

## К АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВИХРЕЙ ГЕРТЛЕРА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

Явление гидродинамической неустойчивости течения в поле центробежных сил [1, 2] (вихри Тейлора — Гертлера) оказывает значительное влияние на работу различных устройств с искривлением потока, на инициирование перехода из ламинарного состояния в турбулентное [3, 4]. Исследования развития вихрей в пограничном слое жидкости около вогнутой поверхности (вихри Гертлера) ввиду сложности этой проблемы долгое время ограничивались их начальной линейной стадией. При использовании специального вида решения уравнений Навье — Стокса определялись зависимости инкремента роста амплитуды вихрей от их длины волны [5, 6]. Различие результатов подобных работ, особенно для длинноволновых вихрей, стимулировало проведение асимптотического анализа их развития. В [7—11] показана необходимость учета нарастания пограничного слоя, изучалось стабилизирующее действие нелинейных эффектов, а в [12] — влияние начальных условий. Многочисленные результаты теоретических и экспериментальных исследований представлены в [13, 14], в [14, 15] содержатся редкие пока данные для газа. Анализ нестационарного развития вихрей выполнен в [16], где определены диапазоны длин волн наиболее устойчивых вихрей.

Асимптотический анализ уравнений Навье — Стокса при больших числах Рейнольдса и Гертлера позволяет выявить основные механизмы развития неустойчивости течения, найти параметры подобия и упростить краевые задачи, решения которых имеют большое теоретическое и прикладное значение. Различные аспекты развития вихрей Гертлера при таком подходе изучались в [17—19].

1. Пусть вогнутая поверхность обтекается равномерным потоком вязкой жидкости при больших, но докритических числах Рейнольдса ( $Re = u_\infty L/\nu = \varepsilon^{-2}$ ,  $u_\infty$  — скорость набегающего потока,  $L$  — расстояние вдоль потока от переднего края поверхности до точки зарождения неустойчивости течения,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости). Около этой поверхности образуется двумерный ламинарный пограничный слой. При некоторых условиях такое течение может потерять устойчивость. Тогда в пограничном слое возникают стационарные вытянутые в продольном направлении вихри Гертлера. Ниже строится решение уравнений Навье — Стокса для пространственных вихревых областей при  $Re \rightarrow \infty$ .

Схема исследуемого течения представлена на рис. 1. Здесь все линейные размеры отнесены к  $L$ ,  $R$  — радиус кривизны,  $\delta \sim \varepsilon$  — характерная толщина пограничного слоя. В дальнейшем компоненты скорости  $u$ ,  $v$  и  $w$  (вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно) относятся к  $u_\infty$ , давление  $p$  — к  $\rho u_\infty^2$  ( $\rho$  — плотность жидкости) и используются только безразмерные переменные. Предполагается, что кривизна  $k = L/R = \kappa K < 1$ ,  $K \sim 1$ ,  $\varepsilon < \kappa < 1$ , т. е. течение рассматривается при больших числах Гертлера ( $G = 2 Re^{1/2} L/R \sim \kappa/\varepsilon > 1$ ).

На рис. 1  $a$ ,  $b$  и  $c$  — характерные толщина, протяженность и ширина вихревых областей. Эти величины должны быть больше характерной длины свободного пробега молекул жидкости  $\sim \varepsilon^2$ , иначе в областях с размерами  $\Delta x \sim b$ ,  $\Delta y \sim a$  и  $\Delta z \sim c$  уже не будут справедливы уравнения Навье — Стокса. Кроме того,  $b$  (на этой длине происходит развитие вихрей от их зарождения до нелинейной стадии) должна превосходить их поперечные размеры и не превышать размеры обтекаемого тела, т. е.  $\varepsilon^2 < a$ ,  $c < b \leq 1$ .

2. При построении асимптотической теории вихрей Гертлера предполагается, что потеря устойчивости пограничного слоя вызывает не-

линейные возмущения функций течения ( $\Delta u \sim u$ , например) в области их локализации, т. е. возмущения от вихрей уже в первом приближении влияют на характеристики пограничного слоя. В поле центробежных сил возникает тогда возмущение давления  $\Delta p \sim ku^2 \Delta y$ , которое индуцирует скорость  $w \sim \Delta w \sim \Delta p^{1/2} \sim k^{1/2} u \Delta y^{1/2}$ . Так как оценки для  $\Delta p$  и  $w$  получены из сопоставления порядков величин конвективных членов уравнений Навье — Стокса, то механизм конвекции является основным при зарождении вихрей.

