тому без детального учета волновой обстановки на пленке можно получать большие разбросы в экспериментальных данных, что и наблюдается в действительности (см., например, [1]).

Эти три фактора в реальных течениях изменяются взаимосвязанно [6]: чем больше амплитуда волны, тем больше ее фазовая скорость и тем сильнее ее форма отличается от синусоидальной. В зависимости от того, какие из этих факторов окажут большее влияние, можно наблюдать как уменьшение, так и увеличение массообмена.

В частности, становятся качественно понятны результаты, полученные в работе [1], где показано, что при возбуждении волн разной амплитуды для фиксированного Re с ростом периода волны происходит усиление массообмена. При этом растут также скорость и длина волны, а форма становится все более несинусоидальной. Фиг. 6 показывает, что в рамках данной модели такая ситуация вполне возможна. Здесь скорость и амплитуда волны соответственно равны: кривые *1—4*—2; 2,1; 2,2; 2,326 и 0,4; 0,5; 0,6; 0,71. Форма волн схематично показана справа от каждой кривой.

Из приведенных на фиг. 6 расчетов видно, что если длина рабочего участка будет больше, чем длина максимального в данном примере переходного участка, то получим для отношения $\mathrm{Sh}/\mathrm{Sh}_0$ зависимость от периода, аналогичную наблюдаемой в эксперименте [1]: с ростом периода $\mathrm{Sh}/\mathrm{Sh}_0$ также растет. Подобное поведение $\mathrm{Sh}/\mathrm{Sh}_0$ не удается получить в рамках других моделей, например модели полного перемешивания.

Авторы благодарят П. И. Гешева за полезные замечания и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В.** Десорбция слаборастворимого газа из стекающих волновых пленок жидкости.— В кн.: Расчет тепломассообмена в энергохимических процессах/Под ред. А. П. Бурдукова. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1981.
2. **Seban R. A.** Transport to falling films.— In: Proc. of 6th Int. Heat Transfer Conf. Toronto, 1979, vol. 6. Ottawa, 1979.
3. **Ruckenstein E., Berbente C.** Mass transfer to falling liquid films at low Reynolds numbers.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1968, vol. 11, N 4.
4. **Гешев П. И., Лапин А. М.** Диффузия слаборастворимого газа в стекающих волновых пленках жидкости.— ПМТФ, 1983, № 6.
5. **Цвелодуб О. Ю.** Стационарные бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4.
6. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В.** Стационарные двумерные катящиеся волны на вертикальной пленке жидкости.— ИФЖ, 1976, т. 30, № 5.
7. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. и др.** Мгновенный профиль скорости в волновой пленке жидкости.— ИФЖ, 1977, т. 33, № 3.

Поступила 22/XI 1983 г.

УДК 532.516

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ПОЛОСЫ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. К. Андреев

(Красноярск)

В работе приведен краткий вывод уравнений малых возмущений произвольного неустановившегося движения вязкой несжимаемой жидкости, подверженной действию поверхностных сил. На основе полученных уравнений изучается устойчивость полосы вязкой жидкости.

1. Уравнения на возмущения. Предположим, что функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$ — вектор скорости и давление некоторого неустановившегося движения вязкой несжимаемой жидкости. Движение определено в области $\Omega_t \subset R^3$ с границей Γ_t. Внутри Ω_t $\mathbf{u}$, p удовлетворяют уравнениям

Навье — Стокса

$$(1.1)\qquad \mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + (1/\rho)\nabla p = \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{x},\ t);$$

$$(1.2)\qquad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0,\ \mathbf{x}\in\Omega_t,\ t\geqslant 0,$$

а на Γ_t — условиям

$$(1.3)\qquad (p_0 - p)\mathbf{n} + 2\rho\nu D(\mathbf{u})\mathbf{n} = 2\sigma H\mathbf{n};$$

$$(1.4)\qquad f_t + \mathbf{u}\cdot\nabla f = 0,\ \mathbf{x}\in\Gamma_t,\ t\geqslant 0,$$

