигатели внутреннего сгорания. Т. 1. М.—Л.: ОНТИ, 1936.
 6. Иванов В. А. О дроблении жидкой струи.— ПМТФ, 1966, № 4.
 7. Grant R. P., Middleman S. Newtonian jet stability.— AIChE J., 1966, vol. 12, N 4.

УДК 532.526, 530.182

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ КРИТИЧЕСКИЙ СЛОЙ И НЕЛИНЕЙНАЯ СТАДИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПЛОСКОМ ТЕЧЕНИИ ПУАЗЕЙЛЯ

В. П. Реутов
(Горький)

Одно из перспективных направлений в нелинейной теории неустойчивости сдвиговых течений связано с исследованием критического слоя (КС) [1—6]. Наиболее детально в настоящее время изучены стационарные волны с вязким нелинейным КС [2, 3]. Анализ нестационарных процессов, представляющих основной практический интерес, проводился при значительных упрощающих ограничениях [4—6]. Так, нелинейное развитие волны в канале и в пограничном слое рассматривалось лишь в предельном случае сильнонелинейного КС, близкого к стационарному [5]. Однако для решения проблемы возникновения турбулентности в этих течениях необходимо иметь представление об эволюции первоначально линейной волны.

Ниже для исследования нелинейной стадии неустойчивости в плоском течении Пуазейля используется подход, аналогичный предложенному в [6] для ветровой неустойчивости. Рассматривается развитие длинных волн, которые на плоскости (R, α) (α — волновое число, R — число Рейнольдса) изображаются точками в окрестности верхней ветви нейтральной кривой линейной теории. Для таких волн оказывается возможным независимое рассмотрение КС и вязких областей вблизи стенок канала. На основе анализа нестационарного КС получены уравнения, описывающие развитие волны во времени. Прослеживается переход от линейного вязкого КС к сильнонелинейному по мере нарастания амплитуды волны.

Как известно, проблемы устойчивости систем с гидродинамическими потоками во многом аналогичны тем, что возникают при анализе взаимодействия волна — частица в плазме [7—9]. В данной работе на основе плазменно-гидродинамической аналогии дается определение энергии волны в течении Пуазейля, позволяющее интерпретировать полученные результаты с позиций общей теории волн.

1. Исходные соотношения. Запишем уравнения для вязкой несжимаемой жидкости в виде [10]

$$(1.1) \quad \partial \zeta / \partial t + u \partial \zeta / \partial x + v \partial \zeta / \partial y = \nu \Delta \zeta;$$

$$(1.2) \quad \Delta \Psi = -\zeta,$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$; ζ — завихренность течения; Ψ — функция тока, введенная соотношениями $u = \partial \Psi / \partial y$, $v = -\partial \Psi / \partial x$; $\nu = 1/R \ll 1$ — обратное число Рейнольдса (все переменные предполагаются приведенными к безразмерной форме). Полагая

$$\Psi = \int U(y) dy + \psi,$$

где $U(y) > 0$ — профиль скорости в стационарном течении Пуазейля между стенками $y = 0$ и $y = 2$, получим следующее уравнение для ψ :

$$(1.3) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta \psi - U'' \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \nu \Delta^2 \psi$$

(штрихи означают производные по y). Рассматривая периодические по x волны, будем обозначать переменной с индексом n ($n = 1, 2, \dots$) комплексные амплитуды фурье-гармоник: $\psi_n(y, t) = \langle \psi \exp(-in\alpha \xi) \rangle$ и т. п., где $\xi = x - ct$, c — фазовая скорость волны, $\langle \dots \rangle$ — среднее по периоду. В линейном приближении профиль $\psi_1(y)$ нейтральной синусоидальной волны в идеальной жидкости удовлетворяет уравнению Рэлея [10]. Профиль завихренности в такой волне можно представить в виде

$$(1.4) \quad \zeta_1 = -[U''/(U - c)]\psi_1.$$

В резонансной точке $y = y_c$ ($U(y_c) = c$) функция ψ_1 ограничена, и, следовательно, ξ_1 терпит разрыв. Масштабы узких критических слоев, образующихся в окрестности $y = y_c$ при учете нестационарности волны, вязкости или нелинейности можно представить соответственно в виде [2-6]

$$d_t = \gamma_c / \alpha U'_c, \quad d_l = (\nu / \alpha U'_c)^{1/3}, \quad d_n = (B / U'_c)^{1/2},$$

где $U'_c = U'(y_c)$; $\gamma_c = |\psi_c^{-1} d\psi_c / dt|$; $\psi_c = \psi_1(y_c, t)$; $B = 2|\psi_c|$ — амплитуда пульсаций функции тока при $y = y_c$. Далее будем рассматривать течения с изолированным КС, масштаб которого $d_c = \max(d_t, d_l, d_n)$ мал по сравнению с расстоянием до стенок канала. При этом всюду, за исключением области КС и вязких областей вблизи стенок канала, слабую нестационарность волны, вязкость и нелинейность можно учесть в рамках теории возмущений.