Пусть вихри зарождаются в пристеночной части пограничного слоя с характерной толщиной  $\Delta y \sim a < \delta$ , где завихренность течения наибольшая, а скорость  $u$  пропорциональна расстоянию от поверхности  $u \sim \Delta y/\epsilon$ . Тогда справедливы оценки

$$(2.1) \quad u \sim a/\epsilon, \quad \Delta p \sim \kappa a^3/\epsilon^2, \quad w \sim \kappa^{1/2} a^{3/2}/\epsilon.$$

В общем случае толщина и ширина вихревой области одинаковы по порядку величины  $\Delta y \sim a \sim \Delta z \sim c$ , и поэтому

$$(2.2) \quad a \sim c \sim \kappa b^2.$$

Оценки (2.1) и (2.2) позволяют ввести для пристеночной области 3 переменные и асимптотические разложения функций течения (здесь принимается традиционный для отечественных исследований порядок нумерации возмущенных областей течения (см., например, [20]):

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x &= bx_3, \quad y = \kappa b^2 y_3, \quad z = \kappa b^2 z_3, \\ u &= (\kappa b^2/\epsilon)u_3 + \dots, \quad v = (\kappa^2 b^3/\epsilon)v_3 + \dots, \\ w &= (\kappa^2 b^3/\epsilon)w_3 + \dots, \quad \Delta p \approx (\kappa^4 b^6/\epsilon^2)p_3 + \dots \end{aligned}$$

( $\Delta p$  определяется относительно давления на поверхности в точке зарождения вихрей). Подстановка (2.3) в уравнения Навье — Стокса и совершенные предельного перехода при  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\epsilon < \kappa < 1$  показывают, что в общем случае при  $b \sim (\epsilon/\kappa)^{3/5} < 1$  развитие вихрей приближенно описывается параболизированными в продольном направлении уравнениями Навье — Стокса без продольного градиента давления:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \partial u_3/\partial x_3 + \partial v_3/\partial y_3 + \partial w_3/\partial z_3 &= 0, \\ u_3 \partial u_3/\partial x_3 + v_3 \partial u_3/\partial y_3 + w_3 \partial u_3/\partial z_3 &= \partial^2 u_3/\partial y_3^2 + \partial^2 u_3/\partial z_3^2, \\ u_3 \partial v_3/\partial x_3 + v_3 \partial v_3/\partial y_3 + w_3 \partial v_3/\partial z_3 + \kappa u_3^2 + \partial p_3/\partial y_3 &= \partial^2 v_3/\partial y_3^2 + \partial^2 v_3/\partial z_3^2, \\ u_3 \partial w_3/\partial x_3 + v_3 \partial w_3/\partial y_3 + w_3 \partial w_3/\partial z_3 + \partial p_3/\partial z_3 &= \partial^2 w_3/\partial y_3^2 + \partial^2 w_3/\partial z_3^2. \end{aligned}$$

На поверхности выполняются условия прилипания и непротекания

$$(2.5) \quad u_3 = v_3 = w_3 = 0 \quad (y_3 = 0),$$

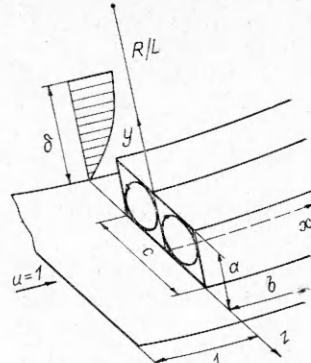
а внешние и начальные условия получаются из сращивания с течением в пристеночной части пограничного слоя:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} u_3 &\rightarrow Ay_3, \quad v_3, w_3 \rightarrow 0, \\ p_3 &\rightarrow -KA^2 y_3^3/3 \quad (x_3 \rightarrow -\infty \text{ или } y_3 \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Здесь  $A = (\partial u_0/\partial y_2)_w$ ;  $u_0(y_2)$  — профиль скорости  $u$  в пограничном слое в точке зарождения вихрей;  $y_2 = y/\epsilon$ . В поперечном направлении выполняется условие периодичности

$$(2.7) \quad u_3, v_3, w_3, p_3(x_3, y_3, z_3) = u_3, v_3, w_3, p_3(x_3, y_3, z_3 + \lambda)$$

( $\lambda$  — длина волны вихрей).



Р и с. 1

Краевая задача (2.4)–(2.7) описывает нелинейное развитие коротковолновых вихрей Гертлера при  $a \sim c \sim \varepsilon^{6/5}/\kappa^{1/5} < \delta \sim \varepsilon$  в пристеночной части пограничного слоя. Из характеристик пограничного слоя сюда входит только величина  $A$ , развитие вихрей происходит в плоскопараллельном потоке, так как на расстоянии  $\Delta x \sim b \sim (\varepsilon/\kappa)^{3/5} < 1$  несущественно продольное изменение функций течения в пограничном слое.

При  $(\varepsilon/\kappa)^{3/5} < b < (\varepsilon/\kappa)^{1/2}$  в (2.4) несущественны диссипативные члены, на поверхности выполняется условие непротекания. Для удовлетворения условий прилипания необходимо рассматривать вязкий подслой. Если же  $\varepsilon/\kappa^{1/2} < b < (\varepsilon/\kappa)^{3/5}$ , то в (2.4) несущественны конвективные члены. Но тогда исчезает механизм зарождения неустойчивости течения и для таких вихрей несправедливы оценки (2.1) и (2.2).