где $\nu > 0$, ρ — постоянные вязкость и плотность; $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Γ_t; $\sigma\geqslant 0$ — коэффициент поверхностного натяжения; D — тензор скоростей деформаций с элементами $D_{ij} = (\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)/2$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$; H — средняя кривизна поверхности Γ_t (считается, что $H > 0$, если Γ_t выпукла внутрь жидкости); p_0, $\mathbf{g}$ — заданное внешнее давление и вектор массовых сил. Условие (1.3) выражает равенство всех сил, действующих на свободной границе, а (1.4) означает, что Γ_t состоит из одних и тех же частиц (уравнение $f(\mathbf{x},\ t) = 0$ задает свободную границу Γ_t).

В начальный момент времени

$$(1.5)\qquad \Omega_t|_{t=0} = \Omega,\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}),\ \Gamma_t|_{t=0} = \Gamma$$

и выполнены условия согласования

$$(1.6)\qquad \operatorname{div}\mathbf{u}_0 = 0,\ \boldsymbol{\tau}\cdot D(\mathbf{u}_0)\mathbf{n} = 0,$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — произвольный, касательный к Γ вектор.

Отметим, что при $\sigma = 0$ вопрос об однозначной разрешимости поставленной задачи положительно решен в [1], причем $\mathbf{u}$, p, Γ_t принадлежат некоторым классам Гельдера (см. также [2]).

Пусть известно решение уравнений Навье — Стокса $\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t)$, $p(\mathbf{x},\ t)$ в области Ω_t, удовлетворяющее на Γ_t (1.3), (1.4), начальным условиям (1.5) и условиям согласования (1.6). Если $(\alpha_1,\ \alpha_2)\to\mathbf{x}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ t)|_{t=0}$ — параметрическое задание начальной поверхности $\Gamma\in C^3$, а вектор скорости $\mathbf{u}$ — достаточно гладкая функция, тогда [3] можно считать, что и Γ_t параметризована теми же параметрами $(\alpha_1,\ \alpha_2) : \mathbf{x} = \mathbf{x}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ t)$.

Рассмотрим другое решение $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{p}$ в области $\tilde{\Omega}_t$ с начальным полем $\tilde{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{u}_0 + \mathbf{U}_0$, $\operatorname{div}\mathbf{U}_0 = 0$. Пусть $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{X}(\mathbf{x},\ t)$, $\mathbf{X}$ — вектор смещения частиц жидкости, $\mathbf{X}|_{t=0} = 0$, так что $\tilde{\Omega}_t|_{t=0} = \Omega$. Положим

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}},\ t) + \mathbf{U}(\tilde{\mathbf{x}},\ t),\ \tilde{p} = p(\tilde{\mathbf{x}},\ t) + P_1(\tilde{\mathbf{x}},\ t),\ \tilde{f} = f(\tilde{\mathbf{x}},\ t) + \mathrm{F}(\tilde{\mathbf{x}},\ t),$$

$\mathbf{U}$, P_1, F — возмущения основного решения. Пользуясь методами [3], можно показать, что в линейном приближении

$$(1.7)\qquad \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial(\mathbf{x})}\mathbf{U} + \frac{1}{\rho}\nabla P_1 = \nu\Delta\mathbf{U};$$

$$(1.8)\qquad \operatorname{div}\mathbf{X} = 0;$$

$$(1.9)\qquad \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial(\mathbf{x})}\mathbf{X} + \mathbf{U},\quad \mathbf{x}\in\Omega_t;$$

$$(1.10)\qquad \frac{d}{dt}(F + |\nabla f|R) = 0,\quad R = \mathbf{n}\cdot\mathbf{X},\quad \mathbf{x}\in\Gamma_t,$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla$. Уравнение (1.8) в силу $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ с учетом уравнения (1.9) и легко проверяемого тождества

$$\operatorname{div}\left[\frac{\partial(\mathbf{X})}{\partial(\mathbf{x})}\mathbf{u} - \frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial(\mathbf{x})}\mathbf{X}\right] = \mathbf{u}\cdot\nabla(\operatorname{div}\mathbf{X}) - \mathbf{X}\cdot\nabla(\operatorname{div}\mathbf{u})$$

