

## ПРИБЛИЖЕНИЕ БЮРГЕРСА ДЛЯ ПЛОСКИХ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В АЭРОВЗВЕСЯХ

С. В. Тараканов, О. М. Годес  
(Ленинград)

В работах, посвященных исследованию нестационарных прямых скачков уплотнения в аэродисперсных средах (см., например, [1, 2]), рассмотрен, по существу, лишь начальный этап эволюции этих скачков — участок формирования релаксационной волны. Не меньший интерес, с точки зрения обеспечения безопасности производств, связанных с проведением взрывных работ (горное дело, сварка взрывом и др.), представляет изучение последующих этапов эволюции ударных волн в аэровзвесах. В данной работе методами нелинейной акустики исследуется заключительная стадия эволюции волн во взвесах твердых и жидких частиц — стадия вырождения ударной волны в звуковую. Дается анализ диссипативных свойств аэровзвесей и рассматривается структура ударного фронта на этом этапе эволюции.

Будем считать, что в исходном, невозмущенном волной состоянии в инертном газе взвешены твердые или жидкие частицы с постоянной весовой концентрацией. До прихода волны аэровзвесь предполагаем монодисперсной, покоящейся в системе координат  $(x, t)$  и равновесной. В случае жидких частиц в газовой фазе, кроме инертного газа, содержатся и пары жидкости с парциальным давлением, равным давлению насыщения при температуре капель. Течение аэродисперсной среды будем описывать при помощи модели взаимопроникающих сплошных сред.

Покажем сначала, что уравнения динамики двухконтинуальной модели, развитой в работах [3—6] и др., для слабых длинноволновых возмущений приводятся к уравнению Бюргера относительно скорости газовой фазы. Отметим, что полученные в [7, 8] уравнения несправедливы в случае возмущений большой длительности, поскольку они не переходят в уравнения равновесной модели.

1. Длинноволновое приближение и приближение Бюргера для аэровзвеси твердых частиц. Не налагая ограничений на интенсивность волны, рассмотрим только те упрощения, которые вытекают из предположения о малости характерных времен релаксации частиц по сравнению с длительностью волнового процесса.

Система уравнений, описывающая аэровзвесь твердых частиц, может быть представлена в следующем виде (см., например, [9]):

$$(1.1) \quad d_t \rho + \rho \partial_x u = 0, \quad p = \rho T; \quad -$$

$$(1.2) \quad \rho d_t u + \frac{a_0^2}{\gamma} \partial_x p = r \frac{v - u}{\tau_u};$$

$$(1.3) \quad \rho d_t T + (\gamma - 1) p \partial_x u = r \chi (\Theta - T) / \tau_T + \\ + \gamma (\gamma - 1) (v - u)^2 / \tau_u;$$

$$(1.4) \quad d_{2t} r + r \partial_x v = 0;$$

$$(1.5) \quad d_{2t} v = (u - v) / \tau_u, \quad d_{2t} \Theta = (T - \Theta) / \tau_T,$$

где  $d_t = \partial_t + u \partial_x$ ;  $d_{2t} = \partial_t + v \partial_x$ ;  $\rho$ ,  $r$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $T$ ,  $\Theta$  — плотности, скорости и температуры газовой и дисперсной фаз;  $p$  — давление;  $\gamma$  — показатель адиабаты газовой фазы;  $a_0$  — замороженная скорость звука;  $\tau_u$ ,  $\tau_T$  — времена динамической и тепловой релаксаций;  $\chi$  — отношение удельных теплоемкостей частиц и газа при постоянном объеме.

Уравнения (1.1)—(1.5) записаны в безразмерной форме. В качестве масштабов давления, плотности и температуры приняты значения соответствующих параметров в невозмущенном газе. За единицы измерения скорости, времени и длины взяты соответственно равновесная скорость звука  $a_e = [g/(1 + \kappa)]^{0.5} a_0$  ( $\kappa$  — начальная весовая концентрация дис-

персной фазы,  $g = (\gamma + \kappa\chi)(1 + \kappa\chi)^{-1}$ , характерное время волнового процесса  $\tau_0$  и длина  $a_e\tau_0$ .