Переменные  $x_3, y_3, z_3, u_3, v_3, w_3$  и  $p_3$  можно отнести к  $(\lambda/2\pi K)^{1/2}, \lambda/2\pi, \lambda/2\pi, AK^{1/2}(\lambda/2\pi)^{3/2}, AK^{1/2}(\lambda/2\pi)^{3/2}$  и  $A^2K\lambda/2\pi$  соответственно. Тогда (2.4)–(2.7) преобразуются к виду

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z &= 0, \\ \text{Re}_1(u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y + w\partial u/\partial z) &= \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2, \\ \text{Re}_1(u\partial v/\partial x + v\partial v/\partial y + w\partial v/\partial z + u^2 + \partial p/\partial y) &= \partial^2 v/\partial y^2 + \partial^2 v/\partial z^2, \\ \text{Re}_1(u\partial w/\partial x + v\partial w/\partial y + w\partial w/\partial z + \partial p/\partial z) &= \partial^2 w/\partial y^2 + \partial^2 w/\partial z^2, \\ u = v = w = 0 \quad (y = 0), \quad u \rightarrow y, \quad v, w \rightarrow 0, \quad p \rightarrow -y^3/3 \quad (x \rightarrow -\infty \\ \text{или } y \rightarrow \infty), \quad u, v, w, p(x, y, z) &= u, v, w, p(x, y, z + 2\pi), \\ \text{Re}_1 &= AK^{1/2}(\lambda/2\pi)^{5/2} \sim 1, \end{aligned}$$

где для краткости опущен индекс 3 у переменных;  $\text{Re}_1$  — местное число Рейнольдса.

Для малых возмущений пограничного слоя возможна линеаризация (2.8) относительно начальных условий

$$\begin{aligned} u &= y + \alpha U + \dots, \quad v = \alpha V + \dots, \quad w = \alpha W + \dots, \\ p &= -y^3/3 + \alpha P + \dots, \quad \alpha < 1. \end{aligned}$$

При использовании представления линеаризованного решения (см., например, [5])

$$(2.9) \quad \begin{aligned} U &= \exp(\beta x)U_1(y) \cos z, \quad V = \exp(\beta x)V_1(y) \cos z, \\ W &= \exp(\beta x)W_1(y) \sin z, \quad P = \exp(\beta x)P_1(y) \cos z \end{aligned}$$

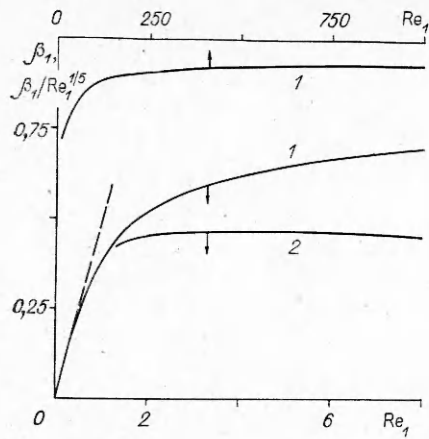
краевая задача (2.8) может быть сведена к следующей:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \beta U_1 + dV_1/dy + W_1 &= 0, \quad \text{Re}_1(\beta y U_1 + V_1) = d^2 U_1/dy^2 - U_1, \\ \text{Re}_1(\beta y V_1 + 2y U_1 + dP_1/dy) &= d^2 V_1/dy^2 - V_1, \\ \text{Re}_1(\beta y W_1 - P_1) &= d^2 W_1/dy^2 - W_1, \\ U_1(0) = V_1(0) = W_1(0) &= U_1(\infty) = V_1(\infty) = W_1(\infty) = 0. \end{aligned}$$

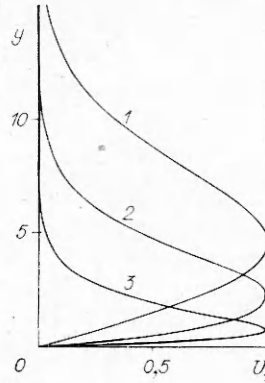
Это — типичная задача на собственные значения: для каждой величины инкремента роста амплитуды вихрей  $\beta$  необходимо найти одно или несколько значений  $\text{Re}_1$ , при которых существует ее нетривиальное решение. Численное решение (2.10) получено с помощью метода обратных итераций [21]. На рис. 2 представлена зависимость  $\beta_1$  от  $\text{Re}_1$  для первой вихревой моды кривой 1, которая проходит практически через начало координат; до значения  $\text{Re}_1 \approx 0,3$  она линейная, при дальнейшем росте  $\text{Re}_1$   $\beta_1$  монотонно возрастает и приближается к своему предельному значению при  $\text{Re}_1 \rightarrow \infty$

$$(2.11) \quad \beta_n = n^{-1/2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

( $n$  — номер моды). Соотношение (2.11) удается получить из (2.10) в аналитическом виде, если там отбросить правые части [22]. Аналогичный



Р и с. 2



Р и с. 3

предельный переход можно совершить с помощью (2.3) при  $(\varepsilon/\kappa)^{3/5} < b < (\varepsilon/\kappa)^{1/2}$ .