эквивалентно уравнению

$$(1.8)'\qquad \operatorname{div}\mathbf{U} = 0.$$

Условие (1.3) в отличие от идеальной жидкости имеет векторную форму. При наших предположениях относительно поверхности Γ_t тройка векторов $\mathbf{n}$, $\mathbf{x}_{\alpha 1}$, $\mathbf{x}_{\alpha_2}$ образует локальный базис, вообще говоря, неортогональный, причем векторы $\mathbf{x}_{\alpha_1}$, $\mathbf{x}_{\alpha_2}$ лежат в касательной к Γ_t плоскости. Поэтому (1.3) эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$p_0 - p + 2\rho\nu D(\mathbf{u})\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 2\sigma H; \tag{1.11}$$

$$D(\mathbf{u})\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}_{\alpha_i} = 0, \quad i = 1,2. \tag{1.12}$$

Положим $\mathbf{X}|_{\Gamma_t} = R\mathbf{n} + \mathrm{X}_1$, где X_1 лежит в касательной к Γ_t плоскости. Записывая равенства (1.11), (1.12) на возмущенном решении и линеаризуя, получим на Γ_t

$$-P_1 + 2\rho\nu D(\mathbf{U})\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \left[\frac{\partial p}{\partial n} - 2\rho\nu\frac{\partial D(\mathbf{u})}{\partial n}\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} + \right.$$
$$\left. + \sigma\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right)\right]R + \sigma\Delta_{\Gamma_t}R; \tag{1.13}$$

$$D(\mathbf{U})\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}_{\alpha_i} + \frac{\partial D(\mathbf{u})}{\partial n}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}_{\alpha_i}R + D(\mathbf{u})\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\,R_{\alpha_i} +$$
$$+ D(\mathbf{u})\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}_{\alpha_i} = 0, \quad i = 1,2. \tag{1.14}$$

Здесь $D(\mathrm{u})$, $D(\mathrm{U})$ — тензоры скоростей деформаций основного и возмущенного течений; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны нормальных сечений невозмущенной поверхности Γ_t; Δ_{Γ_t} — оператор Лапласа — Бельтрами поверхности Γ_t. Вектор S определяется посредством равенства

$$\mathrm{S} = \frac{1}{EG - F^2}\left[(FR_{\alpha_2} - G\,R_{\alpha_1})\mathrm{x}_{\alpha_1} + (FR_{\alpha_1} - ER_{\alpha_2})\mathrm{x}_{\alpha_2}\right], \tag{1.15}$$

E, G, F — коэффициенты первой квадратичной формы Γ_t, $\mathrm{S}\cdot\mathbf{n} = 0$. Производная по нормали $\partial D(\mathbf{u})/\partial n$ есть матрица с компонентами $[\partial(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)/\partial n]/2$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

Соотношения (1.13), (1.14) выводятся путем длинных вычислений с помощью формул дифференциальной геометрии. Эти вычисления опускаем.

Для полного определения возмущенного движения необходимо задать начальные условия

$$\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0, \ \operatorname{div}\mathbf{U}_0 = 0, \ F|_{t=0} = F_0, \ \mathbf{X}|_{t=0} = 0. \tag{1.16}$$

Итак, эволюция возмущений описывается уравнениями (1.7)—(1.9) с граничными условиями (1.10), (1.13), (1.14) и начальными данными (1.16).