2. Нестационарный критический слой. Рассмотрим КС в волне с медленно меняющейся амплитудой ($\gamma_c \ll \alpha c$). Введем, следуя [2, 3], малый параметр ε , определяющий порядковое значение амплитуды колебаний ψ . Для упрощения анализа примем, что процесс характеризуется масштабами d_t и d_l , которые по порядку величины совпадают с масштабом нелинейного КС $d_n \sim \varepsilon^{1/2}$. Соответственно введем нормированную вязкость $\bar{\nu} = \nu / \varepsilon^{3/2} \sim 1$ и медленное время $\tau = \varepsilon^{1/2} t$. Внешние решения (1.3) будем строить в виде ряда по степеням малого параметра $\varepsilon^{1/2}$:

$$(2.1) \quad \psi = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} (A_{n+}^{(0)} \varphi_{an} + B_{n\pm}^{(0)} \varphi_{bn}) e^{in\alpha\xi} + \text{к. с.} + \varepsilon^{3/2} \psi^{(1)} + \dots,$$

где $\varphi_{an} = \varphi_a(n\alpha, c; y)$, $\varphi_{bn} = \varphi_b(n\alpha, c; y)$ — функции Толлмина [3, 6]; $A_{n\pm}^{(0)}(\tau)$ и $B_{n\pm}^{(0)}(\tau)$ — комплексные коэффициенты; индексы (+) относятся к значениям величин в областях $y > y_c$ и $y < y_c$ соответственно; к. с. означает комплексно-сопряженное выражение. Подставляя (2.1) в (1.3), получим для амплитуд $\psi_n^{(l)}$ уравнения вида

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 \psi_n^{(l)}}{\partial y^2} - \left(n^2 \alpha^2 + \frac{U''}{U - c} \right) \psi_n^{(l)} = F_n^{(l)},$$

где $F_n^{(l)}$ выражаются через члены ряда (2.1), номера которых меньше l , в частности,

$$(2.3) \quad F_n^{(1)} = - \frac{U''}{in\alpha(U - c)^2} \left(\frac{dA_{n\pm}^{(0)}}{d\tau} \varphi_{an} + \frac{dB_{n\pm}^{(0)}}{d\tau} \varphi_{bn} \right).$$

Решение (2.2) напишем в форме

$$(2.4) \quad \psi_n^{(i)} = A_{n\pm}^{(i)} \varphi_{an} + B_{n\pm}^{(i)} \varphi_{bn} + \varphi_{an} \int \varphi_{bn} F_n^{(i)} dy - \varphi_{bn} \int \varphi_{an} F_n^{(i)} dy,$$

где $A_n^{(i)}$ и $B_n^{(i)}$ — комплексные коэффициенты. Рассмотрим поведение решения (2.1) вблизи резонансной точки. Принимая во внимание структуру функций Толлмина при $\eta = y - y_c \rightarrow 0$, можно видеть, что интегралы в (2.4) представляются в виде разложений по степеням η и $\ln |\eta|$. Условимся выбирать постоянные интегрирования так, чтобы эти разложения не содержали констант. Тогда для $\psi_n^{(1)}$ получим

$$(2.5) \quad \psi_n^{(i)} = A_{n\pm}^{(1)} \varphi_{a1} + B_{n\pm}^{(i)} \varphi_{b1} + \frac{1}{i\alpha n} \frac{\partial B_{n\pm}^{(0)}}{\partial \tau} (\ln |\eta| + 1) + O(\eta \ln |\eta|).$$

Следуя общей схеме метода сращиваемых асимптотических разложений, перейдем во внешнем решении при $\eta \rightarrow 0$ к переменной КС $Y = \eta / \varepsilon^{1/2}$. В результате для амплитуд гармоник функции тока получается следующую

щее представление при $Y \rightarrow \pm\infty$:

$$(2.6) \quad \Psi_n = \varepsilon B_{n\pm}^{(0)} + \varepsilon^{3/2} \ln \varepsilon^{1/2} \left[\frac{U_c''}{U_c'} B_{n\pm}^{(0)} Y + \frac{1}{i\alpha n} \frac{U_c''}{U_c'^2} \frac{dB_{n\pm}^{(0)}}{d\tau} \right] + \varepsilon^{3/2} \left[\frac{U_c''}{U_c'} B_{n\pm}^{(0)} \times \right. \\ \left. \times Y \ln |Y| + A_{n\pm}^{(0)} Y + B_{n\pm}^{(1)} + \frac{1}{i\alpha n} \frac{U_c''}{U_c'} \frac{dB_{n\pm}^{(0)}}{d\tau} (\ln |Y| + 1) + O(1/Y) \right] + \dots,$$

где $U_c'' = U''(y_c)$. Чтобы найти величины $O(1/Y)$, входящие в (2.6) при $\varepsilon^{3/2}$, необходимо рассмотреть $\Psi^{(l)}$ при $l \geq 2$. Внешнее разложение среднего от полной функции тока принимает вид

$$(2.7) \quad \langle \Psi \rangle = \varepsilon^{1/2} cY + \varepsilon \frac{1}{2} U_c' Y^2 + \varepsilon^{3/2} \left[\frac{i}{6} U_c'' Y^3 + O(1/Y) \right] + \dots$$

В области КС перейдем в систему отсчета нейтральной волны и положим $\xi = -U_c' + \varepsilon^{1/2} \Omega$. Решение будем искать в виде

$$(2.8) \quad \Psi = \varepsilon^{1/2} cY + \varepsilon \Psi^{(1)} + \varepsilon^{3/2} \ln \varepsilon^{1/2} \Psi^{(2)} + \varepsilon^{3/2} \Psi^{(3)} + \dots$$

Определяя $\Psi^{(1)}$, $\Psi^{(2)}$ и сращивая разложения (2.7), (2.8) и (2.6) в порядках ε и $\varepsilon^{3/2} \ln \varepsilon^{1/2}$ при $Y \rightarrow \pm\infty$, получим

$$(2.9a) \quad B_{n+}^{(0)} = B_{n-}^{(0)} \equiv B_n^{(0)}, \\ \Psi^{(1)} = \frac{1}{2} U_c' Y^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} (B_n^{(0)} e^{i\alpha \xi}), \quad \Psi^{(2)} = \\ = \frac{U_c''}{U_c'} B_n^{(0)} Y + \frac{1}{i\alpha n} \frac{U_c''}{U_c'^2} \frac{dB_n^{(0)}}{d\tau};$$

$$(2.9b) \quad \partial^2 \Psi^{(3)} / \partial Y^2 = -\Omega.$$

Для завихренности на временах $t \sim 1/\varepsilon^{1/2}$ из (1.1) следует уравнение

$$(2.10) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = v \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} - U_c' Y \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} [i\alpha B_n^{(0)} e^{i\alpha \xi}] \frac{\partial \Omega}{\partial Y}.$$