Уравнения (1.5) можно проинтегрировать вдоль траекторий движения частиц дисперсной фазы  $y(t)$ , где  $d_t y = v$ . Полагая, что при  $t = t_0$   $v = 0$  и  $\Theta = 1$ , будем иметь

$$v = \tau_u^{-1} \int_{t_0}^t \exp\left(\frac{\vartheta - t}{\tau_u}\right) u[y(\vartheta), \vartheta] d\vartheta,$$

$$\Theta = \tau_T^{-1} \int_{t_0}^t \exp\left(\frac{\vartheta - t}{\tau_T}\right) T[y(\vartheta), \vartheta] d\vartheta + \exp\left(\frac{t_0 - t}{\tau_T}\right).$$

В длинноволновом приближении  $\tau_u, \tau_T \ll 1$ , поэтому основной вклад в интегралы вносится подынтегральными функциями вблизи верхнего предела. Разлагая на этом основании  $u(\vartheta)$  и  $T(\vartheta)$  в ряд вблизи  $\vartheta = t$  и считая  $\tau_u, \tau_T$  величинами одного порядка, получим

$$(1.6) \quad v = u - \tau_u d_t u + \tau_u^2 (d_t u \partial_x u + d_{tt}^2 u) + O(\tau_u^3),$$

$$\Theta = T - \tau_T d_t T + \tau_T^2 (d_t u \partial_x T + d_{tt}^2 T) + O(\tau_T^3).$$

Подставив выражения (1.6) в (1.2)–(1.4) и отбрасывая члены, содержащие квадраты времен релаксации, имеем

$$(1.7) \quad (\rho + r) d_t u + a_0^2 \gamma^{-1} \partial_x p = r \tau_u (d_t u \partial_x u + d_{tt}^2 u),$$

$$(\rho + r\chi) dT_t + (\gamma - 1) p \partial_x u = r \chi \tau_T (d_t u \partial_x T + d_{tt}^2 T) + \gamma(\gamma - 1) r \tau_u (d_t u)^2,$$

$$d_t r + r \partial_x u = \tau_u \partial_x (r d_t u).$$

Таким образом, в длинноволновом приближении исходная система (1.1)–(1.5) свелась к системе (1.1), (1.7). Поскольку в уравнениях (1.7) опущены члены, содержащие квадраты характерных времен релаксации, то для грубых оценок применимости рассматриваемого приближения можно использовать условия  $\tau_u^2, \tau_T^2 \ll 1$ . Для волновых процессов еще большей длительности ( $\tau_u, \tau_T \ll 1$ ) можно получить дальнейшие упрощения.

Действительно, устремляя в (1.7) времена релаксации к нулю, получим с учетом (1.1) замкнутую систему, описывающую равновесное течение аэрозвеси (см., например, [9]). Очевидно, что для волн бесконечной длительности (бесконечная ступенька) равновесное описание является точным, так как в этом случае  $\tau_u = \tau_T = 0$ . Такое описание позволяет определить скорость распространения ударной волны и равновесные параметры среды позади зоны релаксации, однако не дает сведений о структуре ударного фронта, его ширине и т. д. В первом приближении эта информация может быть получена на основании модели (1.1), (1.7). Для дальнейшего уточнения картины релаксационных процессов необходимо в разложениях (1.6) учитывать члены более высоких порядков или же следует интегрировать исходную систему (1.1)–(1.5).

Перейдем теперь к рассмотрению слабых волн. Введем возмущения параметров аэрозвеси в виде  $p' = p - 1$ ,  $\rho' = \rho - 1$ ,  $T' = T - 1$ ,  $u' = u$ ,  $r' = (r - \kappa)/\kappa$  и будем считать эти возмущения величинами первого порядка малости  $\sim O(\epsilon)$ . Полагаем также, что времена релаксации  $\tau_u, \tau_T \leq O(\epsilon)$ , а концентрация дисперсной фазы  $\kappa \leq O(1)$ . Сведем при этих предположениях систему (1.1), (1.7) к одному уравнению, воспользовавшись методом Хохлова [10], согласно которому в сопутствующей системе координат ( $\xi = t - x$ ,  $t$ ) ввиду слабой нелинейности параметры волны будут медленно меняющимися функциями времени  $t$ . На этом основании, следуя [10], считаем в дальнейшем, что в переменных ( $\xi$ ,  $t$ ) дифференцирование по времени увеличивает порядок малости на единицу.

Переходя в (1.1), (1.7) к координатам  $(\xi, t)$ , исключая из рассмотрения последовательно  $p', \rho', r', T'$  и отбрасывая члены  $\sim O(\varepsilon^3)$ , получим уравнение Бюргерса относительно скорости газовой фазы:

$$(1.8) \quad \partial_t u - k u \partial_\xi u = \eta \partial_\xi^2 u,$$

где  $k = 0,5(g + 1)$ ,  $\eta = \eta_u + \eta_T$ ;

$$(1.9) \quad \eta_u = \frac{\tau_u}{2} \frac{\kappa}{1 + \kappa}, \quad \eta_T = \frac{\tau_T}{2} \frac{\kappa \chi (g - 1)}{g(1 + \kappa \chi)}.$$

Таким образом, для слабого возмущения ( $u \ll 1$ ) большой длительности ( $\tau_u^2, \tau_T^2 \ll 1$ ) аэрозвесь твердых частиц представляет собой вязкую среду. Возникновение вязкости, как следует из (1.9), обусловлено процессами трения ( $\eta_u$ ) и теплообмена ( $\eta_T$ ) между фазами.