В задачах об устойчивости представляет интерес поведение возмущенного решения при $t \to \infty$ или других особых точках. Обычно интересуются поведением возмущения границы по нормали, которая описывается функцией $R(\mathbf{x}, t) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{X}$, $\mathbf{x} \in \Gamma_t$. Следует отметить, что классический подход к задачам устойчивости стационарных течений, при котором ищутся решения вида $(\mathrm{U}(\mathbf{x}), P(\mathbf{x}))\exp(\lambda t)$, не подходит для неустановившихся течений, поскольку полученные уравнения на возмущения неинвариантны относительно сдвига по времени. В таких случаях обычно стремятся отделить пространственные переменные. Ниже исследуется устойчивость одного конкретного течения вязкой жидкости.

2. Преобразование уравнений на возмущения в случае полосы. Одним из точных решений уравнений Навье — Стокса (1.1), (1.2) является следующее:

$$\mathbf{u} = \frac{k}{1+kt}(x, -y), \quad k = \mathrm{const}, \tag{2.1}$$
$$p = -\rho k^2(1+kt)^{-2}y^2 + \rho k^2 l^2(1+kt)^{-4} - 2\rho\nu k(1+kt), \ l = \mathrm{const} > 0.$$

Легко проверить, что оно удовлетворяет условиям (1.3), (1.4), (1.6), если за свободные границы $\Gamma_t^{\pm}$ принять линии $y = \pm l(1+kt)^{-1}$. При $k > 0$

и $t \to \infty$ полоса превращается в линию $y = 0$. Поскольку свободные границы — прямые, поверхностное натяжение не входит в решение.

Движение, определяемое формулами (2.1), плоское. В задаче об устойчивости также ограничимся плоскими возмущениями.

Имеем $D(\mathbf{u}) = k(1 + kt)^{-1}\,\mathrm{diag}\,(1, \;\; -1)$, $\mathrm{S} = -R_x(1{,}0)$, $\Delta_{\Gamma_t} R = R_{xx}$, $\mathbf{n} = (0, \; \pm 1)$. Введем новые независимые безразмерные переменные и функции:

$$\tau = 1 + kt, \quad \xi = x/\tau l, \quad \eta = y\tau/l, \quad U = \tau U_1/kl, \quad V = U_2/kl\tau, \quad P = P_1/\rho k^2 l^2$$

(переменные ξ, η являются лагранжевыми координатами). С учетом полученных формул и замен линеаризованная задача (1.7)—(1.9), (1.10), (1.13), (1.14), (1.16) преобразуется для основного движения (2.1) к следующей:

$$U_\tau + P_\xi = \frac{1}{\mathrm{Re}}(\tau^{-2} U_{\xi\xi} + \tau^2 U_{\eta\eta}) \equiv \frac{1}{\mathrm{Re}} LU; \tag{2.2}$$

$$V_\tau + P_\eta = \frac{1}{\mathrm{Re}} LV; \tag{2.3}$$

$$U_\xi + \tau^4 V_\eta = 0, \quad |\eta| < 1, \quad \tau \geqslant 1; \tag{2.4}$$

$$-P + \frac{2}{\mathrm{Re}}\tau^2 V_\eta = -\frac{2}{\tau^3} R + \frac{\mathrm{We}}{\tau^2} R_{\xi\xi}; \tag{2.5}$$

$$\pm(U_\eta + V_\xi) - \frac{4}{\tau^2} R_\xi = 0, \quad \eta = \pm 1, \quad \tau \geqslant 1; \tag{2.6}$$

$$U = U_{1,0}(\xi, \; \eta), \quad V = U_{2,0}(\xi, \; \eta), \quad \partial U_{1,0}/\partial\xi + \partial U_{2,0}/\partial\eta = 0, \quad \tau = 1. \tag{2.7}$$

Здесь $\mathrm{Re} = kl^2/\nu$ — число Рейнольдса; $\mathrm{We} = \sigma(\rho k^2 l^3)^{-1}$ — число Вебера. Нормальная составляющая вектора возмущений границ полосы определяется равенством

$$R = \pm \frac{1}{\tau} \int\limits_1^\tau \tau^2 V d\tau, \quad \eta = \pm 1, \quad \tau \geqslant 1. \tag{2.8}$$