Эволюция завихренности происходит в поле скоростей, определенном функцией тока (2.9a). Продольная компонента поля скорости задается первичным течением в окрестности резонансной точки, а поперечная — определяется внешним невязким решением при $y \rightarrow y_c$. Используя (2.6), скачки $A_{n+}^{(0)} - A_{n-}^{(0)}$, $B_{n+}^{(1)} - B_{n-}^{(1)}$ можно выразить через значения $\Psi_n^{(3)}$ и $\partial \Psi_n^{(3)} / \partial Y$ при $Y \rightarrow \pm\infty$. Учитывая затем (2.9b), получим

$$(2.11a) \quad A_{n+}^{(0)} - A_{n-}^{(0)} = - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \Omega_n dY;$$

$$(2.11b) \quad B_{n+}^{(1)} - B_{n-}^{(1)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left(Y \Omega_n + \frac{U_c''}{U_c'} B_n^{(0)} \right) dY.$$

Умножим (2.10) на $\exp(-i\alpha \xi)$, усредним полученное уравнение по периоду волны и проинтегрируем по Y от $-\infty$ до $+\infty$. Используя далее (2.6), (2.7), преобразуем (2.11b) к виду

$$(2.12) \quad B_{n+}^{(1)} - B_{n-}^{(1)} = - \frac{1}{i\alpha U_c'} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_n dY.$$

В отличие от внешних разложений для стационарной задачи, построенных в работе [3], (2.6), (2.7) содержат производные от амплитуд по времени и учитывают наличие кратных гармоник. Подчеркнем, что в

(2.1) не входят члены $\sim \varepsilon^{1/2}$, которые в стационарной теории описывают деформацию первичного течения, вызванную скачком средней завихренности при переходе через КС (см. соотношения (2.3), (2.4) в работе [3]). Для выяснения вопроса об изменении средней завихренности в нестационарном КС учтем, что решение (2.10), которое описывает при $Y \rightarrow \pm\infty$ переход к течению с $\langle \Omega \rangle = -U_c'' Y + H_{\pm}(\tau)$, можно построить в виде

$$(2.13) \quad \Omega \rightarrow -U_c'' Y + H_{\pm}(\tau) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{K_l(\xi, \tau)}{Y^l},$$

где K_l — периодические функции ξ . Подставляя (2.13) в (2.10) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях Y , получим для H_{\pm} уравнения $dH_{\pm}/d\tau = 0$ и найдем K_l в явном виде. Будем считать, что в начальный момент амплитуда волны достаточно мала. Тогда при $\tau = 0$ среднее течение совпадает с первичным и $H_{\pm}(\tau) \equiv 0$. Отсутствие предельного перехода к стационарному КС объясняется тем, что при $dB_n^{(0)}/d\tau \rightarrow 0$ края ступеньки на профиле $\langle \Omega \rangle + U_c'' Y$ «заваливаются» при ограниченном $|Y|$.

Согласно (2.10), даже в случае синусоидальной волны ($B_n^{(0)} = 0$ при $n = 2, 3, \dots$) амплитуды гармоник завихренности $|\Omega_n|$ в нелинейном КС — величины одного порядка. При этом из (2.11а) следует, что для сращивания внешних и внутренних разложений в главную часть (2.1) следует в общем случае включить гармоники с номерами $n \geq 2$.

В теории гидродинамической неустойчивости принято сводить обход особенности в уравнении Рэлея к скачку фазы логарифма, входящего в ψ_b . Используя (2.1), (2.11а), получим для гармоники с номером $n = 1$

$$(2.14) \quad \Phi = \frac{U_c'}{U_c''} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{B_1^{(0)}} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_1 dY \right],$$

где Φ — уменьшение фазы логарифма при переходе от $y_c - 0$ к $y_c + 0$.

3. Длинноволновые возмущения. Учет вязкого подслоя. Будем рассматривать волны с симметричным профилем ψ_n и соответственно строить решение на полуширине канала $0 < y < 1$. Краевая задача значительно упрощается, когда резонансная точка близка к границе ($y_c \ll 1$). Покажем, что в этом случае во внешних областях волна почти синусоидальна. Будем пока пренебрегать прилипанием жидкости к стенкам канала. Естественно предположить, что уравнение (2.10) и условия сращивания (2.11а), (2.12) будут выполняться, если КС изолирован от границы ($d_c/y_c \ll 1$). Используя явный вид φ_a и φ_b , можно убедиться, что при $U_c \sim U_c'' \sim 1$ коэффициенты $A_1^{(0)}$ и $B_1^{(0)}$ сильно различаются по величине: $|B_1^{(0)}/A_1^{(0)}| \sim y_c \ll 1$. В центральной зоне КС в соответствии с (1.4) положим $|\zeta_1| \sim \varepsilon |B_1^{(0)}|/d_c$. При этом получается оценка

$$(3.1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_1 dY \sim B_1^{(0)}.$$

В результате приходим к соотношениям

$$(3.2) \quad |A_{1+} - A_{1-}| \ll |A_{1\pm}|, \quad |B_{1+} - B_{1-}| \ll |B_{1\pm}|,$$

где $A_{1\pm} = \varepsilon A_{1\pm}^{(0)}$; $B_{1\pm} = \varepsilon B_{1\pm}^{(0)} + \varepsilon^{3/2} B_{1\pm}^{(1)}$. С физической точки зрения неравенства (3.2) соответствуют малому вкладу резонансных с волной вихрей в пульсации скорости во внешних областях. В этой связи ясна роль КС как источника кратных гармоник. Кратные гармоники малы, когда они оказываются вынужденными волнами течения (c не является собственным значением краевой задачи с волновым числом $n\alpha$). Действительно, принимая в вынужденном решении $|A_{n\pm}| \sim |A_{n+} - A_{n-}|$, получим оценки вклада кратных гармоник в (2.1): $|A_{n\pm}| \sim |B_{1\pm}| \ll |A_{1\pm}|$, $|B_{n\pm}| \sim y_c |A_{n\pm}| \ll |B_{1\pm}|$ при $n \geq 2$.