На рис. 3 показаны профили  $U_1(y)$  для  $Re_1 = 0,864; 2,64$  и  $114$  (кривые 1—3). При больших значениях  $Re_1$  максимум  $U_1(y)$  располагается близко к поверхности, и в пределе здесь формируется вязкий подслой. При уменьшении  $Re_1$  максимум  $U_1(y)$  удаляется от поверхности, т. е. вихри «всплывают».

Рост амплитуды вихрей характеризуется произведением

$$(2.12) \quad \beta x = BX/L, \quad X \sim L, \\ B = (\kappa/\varepsilon)^{3/5} \beta A^{1/5} K^{3/5} / Re_1^{1/5} = (\kappa/\varepsilon)^{3/5} \beta (2\pi K/\lambda)^{1/2}.$$

Кривая 2 на рис. 2 показывает изменение величины  $\beta_1/Re_1^{1/5}$ , имеющей максимум при  $Re_1 \approx 4,4$ .

3. Решение краевой задачи (2.10) не позволяет определить конечное значение  $Re_1$  для нейтральных вихрей, т. е. при  $\beta = 0$ . Уменьшение  $\lambda$  приводит к соответствующему уменьшению  $Re_1$ . Но тогда в уравнениях движения становятся несущественными конвективные члены и исчезает механизм зарождения неустойчивости. Поэтому уменьшение  $\lambda$  должно компенсироваться ростом характерной скорости, с тем чтобы значение местного числа Рейнольдса оставалось конечным. Это возможно при «всплывании» вихрей. Учитывая, что напряжение трения сохраняет свой порядок величины во всем пограничном слое, а течение во «всплывшей» на характерную высоту  $h$  возмущенной области вязкое, получим

$$a \sim \varepsilon b^{1/3}, \quad c \sim (\varepsilon^3/\kappa b)^{1/2}, \quad h \sim \kappa b^2, \quad (\varepsilon/\kappa)^{3/5} < b \leq (\varepsilon/\kappa)^{1/2}, \\ u \sim h/\varepsilon, \quad \Delta u \sim a/\varepsilon, \quad v \sim ah/\varepsilon b, \quad w \sim ch/\varepsilon b, \quad \Delta p \sim w^2 \sim (ch/\varepsilon b)^2, \\ (3.1) \quad x = bx_3, \quad y = \kappa b^2 y_2 + \varepsilon b^{1/3} y_3, \quad z = (\varepsilon^3/\kappa b)^{1/2} z_3, \\ u = (\kappa b^2/\varepsilon) u_0(y_2) + b^{1/3} u_3 + \dots, \quad v = \kappa b^{4/3} v_3 + \dots, \\ w = (\kappa \varepsilon b)^{1/2} w_3 + \dots, \quad \Delta p \approx -(\kappa^4 b^6/\varepsilon^2) K \int_0^{y_2} u_0^2 dy_2 + \kappa \varepsilon b p_3 + \dots$$

Здесь  $y_2 \sim h/\kappa b^2 \sim 1$  — высота «всплывания» вихря, при  $h \sim \varepsilon$   $y_2$  — вертикальная переменная пограничного слоя. Подстановка (3.1) в уравнения Навье — Стокса и совершение предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon < \kappa < 1$ ,  $(\varepsilon/\kappa)^{3/5} < b \leq (\varepsilon/\kappa)^{1/2}$  показывают, что в первом приближении для возмущенной области справедливы уравнения

$$(3.2) \quad \partial v_3/\partial y_3 + \partial w_3/\partial z_3 = 0, \\ u_0 \partial u_3/\partial x_3 + v_3 (\partial u_0/\partial y_2 + \partial u_3/\partial y_3) + w_3 \partial u_3/\partial z_3 = \partial^2 u_3/\partial z_3^2,$$

$$u_0 \partial v_3 / \partial x_3 + v_3 \partial v_3 / \partial y_3 + w_3 \partial v_3 / \partial z_3 + 2Ku_0 u_3 = \partial^2 v_3 / \partial z_3^2,$$

$$u_0 \partial w_3 / \partial x_3 + v_3 \partial w_3 / \partial y_3 + w_3 \partial w_3 / \partial z_3 + \partial p_3 / \partial z_3 = \partial^2 w_3 / \partial z_3^2.$$

Решение этой системы должно затухать вверх по потоку и вверх — вниз от координаты  $y_2$ :

$$(3.3) \quad u_3, v_3, w_3, p_3 \rightarrow 0 \quad (x_3 \rightarrow -\infty \text{ или } y_3 \rightarrow +\infty),$$

а также удовлетворять условиям периодичности (2.7).

Краевая задача (2.7), (3.2), (3.3) описывает нелинейное развитие «всплывших» вихрей Гертлера. Ее решение определяет малые изменения скорости  $u$  и конечные ее градиента  $\partial u / \partial y$ . Из характеристик пограничного слоя сюда входят лишь значения  $u_0$  и  $du_0 / dy_2$  на высоте всплывания вихря  $y_2$ , а развитие вихрей происходит на малой длине  $(\epsilon/\kappa)^{3/5} < \Delta x \sim b \leq (\epsilon/\kappa)^{1/2} < 1$  в потоке с постоянной скоростью.