Задачу (2.2)—(2.8) можно свести к определению только одной функции $V(\xi, \; \eta, \; \tau)$ следующим образом. Из (2.2), (2.3), дифференцируя по ξ, η с использованием уравнения неразрывности (2.4), находим

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(V_{\xi\xi} + \tau^4 V_{\eta\eta}) = \frac{1}{\mathrm{Re}} L(V_{\xi\xi} + \tau^4 V_{\eta\eta}), \quad |\eta| < 1. \tag{2.9}$$

Граничные условия (2.6) с учетом (2.8) перепишем в виде

$$\pm(V_{\xi\xi} - \tau^4 V_{\eta\eta}) + \frac{4}{\tau^3} \int\limits_1^\tau \tau^2 V_{\xi\xi} d\tau = 0, \quad \eta = \pm 1. \tag{2.10}$$

Далее, дифференцируя (2.5) 2 раза по ξ и заменяя $P_{\xi\xi}$ из (2.2), а U_ξ из (2.4), получим

$$\frac{1}{\mathrm{Re}} L(\tau^4 V_\eta) - \frac{\partial}{\partial\tau}(\tau^4 V_\eta) + \frac{2\tau^2}{\mathrm{Re}} V_{\eta\xi\xi} = \tag{2.11}$$

$$= \pm \left[-\frac{2}{\tau^4} \int\limits_1^\tau \tau^2 V_{\xi\xi} d\tau + \frac{\mathrm{We}}{\tau^3} \int\limits_1^\tau \tau^2 V_{\xi\xi\xi\xi} d\tau \right], \quad \eta = \pm 1.$$

Если функция $V(\xi, \; \eta, \; \tau)$ как решение задачи (2.9)—(2.11) с начальными данными $U_{2,0}(\xi, \; \eta)$ известна, то поведение возмущений свободных границ полосы определяется по формуле (2.8).

3. Построение решения и его асимптотический анализ. В задаче (2.9)—(2.11) переменные $(\eta, \; \tau)$, ξ разделяются. Будем считать функцию V периодической по ξ с периодом h. Положим для одной гармоники $V =$

$= \Phi(\eta, \tau) \exp(in\xi)$, $n = n_1\pi l/h$, $n_1 = 1, 2, \ldots$ и введем новую функцию $\Psi(\eta, \tau)$ равенством

(3.1) $$\Psi = \tau^4\Phi_{\eta\eta} - n^2\Phi.$$

При этом Ψ удовлетворяет одномерному уравнению теплопроводности

(3.2) $$\Psi_\tau = \frac{1}{\mathrm{Re}}\tau^2\Psi_{\eta\eta} - \frac{n^2}{\mathrm{Re}\,\tau^2}\Psi.$$

Это вытекает из (2.9). Граничные условия (2.10), (2.11) в терминах функций $\Phi(\eta, \tau)$, $\Psi(\eta, \tau)$ примут вид

(3.3) $$\Psi + 2n^2\Phi = \frac{4n^2}{\tau^2}\int\limits_1^\tau \tau^2\Phi d\tau, \quad \eta = \pm 1;$$

(3.4) $$\frac{\tau^2}{\mathrm{Re}}\Psi_\eta - \frac{\partial}{\partial\tau}(\tau^4\Phi_\eta) - \frac{2\tau^2n^2}{\mathrm{Re}}\Phi_\eta = \pm q(\tau)\int\limits_1^\tau \tau^2\Phi d\tau, \quad \eta = \pm 1,$$

где

(3.5) $$q(\tau) = 2n^2/\tau^4 + n^4\mathrm{We}/\tau^3.$$

Пусть

(3.6) $$\Psi|_{\eta=1} = \Psi_1(\tau), \quad \Psi|_{\eta=-1} = \Psi_2(\tau), \quad \Psi|_{\tau=1} = \Psi_0(\eta) = U_{2,0\eta\eta} - n^2U_{2,0}.$$