Условие близости резонансной точки к стенке канала в плоском течении Пуазейля выполнено для длинных волн ($\alpha^2 \ll 1$). Найдем сначала нейтральные линейные волны в идеальном течении, для которых правило обхода особенности имеет вид $A_{1+} = A_{1-}$, $B_{1+} = B_{1-}$ (такое правило равносильно обходу особенности в уравнении Рэлея в смысле главного значения). Краевые условия запишем в виде $\psi_1(0) = \psi_1'(1) = 0$. Используя метод сращиваемых разложений, можно найти фазовую скорость волны c и амплитудный профиль функции тока $f(y)$:

$$(3.3a) \quad c = \frac{\alpha^2}{U_0'} \int_0^1 U^2 dy;$$

$$(3.3b) \quad f(y) = \begin{cases} k_a \varphi_a(\alpha, c; y) + k_b \varphi_b(\alpha, c; y), & 0 < y < 1, \\ U(y) + O(\alpha^2), & \alpha^2 \ll y \leq 1, \end{cases}$$

где $k_a \approx U_0'$; $k_b \approx c$; $U_0' = U'(0) \approx U_c' > 0$. Условие близости резонансной точки к границе и ограничение на масштаб КС принимают вид

$$(3.4) \quad y_c = c/U_0' \sim \alpha^2 \ll 1, \quad U_0' d_c / c \ll 1.$$

В вязком течении вблизи стенок возникает другая особая область — вязкий подслой (ВП) [1]. Вдали от границы нейтральную волну можно по-прежнему описывать уравнением Рэлея, если воспользоваться крайним условием [5]

$$(3.5) \quad \psi_1 = -(i+1) \kappa \psi_1' |_{y=0},$$

где $\kappa = (\nu/2\alpha c)^{1/2}$ — масштаб линейного ВП. Слабая нестационарность волны приводит к малым поправкам в (3.5). Данное выше рассмотрение КС остается в силе, когда области КС и ВП изолированы:

$$(3.6) \quad \kappa/y_c \ll 1.$$

4. Взаимодействие волны с критическим слоем и с вязким подслоем. Учитывая слабое влияние КС и ВП на структуру волны во внешних областях, нестационарное решение (1.3) при $|\eta| \gg d_c$ представим в виде

$$(4.1) \quad \psi = (1/2) a f(y) e^{i\alpha \xi} + \text{к. с.} + w,$$

где w — малая добавка; $a(t)$ — медленно меняющаяся комплексная амплитуда волны

$$(4.2) \quad |a^{-1} da/dt| = \gamma_c \ll \alpha c.$$

Подставляя (4.1) в (1.3) и пренебрегая нелинейными и вязкостными членами, получим для $w_1 = \langle w \exp(-i\alpha \xi) \rangle$ уравнение

$$(4.3) \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - \left(\alpha^2 + \frac{U''}{U-c} \right) w_1 = -\frac{1}{2} \frac{da}{dt} \frac{U'' f}{i\alpha(U-c)^2}.$$

Решение (4.3) представим в форме $w_1 = A_w^\pm \varphi_a + B_w^\pm \varphi_b + \tilde{w}$, где $|A_w^\pm| \ll k_a |a|$, $|B_w^\pm| \ll k_b |a|$, \tilde{w} — частное решение (4.3). Функцию \tilde{w} построим так же, как несобственную часть решения (2.4). Тогда $A_{1\pm} = \frac{1}{2} a k_a + A_w^\pm$, $B_{1\pm} = \frac{1}{2} a k_b + B_w^\pm$ и правило обхода особенности в (4.3) принимает вид

$$(4.4) \quad A_w^+ - A_w^- = -\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_1 dY, \quad B_w^+ - B_w^- = -\frac{\varepsilon^{3/2}}{i\alpha U_c'} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_1 dY.$$

Из условия симметрии профиля $\psi_1(y)$ и из (3.5) следуют краевые условия

$$(4.5) \quad w' = 0|_{y=1}, \quad w = -(1/2)(i+1)\kappa f'a|_{y=0}.$$

Порождаемая (4.3), (4.4) и (4.5) однородная краевая задача имеет нетривиальные решения вида (3.3). Для вывода соотношения ортогональности

умножим (4.3) на $f(y)$ и проинтегрируем по областям $0 < y < y_c - \delta$, $y_c + \delta < y < 1$, где δ — бесконечно малая положительная величина. Выполняя интегрирование по частям, учитывая (4.4) и используя для преобразования вклада \tilde{w} постоянство вронскиана $\Phi_a' \Phi_b - \Phi_b' \Phi_a = 1$, получим

$$(4.6) \quad \frac{U_0'}{2i\alpha} \frac{da}{dt} = -k_b (A_w^+ - A_w^-) + k_a (B_w^+ - B_w^-) - \frac{1}{2} a (i + 1) \kappa f^2(0).$$

При выводе (4.6) учтено соотношение

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_0^1 \frac{U'' f^2}{(U - c)^2} dy - \frac{2k_b^2 U_c''}{U_c'^2 \delta} \right\} \approx -U_0'.$$