Переменные  $x_3, y_3, z_3, u_3, v_3, w_3$  и  $p_3$  можно отнести к  $u_0(\lambda/2\pi)^2, (u_0/(du_0/dy_2))^{1/3}(\lambda/2\pi)^{2/3}, \lambda/2\pi, u_0^{1/3}(du_0/dy_2)^{2/3}(\lambda/2\pi)^{2/3}, (u_0/(du_0/dy_2))^{1/3} \times (2\pi/\lambda)^{4/3}, 2\pi/\lambda$  и  $(2\pi/\lambda)^2$  соответственно. Тогда (2.7), (3.2), (3.3) преобразуются к виду

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \partial v / \partial y + \partial w / \partial z &= 0, \\ \partial u / \partial x + v(1 + \partial u / \partial y) + w \partial u / \partial z &= \partial^2 u / \partial z^2, \\ \partial v / \partial x + v \partial v / \partial y + w \partial v / \partial z + G_1 u &= \partial^2 v / \partial z^2, \\ \partial w / \partial x + v \partial w / \partial y + w \partial w / \partial z + \partial p / \partial z &= \partial^2 w / \partial z^2, \\ u, v, w, p &\rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty \text{ или } y \rightarrow \pm\infty), \\ u, v, w, p(x, y, z) &= u, v, w, p(x, y, z + 2\pi), \\ G_1 &= 2Ku_0(du_0/dy_2)(\lambda/2\pi)^4 \sim 1, \end{aligned}$$

где для краткости опущен индекс 3 у переменных;  $G_1$  — местное число Гертлера.

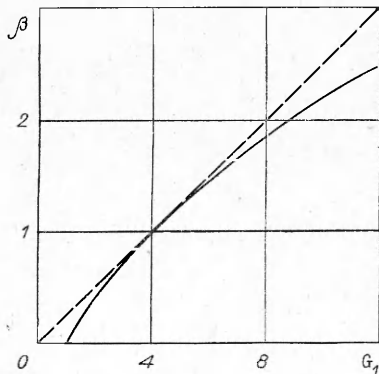
Для малых амплитуд вихрей, когда квадратичные члены уравнений (3.4) меньше линейных, возможна линеаризация. Использование представления (2.9) позволяет получить, что только при выполнении соотношения

$$(3.5) \quad G_1 = (1 + \beta_n)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

существует нетривиальное решение (сплошная кривая на рис. 4, штриховой показана касательная к ней, проходящая через начало координат  $\beta = G_1/4$ ). Рост амплитуды вихрей в рассматриваемом случае характеризуется  $B = (\beta/bu_0)(2\pi/\lambda)^2$ . При  $b \rightarrow (\epsilon/\kappa)^{3/5}$ , т. е. при переходе к вихрям в пристеночной части пограничного слоя, выражения для  $G_1$  и  $B$  можно представить как

$$(3.6) \quad G_1 \rightarrow 2 \operatorname{Re}_1^2 y_2 / (\lambda/2\pi), \quad y_2 \rightarrow \lambda/2\pi,$$

$$B \rightarrow (\kappa/\epsilon)^{3/5} (\beta/\operatorname{Re}_1) (A^{1/5} K^{3/5} / \operatorname{Re}_1^{1/5}) (\lambda/2\pi) / y_2.$$



Р и с. 4

Из сравнения (2.12) и (3.6) следует, что штриховая кривая (рис. 4) в переменных рис. 2 определяется соотношением  $\beta = \operatorname{Re}_1/2$  и является асимптотой к кривой 1 при  $\operatorname{Re}_1 \rightarrow 0$ , т. е. по мере уменьшения  $\operatorname{Re}_1$  и «всплывания» вихрей кривые зависимостей всех  $\beta_n$  ( $n \geq 1$ ) от  $\operatorname{Re}_1$  должны приближаться к линейному участку кривой 1 и сливаться с ней. Ее продолжением при  $\operatorname{Re}_1 \rightarrow 0$  является штриховая линия, которая при изменении мас-

штабов  $\beta$  и  $\text{Re}_1$  переходит в штриховую линию на рис. 4 и затем гладко сопрягается со сплошной линией при конечных значениях  $G_1$ .

Соотношение (3.5) определяет величину  $G_1 = 1$ , когда все моды становятся нейтральными ( $\beta_n = 0, n \geq 1$ ). Произведение  $u_0(du_0/dy_2)$ , очевидно, имеет максимум, а соответствующее значение  $y_2$  характеризует высоту «всплывания» нейтральных вихрей с наименьшей длиной волны.