Тогда первая начально-краевая задача (3.2), (3.6) однозначно определяет функцию $\Psi(\eta, \tau) = \tilde{\Psi}(\eta, \tau, \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2)$. Затем из (3.1) находится $\Phi(\eta, \tau) = \tilde{\Phi}(\eta, \tau, \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, C_1, C_2)$ с неизвестными функциями $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$. Подстановка в граничные условия (3.3), (3.4) приводит к системе четырех интегродифференциальных уравнений для определения неизвестных функций $\Psi_1(\tau)$, $\Psi_2(\tau)$, $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$. Тем самым найдется функция $\Phi(\eta, \tau)$, а значит, и амплитуда нормальной составляющей вектора возмущений $R_{n_1}(\tau) = R \exp(-in\xi)$ по формуле (2.8).

Отметим следующее свойство поставленной задачи, вытекающее из граничных условий (3.3), (3.4) и решения смешанной задачи (3.2), (3.6): можно ограничиться отысканием только четных или нечетных решений относительно переменной η. Поскольку из (3.1)

(3.7)
$$\Phi(\eta, \tau) = C_1(\tau)\,\mathrm{sh}\frac{n}{\tau^2}\eta + C_2(\tau)\,\mathrm{ch}\frac{n}{\tau^2}\eta - \frac{1}{n\tau^2}\int\limits_0^\eta \mathrm{sh}\frac{n}{\tau^2}(\mu - \eta)\Psi(\mu, \tau)\,d\mu,$$

для четных возмущений надо положить $C_1(\tau) = 0$, $\Psi_1(\tau) = \Psi_2(\tau)$, $U_{2,0}(\eta) = U_{2,0}(-\eta)$, а для нечетных $C_2(\tau) = 0$, $\Psi_1(\tau) = -\Psi_2(\tau)$, $U_{2,0}(\eta) = -U_{2,0}(-\eta)$. При этом граничные условия (3.3), (3.4) достаточно взять при $\eta = 1$.

Можно показать, что для нечетных возмущений функция $\Psi(\eta, \tau)$ имеет вид

(3.8) $$\Psi(\eta, \tau) = \exp(n^2/\mathrm{Re}\,\tau)\sum_{m=1}^{\infty}\left[2\pi(-1)^m m\int\limits_0^\gamma f_{2m}(\gamma - \mu)\,w(\mu)\,d\mu + c_m f_{2m}(\gamma)\right]\sin m\pi\eta,$$

для четных

(3.9) $$\Psi = \exp(n^2/\mathrm{Re}\,\tau)\sum_{m=0}^{\infty}\left[(2m+1)\pi(-1)^m\int\limits_0^\gamma f_{2m+1}(\gamma - \mu)\,w(\mu)d\mu + d_m f_{2m+1}(\gamma)\right]\cos(2m+1)\pi\eta,$$

где

(3.10) $$f_m(\gamma) = \exp(-m^2\pi^2\gamma/4), \quad \gamma = (\tau^3 - 1)/3\mathrm{Re},$$
$$w(\gamma) = \exp[-n^2/\mathrm{Re}\ \tau(\gamma)]\Psi_1(\tau(\gamma)),$$

c_m, d_m — коэффициенты ряда Фурье нечетной или четной начальной функции $\exp(-n^2/\mathrm{Re})\Psi_0(\eta)$.