где из интеграла исключена область $y_c - \delta < y < y_c + \delta$. Условия (4.2), (3.1) позволяют пренебречь в (4.6) вкладом $B_w^+ - B_w^-$. В результате для комплексной амплитуды волны получим уравнение

$$(4.7) \quad \frac{da}{dt} = (1 - i) \alpha \kappa U_0' a + \frac{2i\alpha c}{U_0'} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon \Omega_1 dY.$$

Из уравнения (4.7), (2.10) можно исключить постоянную поправку к частоте $\Delta\omega = \alpha \kappa U_0'$, вызванную вязким взаимодействием волны со стенками канала. Для этого достаточно перейти к новым переменным

$$a_N = a \exp(i\Delta\omega t), \quad \xi_N = \xi - (\Delta\omega/\alpha) t, \quad \eta_N = \eta - \Delta\omega/\alpha U_c'.$$

Возвращаясь в (2.10), (4.7) к ненормированным переменным и опуская индекс N , получим окончательно

$$(4.8) \quad dA/dt = (\gamma_V + (1/\pi)\gamma_L \Phi)A;$$

$$(4.9) \quad \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial \eta^2} - U_c' \eta \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \xi} - \alpha B \sin \alpha \xi \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \eta},$$

где $A = |a|$ — амплитуда волны; $\gamma_L = -\pi \frac{\alpha c U_c''}{U_c'^2}$; $\gamma_V = U_0' (\nu \alpha / 2c)^{1/2}$;

амплитуда пульсаций функции тока в КС $B = cA$; $\tilde{\zeta}$ — отклонение завихренности от значения в первичном течении на уровне $U = c + (\Delta\omega/\alpha)$;

$$\Phi = -\frac{2U_c'}{U_c'' R} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{\zeta} \sin \alpha \xi \rangle d\eta$$

— скачок фазы логарифма (2.14), выраженный через переменные $\tilde{\zeta}$ и A . В (4.8) используются решения (4.9) с асимптотиками при $\eta/d_c \rightarrow \pm\infty$, аналогичными (2.13). При выводе (4.8), (4.9) учтено соотношение симметрии $\tilde{\zeta}(\xi, \eta, t) = -\tilde{\zeta}(-\xi, -\eta, t)$, благодаря которому фаза волны постоянна (без ущерба общности принято $\arg a_N = 0$).

В соответствии с (4.8) инкремент волны $\gamma = A^{-1} dA/dt$ состоит из двух частей. Первая из них (γ_V) определяется вязким взаимодействием волны со стенками канала и положительна, вторая — пропорциональна скачку фазы логарифма, индуцированному завихренностью в области КС. Условия применимости полученных уравнений сводятся к неравенствам (3.4), (3.6) и (4.2). Как следует из (3.6), при фиксированном $\alpha^2 \ll 1$ вязкость должна быть достаточно малой ($\nu \ll 2\alpha c^3 / U_0'^2 \sim \alpha^7$). Последнее согласуется с известным выводом линейной теории о том, что вблизи асимптоты нижней ветви нейтральной кривой ($\nu \sim \alpha^7$) КС и ВП образуют одну вязкую область [11].

5. Взаимодействие волна — частица. Энергетические соотношения. При $\nu = 0$ система (4.8), (4.9) с точностью до обозначений совпадает

с уравнениями, описывающими нелинейное затухание Ландау электростатических волн в плазме [12—15]. При этом профиль завихренности в КС играет роль плазменной функции распределения резонансных частиц по скоростям.

Плазменно-гидродинамическая аналогия позволяет построить энергетические соотношения для длинных волн в канале в духе общей теории волн. Согласно [16], энергия плазменной волны определяется без учета резонансных частиц. Назовем соответственно энергией гидродинамической волны приращение энергии течения во внешних (по отношению к КС и ВП) областях, которое возникает при возбуждении данной волны. Поскольку $\bar{u} = \langle u \rangle - U \ll U$, можно записать нормированную плотность энергии в виде

$$H = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \langle u_{\sim}^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle v_{\sim}^2 \rangle + U \bar{u} \right) dy,$$

где $u_{\sim} = u - \langle u \rangle$; $v_{\sim} = v - \langle v \rangle \equiv v$ и из интеграла исключены области КС и ВП, границы которых соответственно $y = y_c \pm \delta_c(x, t)$ и $y = \delta_+(x, t)$ — материальные линии, причем $d_c \ll \delta_c \ll y_c$, $\kappa \ll \delta_* \ll y_c$. Найдем явный вид H косвенным путем — с помощью законов сохранения и уравнения (4.7). Интегрируя по внешним областям уравнение баланса энергии в идеальном течении [17], получим

$$(5.1) \quad \frac{\partial H}{\partial t} = c \langle u_{\sim} v_{\sim} \rangle \Big|_{y_c - \delta_c}^{y_c + \delta_c} + c \langle u_{\sim} v_{\sim} \rangle_{y = \delta_*}.$$

При выводе (5.1) мы пренебрегли изменением U , v_1 и профиля пульсаций давления поперек КС, а также нестационарностью волны вблизи стенки канала. Как следует из (5.1), мощность, поступающая в волну, определяется скачками напряжений Рейнольдса на особых областях. Скачок u_1 при переходе через КС находится из (1.2), а напряжение Рейнольдса на границе ВП можно вычислить, используя (3.5); тогда

$$(5.2) \quad \langle u_{\sim} v_{\sim} \rangle \Big|_{y_c - \delta_c}^{y_c + \delta_c} = - \int_{-\delta_c}^{\delta_c} 2 \operatorname{Re} (\zeta_1 v_1^*) d\eta;$$

$$(5.3) \quad \langle u_{\sim} v_{\sim} \rangle_{y = \delta_*} = - \frac{1}{2} \kappa \alpha U_0'^2 |a|^2.$$