4. По мере увеличения поперечных размеров вихревой области вплоть до  $a \sim c \sim \delta \sim \varepsilon$  остаются справедливыми оценки (2.1) и (2.2). Тогда вихри будут заполнять основную часть пограничного слоя (область 2) с характерной толщиной  $\Delta y \sim \delta \sim \varepsilon$ , для которой вводятся переменные и асимптотические разложения

$$x = (\varepsilon/\kappa)^{1/2}x_2, \quad y = \varepsilon y_2, \quad z = \varepsilon z_2, \quad \Delta p \approx \kappa \varepsilon p_2 + \dots,$$

$$u = u_2 + \dots, \quad v = \kappa^{1/2} \varepsilon^{1/2} v_2 + \dots, \quad w = \kappa^{1/2} \varepsilon^{1/2} w_2 + \dots$$

При подстановке этих разложений в уравнения Навье — Стокса и совершении предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon < \kappa < 1$  течение в первом приближении описывается уравнениями Эйлера без продольного градиента давления:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \partial u_2 / \partial x_2 + \partial v_2 / \partial y_2 + \partial w_2 / \partial z_2 &= 0, \\ u_2 \partial u_2 / \partial x_2 + v_2 \partial u_2 / \partial y_2 + w_2 \partial u_2 / \partial z_2 &= 0, \\ u_2 \partial v_2 / \partial x_2 + v_2 \partial v_2 / \partial y_2 + w_2 \partial v_2 / \partial z_2 + \kappa u_2^2 + \partial p_2 / \partial y_2 &= 0, \\ u_2 \partial w_2 / \partial x_2 + v_2 \partial w_2 / \partial y_2 + w_2 \partial w_2 / \partial z_2 + \partial p_2 / \partial z_2 &= 0. \end{aligned}$$

На поверхности может удовлетворяться только условие непротекания

$$(4.2) \quad v_2 = 0 \quad (y_2 = 0),$$

начальные и внешние краевые условия получаются из сращивания с решением для всего пограничного слоя:

$$(4.3) \quad u_2 \rightarrow u_0(y_2), \quad p_2 \rightarrow -K \int_0^{y_2} u_0^2 dy_2, \quad v_2, w_2 \rightarrow 0 \quad (x_2 \rightarrow -\infty \text{ или } y_2 \rightarrow \infty).$$

Решение уравнений (4.1) должно удовлетворять еще условиям периодичности (2.7).

В краевую задачу (2.7), (4.1)—(4.3) из характеристик пограничного слоя входит профиль скорости  $u_0(y_2)$ . Здесь  $\Delta x \sim (\varepsilon/\kappa)^{1/2} < 1$  и несущественно продольное изменение функций течения в пограничном слое. Для удовлетворения условий прилипания вблизи поверхности можно рассмотреть вязкий подслой.

Для случая, когда  $\lambda$  не превосходит толщины пограничного слоя  $\delta_1$  (за величину  $\delta_1$  можно принять значение координаты  $y_2$ , при которой  $u_0 = 0,99$ ), переменные  $x_2, y_2, z_2, v_2, w_2$  и  $p_2$  относятся к  $(\lambda/2\pi K)^{1/2}, \lambda/2\pi, \lambda/2\pi, (\lambda K/2\pi)^{1/2}, (\lambda K/2\pi)^{1/2}$  и  $\lambda K/2\pi$  соответственно. В новых переменных (без индекса 2) (2.7), (4.1)—(4.3) преобразуются к виду

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \gamma_3 \partial w / \partial z &= 0, \\ u \partial u / \partial x + v \partial u / \partial y + \gamma_3 w \partial u / \partial z &= 0, \\ \gamma_2 \gamma_3 (u \partial v / \partial x + v \partial v / \partial y + \gamma_3 w \partial v / \partial z) + u^2 + \partial p / \partial y &= 0, \\ u \partial w / \partial x + v \partial w / \partial y + \gamma_3 w \partial w / \partial z + \partial p / \partial z &= 0, \quad v = 0 \quad (y = 0), \\ u \rightarrow u_0(\gamma_1 y), \quad p \rightarrow - \int_0^y u_0^2 dy, \quad v, w \rightarrow 0 & \quad (x \rightarrow -\infty \text{ или } y \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

$$u, v, w, p(x, y, z) = u, v, w, p(x, y, z + 2\pi),$$

где  $\gamma_1 = \lambda/2\pi\delta_1; 0 < \gamma_1 \leq 1; \gamma_2 = \gamma_3 = 1$ . Для малых возмущений пограничного слоя возможна линеаризация (4.4) относительно начальных



условий. Использование представления (2.9) позволяет для пограничного слоя при интенсивном отсосе [23]

$$(4.5) \quad u_0 = 1 - \exp(-\gamma_1 y), \quad v_0 = -1/\delta_1, \quad \delta_1 = \text{const}$$

получить аналитическое решение и следующее выражение для  $\beta$  [22]:

$$(4.6) \quad \beta_n^{-2} = \gamma_1(n^2 - 1)/2 + n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

При  $\gamma_1 \rightarrow 0$  (4.6) переходит в (2.11). Рост амплитуды вихрей при этом характеризуется величиной

$$(4.7) \quad B = (\beta/b)(2\pi K/\lambda)^{1/2}, \quad (\varepsilon/\kappa)^{3/5} < b \leq (\varepsilon/\kappa)^{1/2}.$$