**2. Приближение Бюргерса для аэрозвеси жидких частиц.** Для описания волновых процессов в капельных взвешах используем следующую систему уравнений [9]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} d_t \rho_1 + \rho_1 \partial_x u &= 0, \quad d_t \rho_2 + \rho_2 \partial_x u = j, \\ \rho d_t u + a_0^2 \gamma^{-1} \partial_x p &= f + (v - u) j, \\ (\rho_1 \chi_1 + \rho_2 \chi_2) d_t T + (\gamma - 1) p \partial_x u &= q + \gamma(\gamma - 1)(v - u) f + \\ &+ [\gamma_2 \chi_2 \Theta - \chi_2 T + 0,5 \gamma(\gamma - 1)(v - u)^2] j, \\ p = p_1 + p_2, \quad p_i = m_i \rho_i T, \quad m_i = \mu / \mu_i, \quad \rho = \rho_1 + \rho_2, \quad d_{2t} r + r \partial_x v &= \\ &= -j, \quad d_{2t} S = -\frac{2}{3} \frac{S}{r} j, \\ r d_{2t} v &= -f, \quad r \chi d_{2t} \Theta = -q - \gamma H j, \\ j = \frac{r}{S \tau_D} \frac{p_{2e} - p_2}{p}, \quad f = \frac{r}{S \tau_u} (v - u), \quad q = \frac{r \chi}{S \tau_T} (\Theta - T), \\ p_{2e} &= p_{20} \exp \left[ \frac{\gamma H}{(\gamma - 1) m_2} (1 - \Theta^{-1}) \right], \end{aligned}$$

где  $\mu$  — молекулярный вес;  $S$  — площадь поверхности частицы;  $H = h_e / c_{p0} T_0$  — безразмерная теплота испарения;  $\tau_D$  — диффузионное время релаксации; индексы 1, 2 отмечают параметры инертного газа и пара; переменные без индекса  $\rho, u, p, T, \mu, \gamma$  соответствуют газовой фазе.

Величины, входящие в уравнения (2.1), обезразмерены точно так же, как в п. 1. Отметим только, что равновесная скорость звука  $a_e$  заранее неизвестна, поэтому величина  $a_0^2 \gamma^{-1}$  остается пока неопределенной.

Введем малые отклонения  $O(\varepsilon)$  параметров среды от равновесных согласно формулам:  $\rho'_i = \rho_i - \kappa_i$ ,  $p'_i = p_i - m_i \kappa_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $T' = T - 1$ ,  $r' = (r - \kappa) / \kappa$ ,  $S' = 1 - S$ ,  $\Theta' = \Theta - 1$ ,  $u' = u$ ,  $v' = v$ . Буквами  $\kappa_1, \kappa_2$  обозначены концентрации инертного газа и пара в равновесном состоянии, так что  $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa_1 m_1 + \kappa_2 m_2 = \kappa_1 \chi_1 + \kappa_2 \chi_2 = 1$ . Полагаем, что концентрация дисперсной фазы  $\kappa \ll O(1)$ . Для простоты будем использовать в дальнейшем линейную зависимость давления насыщенных паров  $p'_{2e}$  от температуры  $\Theta'$ :  $p'_{2e} = z \Theta'$ , где  $z = \kappa_2 \gamma H (\gamma - 1)^{-1}$ .

Подставляя выражения для возмущений в (2.1) и переходя к сопутствующим координатам  $(\xi, t)$ , с точностью до величин  $O(\varepsilon^2)$  включительно получим (здесь и далее штрихи над переменными опускаются)