Вместо функции $C_1(\tau)$ (или $C_2(\tau)$) удобно ввести новую неизвестную функцию

(3.11) $$B(\tau) = \int_1^\tau \tau^2\Phi|_{\eta=1}\,d\tau.$$

Подстановка выражений (3.8), (3.9), (3.11) в (3.3), (3.4) после довольно трудоемких вычислений приводит к уравнениям на $B(\tau)$, $\Psi_1(\tau)$. Для нечетных возмущений имеем систему

(3.12) $$q(\tau)B = \frac{n}{\mathrm{Re}}\,\mathrm{cth}\frac{n}{\tau^2}\Psi_1 - n\left(\mathrm{cth}\frac{n}{\tau^2}B'\right)' - \frac{2n^3}{\mathrm{Re}\,\tau^2}\,\mathrm{cth}\frac{n}{\tau^2}B' -$$
$$- 2\pi\int_0^\gamma K^-(\tau, \gamma-\mu)\,w(\mu)\,d\mu + Q^-(\tau);$$

(3.13) $$\Psi_1 = -2n^2(B/\tau^2)',$$

где $$K^-(\tau, \gamma-\mu) = \exp(n^2/\mathrm{Re}\,\tau)\sum_{m=1}^\infty mA_m(\tau)f_{2m}(\gamma-\mu),$$
$$Q^-(\tau) = \exp(n^2/\mathrm{Re}\,\tau)\sum_{m=1}^\infty(-1)^m A_m(\tau)f_{2m}(\gamma)c_m,$$
$$A_m(\tau) = \frac{2n^2m\pi}{n^2+m^2\pi^2\tau^4}\left(\frac{\tau^2}{\mathrm{Re}} + \frac{2\tau^3}{n^2+m^2\pi^2\tau^4}\right).$$

Для четных возмущений получим

(3.14) $$q(\tau)B = \frac{n}{\mathrm{Re}}\,\mathrm{th}\frac{n}{\tau^2}\Psi_1 - n\left(\mathrm{th}\frac{n}{\tau^2}B'\right)' - \frac{2n^3}{\mathrm{Re}\,\tau^2}\,\mathrm{th}\frac{n}{\tau^2}B' -$$
$$- \pi\int_0^\gamma K^+(\tau, \gamma-\mu)\,w(\mu)\,d\mu - Q^+(\tau);$$

(3.15) $$\Psi_1 = -2n^2(B/\tau^2)',$$

где $$K^+(\tau, \gamma-\mu) = \exp(n^2/\mathrm{Re}\,\tau)\sum_{m=0}^\infty(2m+1)D_m(\tau)f_{2m+1}(\gamma-\mu),$$
$$Q^+(\tau) = \exp(n^2/\mathrm{Re}\,\tau)\sum_{m=0}^\infty(-1)^m D_m(\tau)f_{2m+1}(\gamma)d_m,$$
$$D_m(\tau) = \frac{4n^2(2m+1)\pi}{4n^2+(2m+1)^2\pi^2\tau^4}\left[\frac{\tau^2}{\mathrm{Re}} + \frac{8\tau^3}{4n^2+(2m+1)^2\pi^2\tau^4}\right].$$

Здесь функции $q(\tau)$, $f_m(\gamma)$, $w(\gamma)$ определяются по формулам (3.5), (3.10), а $\gamma = (\tau^3 - 1)/3\mathrm{Re}$. Согласно (2.8) и (3.11), амплитуда нормальной составляющей вектора возмущений имеет вид $R_{n_1} = B(\tau)/\tau$, $n_1 = 1, 2, \ldots$.

Можно показать, что при $\tau \to \infty$ система (3.12), (3.13) и (3.14), (3.15) сводится к системе из трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с иррегулярными особенностями. Эта система неоднородна, и ранг ее особой точки $\tau = \infty$ равен трем [4]. Приведем здесь главные члены асимптотики функции $R_{n_1}(\tau)$. Для нечетных возмущений при всех $\sigma \geqslant 0$

(3.16) $$R_{n_1} \sim \frac{a_1}{\tau} + \frac{a_2}{\tau^2} + \frac{(-1)^m n^2\,\mathrm{Re}\,c_m}{m^5\pi^5\tau^6}\exp\left(-\frac{m^2\pi^2}{3\,\mathrm{Re}}\tau^3\right), \quad \tau\to\infty,$$