5. При изучении длинноволновых вихрей ( $c > \delta \sim \varepsilon$ ) принимается, что нелинейные изменения происходят в основной части пограничного слоя (область 2) с характерной толщиной  $\Delta y_2 \sim \delta \sim \varepsilon$ . Выше может располагаться слабозмущенная зона внешнего течения (область 1) с характерной толщиной  $\Delta y_1 \sim c$ . Для области 2 можно получить оценки

$$(5.1) \quad \Delta x_2 \sim b, \quad \Delta y_2 \sim a \sim \varepsilon, \quad \Delta z_2 \sim c \sim \kappa^{1/2} \varepsilon^{1/2} b, \quad (\varepsilon/\kappa)^{1/2} < b \leq 1, \\ u_2 \sim \Delta u_2 \sim 1, \quad v_2 \sim \varepsilon/b, \quad w_2 \sim \kappa^{1/2} \varepsilon^{1/2}, \quad \Delta p_2 \sim \kappa \varepsilon.$$

Для существования взаимодействия между областями 1 и 2 необходимо, чтобы в них скорость  $v$  сохраняла свой порядок величины. Тогда для области 1 справедливы оценки

$$(5.2) \quad \Delta x_1 \sim b, \quad \Delta y_1 \sim \Delta z_1 \sim \kappa^{1/2} \varepsilon^{1/2} b, \quad u_1 \sim 1, \quad v_1 \sim w_1 \sim \varepsilon/b, \\ \Delta u_1 \sim \Delta p_1 \sim \kappa^{1/2} \varepsilon^{3/2}/b.$$

Из сопоставления (5.1) и (5.2) видно, что  $\Delta p_1/\Delta p_2 \sim (\varepsilon/\kappa)^{1/2}/b < 1$ , т. е. в области 1 затухают возмущения, которые индуцируются в области 2, и нет обратного на нее влияния.

На основании оценок (5.1) для области 2 вводятся переменные и асимптотические разложения

$$x = bx_2, \quad y = \varepsilon y_2, \quad z = \kappa^{1/2} \varepsilon^{1/2} bz_2, \quad \Delta p \approx \kappa \varepsilon p_2 + \dots, \\ u = u_2 + \dots, \quad v = (\varepsilon/b)v_2 + \dots, \quad w = \kappa^{1/2} \varepsilon^{1/2} w_2 + \dots,$$

при подстановке которых в уравнения Навье — Стокса и совершении предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon < \kappa < 1$ ,  $(\varepsilon/\kappa)^{1/2} < b \leq 1$  получается, что в первом приближении течение описывается уравнениями

$$(5.3) \quad \partial u_2/\partial x_2 + \partial v_2/\partial y_2 + \partial w_2/\partial z_2 = 0, \quad \kappa u_2^2 + \partial p_2/\partial y_2 = 0, \\ u_2 \partial u_2/\partial x_2 + v_2 \partial u_2/\partial y_2 + w_2 \partial u_2/\partial z_2 = b \partial^2 u_2/\partial y_2^2, \\ u_2 \partial w_2/\partial x_2 + v_2 \partial w_2/\partial y_2 + w_2 \partial w_2/\partial z_2 + \partial p_2/\partial z_2 = b \partial^2 w_2/\partial y_2^2.$$

На поверхности должны выполняться условия

$$(5.4) \quad u_2 = w_2 = 0, \quad v_2 = bv_{0w} \quad (y_2 = 0),$$

начальные и внешние краевые условия находятся из сращивания с решениями для пограничного слоя и внешнего течения:

$$(5.5) \quad u_2 = u_0(y_2), \quad v_2 = bv_0(y_2), \quad w_2 = 0, \\ p_2 = -K \int_0^{y_2} u_0^2 dy_2 \quad (x_2 = -x_0/b),$$

$$u_2 \rightarrow 1, \quad w_2 \rightarrow 0, \quad p_2 \rightarrow -K \int_0^{y_2} u_2^2 dy_2 \quad (y_2 \rightarrow \infty).$$

И еще должно удовлетворяться условие периодичности (2.7).

Краевая задача (2.7), (5.3)–(5.5) описывает нелинейное развитие длинноволновых вихрей. При  $b < 1$  в (5.3) отсутствуют диссипативные

члены; из характеристик пограничного слоя в задачу входит только начальный профиль  $u_0(y_2)$ , его продольное изменение несущественно. Для удовлетворения условий прилипания вблизи поверхности можно рассмотреть вязкий подслой. Если же  $b \sim 1$ , то продольные масштабы пограничного слоя и вихрей одинаковы и необходимо учитывать продольное изменение функций течения в пограничном слое.