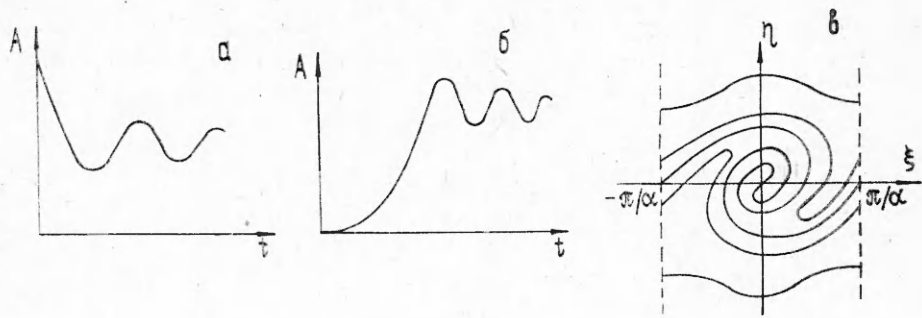
Сопоставление (5.1)—(5.3) и выражения для $d|a|^2/dt$, следующего из (4.7), позволяет записать энергию волны в виде

$$H = - \frac{1}{4} c U_0' A^2.$$

Энергия волны оказалась отрицательной *. В работе [18] отмечалось, что волны в идеальном течении Пуазейля с кусочно-линейным профилем скорости обладают отрицательной энергией. Полученный нами вывод дает основание рассматривать модель течения с кусочно-линейным профилем скорости как идеализацию реального потока, соответствующую на языке теории волн приближению прозрачной среды [19]. Последнее, однако, справедливо лишь для волн в окрестности верхней ветви нейтральной кривой.

Данное выше определение энергии позволяет интерпретировать поведение волны при взаимодействии с особыми областями. В соответствии с (5.1), (5.3) усиление волны при взаимодействии с ВП есть неустойчивость волны с отрицательной энергией в системе с положительной диссипацией [16]. Для выяснения роли КС рассмотрим линейные волны в идеальной жидкости ($\nu = 0$). Положим в (4.9) $\zeta = -U_c'' \eta + \zeta_{\sim}$ и линеаризуем это

* Волны с отрицательной энергией в гидродинамике впервые были рассмотрены, по-видимому, в работе [20].



Ф и г. 1

уравнение по амплитуде колебаний. Решая затем (4.8), (4.9) методом преобразования Лапласа (аналогично см. [6]), можно показать, что при $t \rightarrow \infty$ скачок фазы логарифма $\Phi \rightarrow -\pi$ и $A \sim \exp(-\gamma_L t)$. Таким образом, γ_L в (4.8) есть декремент затухания Ландау.

Волна затухает при $U_c'' < 0$ и усиливается при $U_c'' > 0$. Как отмечалось в [9], при $U_c'' < 0$ в окрестности резонансной точки в невозмущенном потоке имеется инверсия распределения жидких частиц по скоростям, которая приводит к отрицательной диссипации энергии волны; волна с отрицательной энергией в этих условиях должна затухать ($\gamma_L > 0$). Когда $U_c'' > 0$, диссипация положительна и развивается неустойчивость.

Для анализа нелинейного затухания (усиления) волны в невязком течении также воспользуемся результатами теории плазменных волн. В целях сопоставления с плазменной задачей следует учесть, что уравнение (4.9) при $\nu = 0$ выражает закон сохранения вихря жидкими частицами. Траектории частиц находятся из уравнений

$$d\xi/dt = U_c' \eta, \quad d\eta/dt = \alpha c A \sin \alpha \xi.$$

Линии тока на плоскости (ξ, η) имеют характерную форму «кошачьи глаза». При $A = \text{const}$ в окрестности «зрачков» частицы совершают вращения с частотой $\omega_{tr} = \alpha (c U_c' A)^{1/2}$. Когда возмущения завихренности в области КС в начальный момент малы ($\tilde{\zeta}(0, \xi, \eta) \approx -U_c'' \eta$), в соответствии с выводами плазменной теории [14] амплитуда сильной волны ($\omega_{tr}(t=0) \gg \gamma_L$) при $U_c'' < 0$ затухает, как показано на фиг. 1, а. Стабилизация неустойчивости слабой волны ($\omega_{tr}(t=0) \ll \gamma_L$) при $U_c'' > 0$ иллюстрируется фиг. 1, б. Оценку для максимальной амплитуды можно получить из условия $\gamma_L \sim \omega_{tr}$. Материальные линии, имевшие при $t = 0$ форму прямых $y = C$, после ограничения неустойчивости превращаются в сильно закрученные спирали (фиг. 1, в)*, являющиеся также линиями уровня завихренности ($\tilde{\zeta} = -U_c'' C$).

6. Нейтральная кривая линейной теории. Исследование неустойчивости в приближении идеальной жидкости представляет интерес для выяснения возможного поведения системы. Однако в реальном течении Пуазейля вязкость играет существенную роль. Покажем, что уравнения (4.8), (4.9) приводят к известному выражению для асимптоты верхней ветви нейтральной кривой.

При $d_n \ll d_l$ стационарные в системе отсчета волны профили $\tilde{\zeta}$ будем искать в виде разложения по амплитуде волны:

$$(6.1) \quad \tilde{\zeta} = -U_c'' \eta + \zeta^{(1)} + \zeta^{(2)} + \zeta^{(3)} + \dots$$

* Аналогичная картина получена в [4] для слоя сдвига и в [6] для ветровых волн.