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \partial_\xi \rho_1 + (1 - u) \partial_\xi \rho_1 - (\kappa_1 + \rho_1) \partial_\xi u &= 0, \quad \partial_t \rho_2 + \\ + (1 - u) \partial_\xi \rho_2 - (\kappa_2 + \rho_2) \partial_\xi u &= \kappa(1 + r + S - p)(z\Theta - p_2) / \tau_D, \\ \partial_t u + (1 + \rho_1 + \rho_2 - u) \partial_\xi u - a_0^2 \gamma^{-1} \partial_\xi p &= \kappa(1 + r + S) \frac{v - u}{\tau_u}, \\ \partial_t T + (1 + \rho_1 \chi_1 + \rho_2 \chi_2 - u) \partial_\xi T - (\gamma - 1)(1 + p) \partial_\xi u &= \kappa \chi (1 + r + S) \times \\ \times (\Theta - T) / \tau_T + \kappa \chi_2 (\gamma_2 - 1)(1 + r + S + T - p)(z\Theta - p_2) / \tau_D, \quad p &= (m_1 \rho_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m_2 \rho_2)(1 + T) + T, p_2 = m_2 \rho_2(1 + T) + m_2 \kappa_2 T, \partial_t r + (1 - v) \partial_{\xi} r - (1 + r) \times \\
& \times \partial_{\xi} v = -(1 + r + S - p)(z\Theta - p_2)/\tau_D, \partial_t S + (1 - v) \partial_{\xi} S = (2/3) (1 - \\
& - p) (z\Theta - p_2)/\tau_D, \partial_t v + (1 - v) \partial_{\xi} v = (1 + S)(u - v)/\tau_u, \\
& \partial_t \Theta + (1 - v) \partial_{\xi} \Theta = (1 + S) \left[ \frac{T - \Theta}{\tau_T} - \frac{\gamma H}{\chi} (1 - p) \frac{z\Theta - p_2}{\tau_D} \right].
\end{aligned}$$

Интегрируя последние два уравнения системы (2.2), найдем с требуемой точностью связь скорости и температуры частиц с остальными параметрами аэрозвеси:

$$\begin{aligned}
(2.3) \quad v &= u - \tau_u \partial_t u - \tau_u (1 - u - S) \partial_{\xi} u + \tau_u^2 \partial_{\xi}^2 u + O(\varepsilon^4), \\
\Theta &= T - \tau_* \partial_t \varphi - \tau_* (1 - u - S + \alpha p) \partial_{\xi} \varphi + \\
& + \tau_*^2 \partial_{\xi}^2 \varphi + \frac{\alpha}{z} p \psi + O(\varepsilon^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{где } \varphi &= (1 - \alpha)(T + H p_2); \quad \psi = (1 - \alpha)(zT - p_2), \quad \tau_* = (1 - \alpha) \tau_T, \\
\alpha &= zH(1 + zH)^{-1}.
\end{aligned}$$

Исключив из (2.2) давление паров, температуру  $T$ , а также скорость и температуру частиц согласно (2.3), получим систему шести дифференциальных и двух алгебраических уравнений, описывающую эволюцию рассматриваемых возмущений в аэрозвеси. Сведем полученную таким образом систему к одному уравнению.

Имея в виду в дальнейшем прежде всего выявление качественных закономерностей влияния массообмена на параметры распространяющихся в аэрозвеси волн, предполагаем, что  $\kappa_2 \ll 1$ . Физически это соответствует случаю, когда температура среды значительно меньше температуры кипения жидкости. Кроме того, в целях упрощения получаемых далее выражений будем отбрасывать ряд несущественных членов. Сравнительный вклад этих членов оценивался по параметрам капель воды в воздухе при атмосферном давлении и температуре  $20^\circ\text{C}$  (в данном случае  $\kappa_2 \approx 0,02$ ). Так, в выражении для  $g$  (см. (2.4)) пренебрегается величиной работы сил давления  $\chi_2(\gamma_2 - 1)$ , связанной с изменением объема вещества при фазовом превращении, по сравнению с теплотой фазового превращения  $\gamma H$  и т. д. Отметим, что точность получаемых таким образом формул увеличивается с уменьшением начальной температуры среды, так что приводимое ниже описание в случае капель воды в воздухе при атмосферном давлении справедливо при изменении температуры от  $0$  до  $\approx 20^\circ\text{C}$ , т. е. охватывает наиболее важный для практики диапазон температур. Следует ожидать, по-видимому, что качественный характер результатов сохранится в несколько более широком температурном диапазоне.

Определим в акустическом приближении связь параметров аэрозвеси со скоростью газовой фазы и найдем значение коэффициента  $a_0^2 \gamma^{-1}$ . С учетом принятых предположений имеем

$$\begin{aligned}
(2.4) \quad \frac{\gamma(1 + \kappa)}{a_0^2} &= g = \frac{1}{c} \left( \gamma + \kappa \chi + \frac{z}{m_2} \gamma H \right), \\
c &= 1 + \kappa \chi + \frac{z}{m_2} \gamma H, \quad \varphi = \frac{\gamma - 1}{c} u = (g - 1) u, \\
\rho_1 &= \kappa_1 u, \quad \rho_2 = \frac{z}{m_2} (g - 1) u, \\
r &= \left[ 1 - \frac{\kappa_2}{\chi} \left( \frac{\gamma H}{m_2 c} - 1 \right) \right] u, \quad S = \frac{2}{3} \frac{\kappa_2}{\chi} \left( \frac{\gamma H}{m_2 c} - 1 \right) u, \\
\frac{\psi}{\tau_D} &= \left[ \frac{\kappa_2}{\chi} \left( \frac{\gamma H}{m_2 c} - 1 \right) + z(1 - \alpha) \frac{\chi}{\gamma} (g - 1) \right] \partial_{\xi} u.
\end{aligned}$$