если $c_i = 0$, $i = 1, \ldots, m-1$. Поведение четных возмущений зависит от поверхностного натяжения σ. Именно при $\sigma = 0$, $\tau \to \infty$

$$R_{n_1} \sim a_1\tau + \frac{a_2}{\tau^2} - \frac{64\,\mathrm{Re}\,(-1)^m d_m}{3\,(2m+1)^5\,\pi^5\tau}\exp\left[-\frac{(2m+1)^2\pi^2}{12\,\mathrm{Re}}\tau^3\right], \tag{3.17}$$

а при $\sigma > 0$, $\tau \to \infty$

$$R_{n_1} \sim \tau^{1/4}\{a_1\cos(2n\sqrt{\mathrm{We}\,\tau}) + a_2\sin(2n\sqrt{\mathrm{We}\,\tau}) - \\ - \frac{64n^2\,\mathrm{Re}\,(-1)^m d_m}{n\sqrt{\mathrm{We}}\,(2m+1)^5\,\pi^5\tau^{5/4}}\exp\left[-\frac{(2m+1)^2\pi^2}{12\,\mathrm{Re}}\tau^3\right]\}, \tag{3.18}$$

если $d_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$; $m = 0, 1, \ldots$ В (3.16)—(3.18) a_1, a_2 — постоянные.

На основании асимптотик (3.16)—(3.18) можно сделать выводы об устойчивости течения полосы (2.1) при $t \to \infty$ ($\tau \to \infty$). Нечетные возмущения устойчивы, причем начальные возмущения экспоненциально затухают. Интересно отметить, что в схеме идеальной жидкости аналогичные вихревые начальные данные дестабилизируют свободную границу [5]. Этот вывод не противоречит сказанному выше, поскольку асимптотика (3.16) при $\tau \to \infty$ не является равномерной по ν (или, что то же самое, Re), когда $\nu \to 0$ ($\mathrm{Re} \to \infty$). Четные возмущения всегда нарастают, как это следует из (3.17), (3.18), хотя поверхностное натяжение несколько снижает неустойчивость, не устраняя ее полностью.

Итак, наиболее опасными являются четные возмущения скорости вдоль оси y. Им соответствует так называемая «шлангообразная неустойчивость».

В заключение заметим, что при $\tau \to 0$ ($t \to -1/k$, $k < 0$) имеет место устойчивость $R_{n_1} \sim a\tau$, $a = \mathrm{const}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Солонников В. А.** Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью.— Изв. АН СССР. Сер. математическая, 1977, т. 41, № 6.
2. **Tomas Beale J.** The initial value problem for the Navier — Stokes equations with a free surface.— Comm. Pure Appl. Math., 1981, vol. 34, p. 359.
3. **Андреев В. К.** Малые возмущения неустановившегося движения жидкости со свободной границей с учетом капиллярных сил.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1977, вып. 32.
4. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
5. **Андреев В. К.** Влияние капиллярности и начальной завихренности на устойчивость движения жидкости.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1981, вып. 52.

Поступила 11/III 1984 г.

УДК 532.526

ВЛИЯНИЕ ПРЕГРАДЫ НА ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

С. В. Калинина, Р. В. Рафиков, Г. А. Толмачев

(Новосибирск)

Исследованы особенности гидродинамики течения при натекании струи, сформировавшейся в проницаемом канале, на преграду, расположенную на некотором расстоянии от выходного сечения канала перпендикулярно оси струи.

При рассмотрении натекания струи на преграду всю область течения можно условно разделить на несколько характерных областей, газодинамика и теплообмен в которых зависят от целого ряда условий: сжимаемости, степени турбулентности вытекающей струи, наличия сносящего потока и др. Одна из таких областей — это собственно сама струя, которую вблизи выхода из канала можно рассматривать как затопленную (при большом удалении преграды от сопла) и выделять в ней начальный и