В первом приближении из (4.9) получается известное в линейной вязкой теории КС уравнение для амплитудного профиля завихренности:

$$(6.2) \quad \frac{\partial^2 \zeta_1^{(1)}}{\partial Y_0^2} - i Y_0 \zeta_1^{(1)} = \frac{1}{2} i \frac{U_c'' B}{U_c' d_l},$$

где $Y_0 = \eta/d_l$. После перехода к фурье-представлению по переменной Y_0 (6.2) принимает вид

$$(6.3) \quad \frac{dG}{dq} + q^2 G = -\frac{1}{2} i \frac{U_c'' B}{U_c' d_l} \delta(q) \left[G = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1^{(1)} e^{iqY_0} dY_0 \right],$$

где $\delta(q)$ — дельта-функция. Решение (6.3) запишем в виде

$$G = -\frac{1}{2} i \frac{U_c'' B}{U_c' d_l} \int_{-\infty}^q \delta(q') \exp[q'^3/3 - q^3/3] dq'.$$

Учитывая далее соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1^{(1)} d\eta = 2\pi d_l G(0),$$

получим, как и в невязкой задаче, $\Phi = -\pi$ и при $U_c' < 0$ формулу Лина для асимптоты верхней ветви нейтральной кривой:

$$v = \frac{2\pi^2 \alpha c^5 U_c''^2}{U_c'^6} \sim \alpha^{11}.$$

Фазовая скорость волны (3.3а) также совпадает с найденной Линем.

7. Квазистационарное приближение. Развитие неустойчивости в вязком течении. При постоянной амплитуде волны диффузионно-диссипативные процессы стремятся стабилизировать распределение $\tilde{\zeta}$ в области КС. В предположении об устойчивости стационарных решений (4.9) и при условии достаточно быстрого их установления в (4.9) можно пренебречь $\tilde{\zeta}_t$ и воспользоваться для решения нестационарной задачи результатами исследования стационарных КС [2, 3].

Полагая в (4.9) $\partial/\partial t = 0$ и переходя к переменным

$$(7.1) \quad X = \alpha x, \quad Y_* = \eta/d_n, \quad \bar{\Omega} = \tilde{\zeta}/U_c'' d_n,$$

получим уравнение для нелинейного стационарного КС, исследованное в [3]:

$$Y_* \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial X} + \sin X \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial Y_*} = \lambda_c \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial Y_*^2},$$

где $\lambda_c = (d_l/d_n)^3$. После перехода к нормированным времени и амплитуде

$$\tau_* = (|\gamma_L|/\pi) t, \quad s = \frac{1}{\lambda_c^{2/3}} = \left(\frac{\alpha}{v} \right)^{2/3} \frac{c}{U_c'^{1/3}} A$$

уравнение (4.8) преобразуется к виду *

$$(7.2) \quad \frac{ds}{d\tau_*} = s [\beta - \Phi(s) \operatorname{sgn} U_c''],$$

где $\Phi = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \langle \bar{\Omega} \sin X \rangle dY_*$ — скачок фазы логарифма, записанный в

* Отметим, что в работе [5] исследовались волны с сильнонелинейным КС, нарастание которых связывалось с учетом нестационарности КС в системе отсчета волны. В нашем подходе решения такого типа можно получить, пренебрегая в (7.2) членом $ds/d\tau_*$ и учитывая изменение Φ , обусловленное вкладом $\tilde{\zeta}_t$ в (4.9). В отличие от [5] предлагаемый в данной работе метод анализа позволяет рассмотреть формирование в волне нелинейного КС.

переменных (7.1)*; $\beta = \pi\gamma_V/|\gamma_L|$. Для отыскания Φ при $s \ll 1$ можно воспользоваться процедурой теории возмущений, описанной в п. 6. Вычисляя $\zeta^{(2)}$ и $\zeta^{(3)}$, получим

$$\Phi = -\pi + ks^2 \left[k = \frac{\pi}{6} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \Gamma(1/3) \approx 1,6 \right],$$

где $\Gamma(1/3)$ — значение гамма-функции. Согласно [3], $\Phi \rightarrow -4,2 s^{-3/2}$ при $s \gg 1$. На фиг. 2 показан график $\Phi(s^2)$, построенный по данным [3]. Можно показать, что при любых значениях s функция Φ хорошо аппроксимируется простой формулой

$$\Phi = -\pi / (1 + (4k/3\pi)s^2)^{3/4}.$$

Описание нелинейного КС в рамках уравнения (7.2) не противоречит условию изолированности областей КС и ВП в широком диапазоне изменения амплитуд, поскольку для волн в окрестности верхней ветви нейтральной кривой ($\beta \sim 1$) это условие принимает вид $d_n/y_c \sim \alpha^{4/3}s^{1/2} \ll 1$.

Рассмотрим развитие неустойчивости в стационарном вязком течении Пуазейля $U = 1 - (1 - y)^2$. В области выше асимптоты верхней ветви нейтральной кривой линейной теории ($0 < \beta < \pi$) уравнение (7.2) имеет два состояния равновесия. Одно из них устойчиво и соответствует невозмущенному потоку, другое описывает стационарные волны с конечной амплитудой, построенные в [3]. Такие волны неустойчивы относительно малых возмущений амплитуды. Когда $\beta > \pi$, невозмущенное течение в линейном приближении неустойчиво. Инкремент на начальной стадии неустойчивости при любом β растет с увеличением амплитуды и стремится при $s \rightarrow \infty$ к постоянному значению, что объясняется ослаблением стабилизирующего действия КС. Если бесконечно малые возмущения нарастают ($\beta > \pi$) и неустойчивость на начальной стадии линейна ($ks^2(0) \ll \beta - \pi$), для времени перехода к амплитудам $s \gg 1$ можно получить выражение

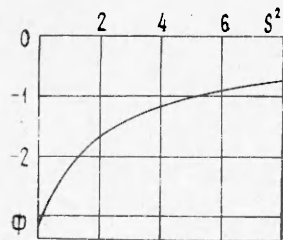
$$(7.3) \quad \tau_* \approx \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{r} \ln s(0) + \frac{1}{r+1} \ln s + C(r) \right],$$