С помощью выражений (2.4) представим уравнение движения газовой фазы системы (2.2) в виде

$$(2.5) \quad \partial_t u + \partial_{\xi} u - \frac{1}{g} \partial_{\xi} p = \frac{\kappa}{1+\kappa} \tau_u \partial_{\xi}^2 u.$$

Отсюда следует, что для сведения исходной системы (2.2) к одному уравнению остается найти выражение для  $\partial_{\xi} p$  через производные скорости  $u$  с точностью до членов  $O(\varepsilon^2)$  включительно.

Исключая из (2.5)  $\partial_{\xi} p$  с помощью оставшихся уравнений системы (2.2), получим уравнение (1.8), коэффициенты  $k$  и  $\eta$  которого определяются следующим образом:

$$(2.6) \quad k = 0,5(g+1), \quad \eta = \eta_u + \eta_T + \eta_D,$$

$$\eta_u = \frac{\tau_u}{2} \frac{\kappa}{1+\kappa}, \quad \eta_T = \frac{\tau_T}{2} \frac{g-1}{g} \frac{\kappa \chi}{c [1 + \kappa_2 \gamma H^2 (\gamma-1)^{-1}]},$$

$$\eta_D = \frac{\tau_D}{2} \left\{ \kappa_2 \frac{\chi H (\gamma H^2 m_2^{-1} c^{-1} - 1)}{g c [1 + \kappa_2 \gamma H^2 (\gamma-1)^{-1}]} + \frac{\kappa_2}{\kappa} \left[ \left( \frac{\gamma H}{m_2 c} \right)^2 H - \frac{\gamma H}{m_2 c} (H+1) + 1 \right] \right\}.$$

Как следует из (2.6), эффективная вязкость аэрозвеси жидких частиц обусловлена трением ( $\eta_u$ ), теплообменом ( $\eta_T$ ) и массообменом ( $\eta_D$ ) между фазами. Отметим, что в пределе  $\kappa_2 \rightarrow 0$  выражения (2.6) переходят в формулы (1.9) для аэрозвеси твердых частиц.

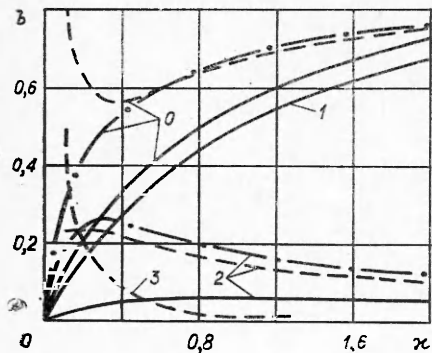
При выводе уравнения (1.8) из системы (2.1) возмущения всех параметров среды считались малыми. Однако изменение размера частиц будет мало только при достаточно больших значениях концентрации дисперсной фазы, т. е. когда  $\kappa > \kappa_m$ . Оценку величины  $\kappa_m$  можно получить из соотношения  $2\kappa_2 (\gamma H m_2^{-1} c^{-1} - 1) \approx 3\kappa$  (см. (2.4)), откуда для аэрозвеси капель воды в воздухе при указанных выше условиях получим  $\kappa_m \approx 0,1$ .

**3. Диссипативные свойства аэрозвесей.** Как показано выше, для слабых длинноволновых возмущений взаимодействие газовой и дисперсной фаз может быть учтено с помощью коэффициентов вязкости, выражения которых через параметры аэрозвеси определяются формулами (1.9), (2.6). Из этих формул следует, что эффективная вязкость пропорциональна характерным временам релаксационных процессов. Поэтому в равновесном приближении ( $\tau_u, \tau_T, \tau_D \rightarrow 0$ ) эволюция возмущений описывается уравнением

$$(3.1) \quad \partial_t u - k u \partial_{\xi} u = 0.$$

Известно (см., например, [11]), что решение уравнения (1.8) при  $\eta \rightarrow 0$  сходится к разрывному решению уравнения (3.1), удовлетворяющему условию на разрыве:  $U = -ku/2 = -(g+1)u/4$ , где  $U$  — скорость движения разрыва. Следовательно, рассматриваемая модель является обобщением равновесного приближения. С физической точки зрения предельный переход  $\tau_u, \tau_T, \tau_D \rightarrow 0$  соответствует либо уменьшению диаметра частиц дисперсной фазы ( $\tau_u, \tau_T, \tau_D \sim D^2$ ), либо увеличению длительности волнового процесса.

Рассмотрим влияние концентрации диспергированного вещества  $\kappa$  на коэффициенты вязкости аэрозвеси. На фиг. 1 представлены зависимости величин  $b = 2\eta\tau_u^{-1}$  от  $\kappa$  для взвесей твердых (сплошные линии —  $\chi = 1$ , штрихпунктирные —  $\chi = 4,2$ ) и жидких (штриховые линии  $\chi = 4,2$ ,  $H = 6,6$ ,  $m_2 = 1,6$ ) частиц в воздухе ( $\gamma = 1,4$ ). Предполагается, что  $\tau_u = \gamma\chi^{-1}\tau_T = \tau_D$ . Линии 0—3 соответствуют суммарной ( $b = b_u + b_T + b_D$ ), «динамической», «тепловой» и «диффузионной» вязкостям. Видно, что в аэрозвеси твердых частиц при  $\chi = 1$  практически во всем диапазоне концентраций «динамическая» вязкость значительно превышает «тепловую», т. е. в данном случае в процессах взаимодействия фаз решающую роль играет трение между фазами. С увеличением теплоем-



Ф и г. 1

«тепловой» вязкостями, соотношение между которыми остается примерно таким же, как и для твердых частиц (см. фиг. 1), в среде присутствует также «диффузионная» вязкость, связанная с фазовыми превращениями. Величина  $b_D$  с уменьшением концентрации увеличивается, и формально при  $\kappa \rightarrow 0$   $b_D \rightarrow \infty$ . Однако, как было отмечено, область малых  $\kappa$  ( $\kappa \lesssim 0,1$ ) для аэровзвеси жидких частиц в рамках данной модели не может быть рассмотрена. Такое поведение коэффициента  $b_D$  приводит к немонотонному изменению суммарной вязкости аэровзвеси жидких частиц (см. фиг. 1).

Увеличению «диффузионной» вязкости при уменьшении концентрации дисперсной фазы можно дать следующее физическое объяснение. Процесс выравнивания температур газовой и дисперсной фаз можно разбить на два этапа. На первом этапе за время порядка  $\tau_T$  происходит рост температуры частиц до значения, при котором все подводимое к частицам тепло расходуется на фазовое превращение. После этого, поскольку температура частиц теперь практически не изменяется, выравнивание температур обеих фаз осуществляется за счет изменения температуры газа. Из уравнения энергии газовой фазы (см. (2.2)) видно, что характерное время этого процесса  $\tau_T (\kappa \chi)^{-1}$ .

Следует отметить хорошее совпадение суммарных вязкостей аэровзвеси жидких и твердых частиц при одинаковых значениях теплоемкости дисперсной фазы ( $\chi = 4,2$ ) и  $\kappa > 0,6$  (см. фиг. 1). Это означает, что при сравнительно больших концентрациях диспергированного вещества роль массообмена несущественна по сравнению с силовым и тепловым взаимодействием фаз.

**4. Структура и эволюция волн в аэровзвеси.** Решения рассматриваемых здесь модельных задач для уравнения Бюргера хорошо известны (см., например, [11]), поэтому обратим внимание лишь на их специфику применительно к аэровзвеси.

Для исследования структуры волны рассмотрим задачу о распаде бесконечной ступеньки. Пусть в начальный момент задано возмущение  $u(\xi, 0) = V\theta(\xi)$ . Тогда решение (1.8) при  $t \gg 1$  запишется в виде

$$u = V[1 + \exp(-y\text{Re})]^{-1},$$

где  $\text{Re} = 0,5kV\eta^{-1}$  — число Рейнольдса;  $y = \xi + 0,5kVt$  — пространственная переменная, связанная с фронтом волны.

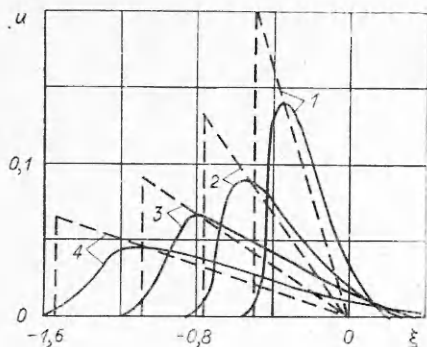
Найдем толщину фронта волны  $\lambda$ , определив ее следующим образом:  $\lambda = V(\partial_y u)^{-1}|_{y=0}$ . Будем иметь }

$$\lambda = 4\text{Re}^{-1} = 16\eta V^{-1}(g + 1)^{-1}.$$

Таким образом, в силу линейной зависимости  $\lambda$  от вязкости можно говорить о различных толщинах фронта волны  $\lambda_u, \lambda_T, \lambda_D$ , связанных с процессами трения, тепло- и массообмена между фазами, а поскольку величина  $g$  слабо зависит от параметров аэровзвеси, характер изменения этих