где $r = (\beta/\pi) - 1$ — надкритичность волны; функция $C(r)$ показана на фиг. 3. В случае «чисто взрывной» неустойчивости ($r = 0$) при $s(0) \ll 1$ и $s \gg 1$ получается следующее выражение для τ_* :

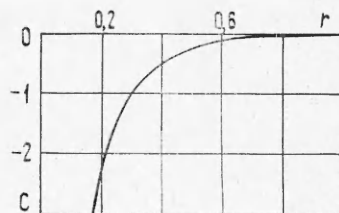
$$(7.4) \quad \tau_* \approx (1/\pi) [0,98/s^2(0) - 1,16 \ln s(0) + \ln s + 0,17].$$

Уравнение (7.2) справедливо, строго говоря, лишь при $d_n \ll y_c$. Однако поведение найденных решений показывает, что рост амплитуды должен привести к слиянию центральной зоны КС с областью ВП, если инкремент β будет оставаться постоянным. Слияние произойдет при $A \sim c/U'_0$ через время, которое можно оценить по формулам (7.3), (7.4).

Обсудим кратко вопрос о пределах применимости квазистационарного приближения для области КС. Примем, что $v \sim \alpha^{11}$, КС нелинейен ($s \geq 1$) и соответственно $\gamma \sim \gamma_V \sim \alpha^5$. Обозначая через k_l ($l = 1-4$) члены в уравнении (4.9) в порядке следования слева направо, получим



Ф и г. 2



Ф и г. 3

* Используя (2.9б), можно показать, что Φ совпадает с введенным в [3].

оценки

$$(7.5) \quad k_1/k_{3,4} \sim \alpha^{2/3}s^{-1/2}, \quad k_1/k_2 \sim \alpha^{2/3}s.$$

При $s \sim 1$ вклад $\tilde{\zeta}_t$ в (4.9) асимптотически мал. В сильнонелинейном КС ($s \gg 1$) на профиле завихренности возникают малые по сравнению с d_n масштабы [2] и оценки (7.5) нуждаются в уточнении.

Остановимся теперь на нелинейных эффектах в ВП, приводящих к нарушению (3.5) и к изменению γ_V . Считая деформацию профиля среднего течения однородной вдоль x , получим для \bar{u} уравнение

$$(7.6) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = - \frac{\partial}{\partial y} \langle u_{\sim} v_{\sim} \rangle.$$

В области, разделяющей КС и ВП, с поперечным размером порядка α^2 выполнено условие $t_d \gamma \sim \alpha^{-2} \gg 1$ ($t_d = (\Delta y)^2/\nu$ — диффузионное время для масштаба Δy). Тогда, пренебрегая в (7.7) диффузионным слагаемым и решая (4.3), можно найти \bar{u} в явном виде

$$(7.7) \quad \bar{u} = \frac{1}{4} \frac{j^2 U''}{(U - c)^2} A^2.$$

Такое же выражение получается для \bar{u} в области, заключенной между КС и серединой канала. Вблизи стенки характерный масштаб $\kappa \sim \alpha^4$ и, следовательно, $t_d \gamma \sim \alpha^2 \ll 1$. При этом в левой части (7.6) оператор можно считать диффузионным и, полагая в соответствии с (3.5) $\psi_1 \sim \kappa A$, получить оценку $\bar{u} \sim A^2/\alpha^2$. Переход к значению $\bar{u} \sim A^2$, определенному (7.7) во внешней области, происходит на интервале $\Delta y \sim \alpha^3 \gg \kappa$, где в (7.6) одинаково важны вязкость и нестационарность. Вывод граничного условия (3.5) основан на использовании в ВП упрощенного уравнения для амплитудного профиля

$$(7.8) \quad d^4 \psi_1 / dy^4 + (i\alpha c/\nu) d^2 \psi_1 / dy^2 = 0.$$

Можно показать, что вклад в (7.8) нелинейных членов и $\bar{u} \neq 0$ нельзя считать малым при $A \sim \alpha^2$, т. е. когда КС сливается с ВП.

Аналогично тому, как выше был рассмотрен профиль \bar{u} вблизи стенок канала, можно проследить за развитием профиля средней завихренности в КС. В ядре нелинейного КС выполняется неравенство $\gamma t_d \sim \alpha^{2/3} \ll 1$, процесс квазистационарен. При этом на профиле средней завихренности возникает ступенька [3]. Во внешних областях $\gamma t_d \gg 1$ и развитие $\langle \tilde{\zeta} \rangle$ определяется «невязкими» уравнениями. Для размера области «завала» краев ступеньки Δy из условия $t_d \sim \gamma$ получается оценка $\Delta y \sim \alpha^3$. Поскольку $\Delta y/d_n \gg 1$, Φ может быть вычислено по стационарной теории.

Выводы, полученные в данной работе для развития волны во времени, можно применить для анализа пространственного нарастания, если воспользоваться заменой $t \rightarrow x/v_g$ (v_g — групповая скорость волны). В случае больших чисел Рейнольдса стационарный профиль в течении Пуазейля обычно не успевает установиться и полученные результаты справедливы в предположении о квазипараллельности потока на нелинейной стадии развития неустойчивости.

Представление о слабом взаимодействии волны с критическим слоем и с вязким подслоем может быть использовано для рассмотрения неустойчивости в пограничном слое. С точки зрения общей теории волн в неравновесных средах представляет интерес тот факт, что энергия гидродинамической волны, определенная с позиций плазменно-гидродинамической аналогии, отрицательна, причем поведение волны находится в согласии со знаком ее энергии.

Поступила 26 V 1981