кости  $\chi$  роль теплообмена, как видно из фиг. 1, значительно увеличивается, особенно в области малых концентраций. Отметим, что поскольку с ростом  $\kappa$  показатель адиабаты приближается к единице, то «тепловая» вязкость изменяется немонотонно. Ее максимальное значение  $b_T = \chi(1 - \gamma^{-1})(1 + \gamma^{0,5})^{-2}$  достигается при  $\kappa = \gamma^{0,5}\chi^{-1}$ . Несмотря на это, суммарная вязкость с ростом концентрации возрастает монотонно.

Диссипативные свойства аэровзвеси существенно изменяются при наличии массообмена между фазами. В этом случае наряду с «динамической» и «тепловой»



Ф и г. 2

толщин полностью определяется поведением соответствующих им коэффициентов вязкости.

Более точная информация о структуре волны, как отмечалось, может быть получена, если в разложениях (1.6), (2.3) учесть следующие из отброшенных членов. Это привело бы к появлению в среде не только диссипации, но и дисперсии. Анализ дисперсионных свойств сред с релаксацией посвящен целый ряд исследований (см., например, [12]). Полученные результаты показывают, что учет дисперсионных членов обычно не приводит к существенным поправкам.

Переходя к рассмотрению эволюции волны конечной длительности, отметим, что начальная форма возмущений играет заметную роль лишь на ранней стадии их эволюции, т. е., как показывают оценки, в интервале времени  $(0, \max(\xi_0^2 \eta^{-1}, \xi^2 \eta^{-1} \text{Re}^{-1}))$ , где  $\xi_0$  — размер возмущенной области при  $t = 0$ . Поэтому для установления асимптотических (при  $t \gg 1$ ) характеристик затухания начальное условие несущественно. Задав это условие в виде  $\delta$ -импульса ( $u(\xi, 0) = A\delta(\xi)$ ), будем иметь

$$(4.1) \quad u = \frac{2A}{(\pi \text{Re} kt)^{0.5}} \frac{(e^{\text{Re}} - 1) e^{-0.5\zeta^2}}{e^{\text{Re}} + 1 + 2(e^{\text{Re}} - 1) \Phi(\zeta)},$$

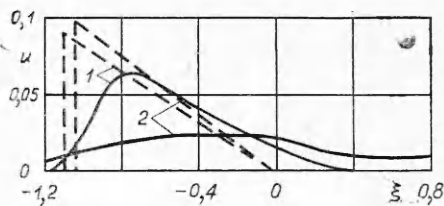
где  $\Phi(\zeta)$  — интеграл вероятностей;  $\text{Re} = kA(2\eta)^{-1}$ ;  $\zeta = \xi(2\eta t)^{-0.5}$ .

Решение этой же задачи в равновесном приближении ( $\eta = 0$ ) имеет вид

$$(4.2) \quad \xi_\Phi = -(2Akt)^{0.5}, \quad u_\Phi = (2A/kt)^{0.5}, \quad u = -\xi/kt, \quad \xi \in (\xi_\Phi, 0)$$

и представляет собой классическое решение Крюссара.

Анализ показывает (см. [11]), что при малых значениях вязкости решение (4.1) соответствует в основном равновесному решению (4.2), за исключением участков длиной  $\sim \text{Re}^{-1}$  и  $\text{Re}^{-0.5}$ , расположенных вблизи сильного и слабого разрывов. Применительно к аэрозвеси твердых частиц это означает, что при малых концентрациях диспергированного вещества процессы релаксации, обусловленные «проскальзыванием» газовой и дисперсной фаз по скорости и температуре, играют роль лишь на указанных участках. С увеличением концентрации эффекты «проскальзывания» становятся существенными на всем протяжении волнового возмущения. На фиг. 2 представлена эволюция волны ( $A = 0,05$ ) в аэрозвеси твердых частиц ( $\kappa = 0,05$ ,  $\chi = 1$ ,  $\tau_u = 0,1$ ) с учетом и без учета релаксационных процессов (решения (4.1) — сплошные линии, а (4.2) — штриховые). Линии 1—4 соответствуют моментам времени  $t = 2; 5; 10; 20$ . Как видно из фиг. 2, «проскальзывание» фаз приводит к размыванию волны и снижению ее амплитуды по сравнению с равновесной волной, когда процессы релаксации не учитываются. При дальнейшем росте концентрации дисперсной фазы роль релаксационных процессов еще более возрастает. На фиг. 3 в момент  $t = 10$  даны профили волны при  $\kappa = 0,05$  и  $0,5$  (линии 1 и 2 соответственно), значения остальных параметров, как на фиг. 2. Видно, что при  $\kappa = 0,5$  волна даже отдаленно не напоминает равновесную. Это происходит, поскольку при достаточно больших значениях  $\eta$  вязкий член



Ф и г. 3

в уравнении (1.8) становится преобладающим над нелинейным. Тогда решение задачи об эволюции  $\delta$ -импульса описывается выражением

$$(4.3) \quad u = A(4\pi\eta t)^{-0,5} \exp(-0,5\xi^2),$$

представляющим функцию источника для одномерного уравнения теплопроводности. Именно такой случай и реализуется практически на фиг. 3 (сплошная кривая 2).

Столь же большие значения коэффициента «эффективной» вязкости, как следует из фиг. 1, характерны для аэрозвеси жидких частиц. Поэтому эволюция волнового возмущения в аэрозвеси жидких частиц при  $\tau_u = 0,1$  также описывается формулой (4.3).

Проведенный анализ показал, что релаксационные процессы обмена массой, импульсом и теплом между фазами приводят к размыванию профиля волны (см. фиг. 2, 3). Причем в рамках данного приближения влияние каждого из указанных процессов аддитивно ( $\eta = \eta_u + \eta_T + \eta_D$  и  $\lambda = \lambda_u + \lambda_T + \lambda_D$ ). Эффект размывания волны тем выше, чем больше значения коэффициентов «вязкости», связь которых с параметрами среды дается соотношениями (1.9), (2.6). Отметим, что неравномерность аэрозвеси следует учитывать уже при очень малых значениях  $\eta$ ; для случаев, представленных на фиг. 2, 3,  $\eta \approx 3 \cdot 10^{-3}$ ,  $2 \cdot 10^{-2}$ .

Роль процессов межфазного взаимодействия неодинакова. Так, для взвеси твердых частиц с  $\chi = 1$  преобладающую роль во всем допустимом диапазоне концентраций играет обмен импульсом, а учет теплообмена приводит примерно к 10%-ной поправке в определении  $\eta$  (см. фиг. 1). В случае жидких частиц (капель воды) при малых концентрациях ( $\kappa_m < \kappa \leq 0,5$ ) эффекты трения, тепло- и массообмена сравнимы между собой (см. фиг. 1), а при больших концентрациях массообмен становится несущественным по сравнению с силовым и тепловым взаимодействием фаз.

Авторы признательны А. А. Борисову, беседе с которым стимулировали проведение настоящего исследования [13].

Поступила 20 X 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Губайдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматуллин Р. И. Некоторые результаты численного исследования нестационарных волн в газовзвесах.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 5.
2. Гольцнер А. Д., Тараканов С. В. и др. Формирование плоской релаксационной волны в аэрозвесах твердых частиц.— ПМТФ, 1977, № 2.
3. Рахматуллин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред.— ПММ, 1956, т. 20, № 2.
4. Крайко А. П., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами.— ПММ, 1965, т. 29, № 3.
5. Нигматуллин Р. И. Уравнения гидродинамики и волны уплотнения в двухскоростной и двухтемпературной сплошной среде при наличии фазовых превращений.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 5.
6. Нигматуллин Р. И. Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидродинамике многофазных сред.— ПММ, 1971, т. 35, № 3.
7. Davidson G. A. A Burgers'equation approach to finite amplitude acoustics in aerosol media.— J. Sound and Vibration, 1975, vol. 38, N 4.
8. Davidson G. A. A Burgers'equation for finite amplitude acoustics in fogs.— J. Sound and Vibration, 1976, vol. 45, N 4.
9. Marble F. E. Dynamics of dusty gases.— Annual Review on Fluid Mechanics, 1970, vol. 2, p. 397. Рус. пер. Динамика запыленных газов.— Сб. пер. Механика, 1971, № 6.
10. Полякова А. Л., Солуян С. И., Хохлов Р. В. К вопросу о распространении конечных возмущений в релаксирующей среде.— Акуст. журн., 1962, т. 8, № 1.
11. Уизем Дж. Линеиные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
12. Накоряков В. Е., Борисов А. А. Распространение возмущений в среде с релаксацией и химической реакцией.— ФГВ, 1976, т. 12, № 3.
13. Борисов А. А., Вахгельт А. Ф., Накоряков В. Е. Распространение длинноволновых возмущений конечной амплитуды в газовзвесах.— ПМТФ, 1980, № 5.