Полезно переменные  $x_2, y_2, z_2, v_2, w_2$  и  $p_2$  отнести дополнительно к  $\lambda/2\pi K^{1/2}\delta_1^{1/2}, \delta_1, \lambda/2\pi, 2\pi K^{1/2}\delta_1^{3/2}/\lambda, K^{1/2}\delta_1^{1/2}$  и  $K\delta_1$ . В новых переменных (2.7), (5.3)–(5.5) для  $b \sim 1$  принимают вид

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z &= 0, \quad u^2 + \partial p/\partial y = 0, \\ \text{Re}_2(u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y + w\partial u/\partial z) &= \partial^2 u/\partial y^2, \\ \text{Re}_2(u\partial w/\partial x + v\partial w/\partial y + w\partial w/\partial z + \partial p/\partial z) &= \partial^2 w/\partial y^2, \\ u = w = 0, \quad v &= (\delta_1/\text{Re}_2)v_{0w} \quad (y = 0), \\ u \rightarrow 1, \quad w \rightarrow 0, \quad p &\rightarrow -\int_0^y u^2 dy \quad (y \rightarrow \infty), \\ u = u_0, \quad v &= (\delta_1/\text{Re}_2)v_0, \quad w = 0, \\ p &= -\int_0^y u_0^2 dy \quad (x = -(\text{Re}_2/\delta_1^2)x_0), \\ u, v, w, p(x, y, z) &= u, v, w, p(x, y, z + 2\pi), \\ \text{Re}_2 &= 2\pi K^{1/2}\delta_1^{5/2}/\lambda \sim 1, \end{aligned}$$

где для краткости опущен индекс 2 у переменных;  $\text{Re}_2$  — местное число Рейнольдса. Соответствующая краевая задача для  $b < 1$  может быть получена из (5.6) с помощью предельного перехода при  $\text{Re}_2 \rightarrow \infty$ .

Использование переменных (5.6) позволяет для случая, когда  $a \sim c \sim \delta \sim \varepsilon$ , но  $\lambda$  превосходит  $\delta_1$ , краевую задачу представить в виде (4.4) при  $\gamma_1 = \gamma_3 = 1, \gamma_2 = (2\pi\delta_1/\lambda)^2, 0 < \gamma_2 \leq 1$ . Ее решение при  $\gamma_2 \rightarrow 0$  должно быть предельным для (5.6) при  $\text{Re}_2 \rightarrow \infty$ . В линейном приближении при использовании представления (2.9) и профиля (4.5) удается найти ее аналитическое решение [22] и соотношение для  $\beta$ :

$$(5.7) \quad \beta_n^{-2} = (n^2 - 1)/2 + n\gamma_2^{1/2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

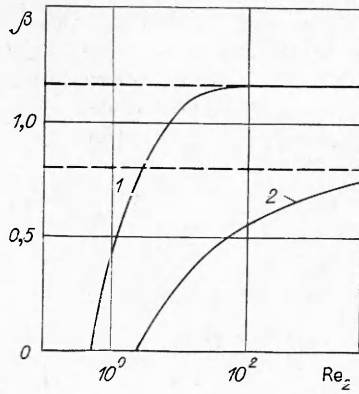
Очевидно, что при  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$  выражения (4.6) и (5.7) совпадают. Примечательно, что для первой моды  $\beta_1 = \gamma_2^{-1/4}$  и  $\beta_1 \rightarrow \infty$  при  $\gamma_2 \rightarrow 0$ , а для всех остальных мод  $\beta_n$  конечны при  $\gamma_2 \rightarrow 0$ , т. е. линейное развитие первой моды происходит на меньших расстояниях, чем всех последующих.

Для малых возмущений пограничного слоя возможна линеаризация (5.6) относительно начальных условий. Применение представления (2.9) позволяет получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений и краевых условий:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \beta U_1 + dV_1/dy + W_1 &= 0, \quad 2u_0 U_1 + dP_1/dy = 0, \\ \text{Re}_2 (\beta u_0 U_1 + U_1 \partial u_0/\partial x + V_1 \partial u_0/\partial y) + \delta_1 v_0 dU_1/dy &= d^2 U_1/dy^2, \\ \text{Re}_2 (\beta u_0 W_1 - P_1) + \delta_1 v_0 dW_1/dy &= d^2 W_1/dy^2, \\ U_1(0) = V_1(0) = W_1(0) = U_1(\infty) = W_1(\infty) = P_1(\infty) &= 0. \end{aligned}$$

Численное решение (5.8) найдено для профиля (4.5) при  $\gamma_1 = 1$  [21]. На рис. 5 представлена зависимость  $\beta_2$  от  $\text{Re}_2$  (кривая 2). Видно, что при  $\text{Re}_2 \approx 2,32$   $\beta_2 = 0$ , т. е. вторая мода становится нейтральной. По мере увеличения  $\text{Re}_2$   $\beta_2$  приближается к своему асимптотическому значению  $(2/3)^{1/2} \approx 0,816$  (см. (5.7) при  $n = 2$  и  $\gamma_2 \rightarrow 0$ ). Для исследуемого режима





Р и с. 5

развития вихрей рост их амплитуды характеризуется величиной

$$(5.9) \quad B = (\beta/b)(2\pi K/\lambda)^{1/2} \gamma_2^{1/4} = \beta \text{Re}_2/b\delta_1^2, \\ (\varepsilon/\kappa)^{1/2} < b \leq 1, \quad 0 < \gamma_2 < 1.$$

При  $b \rightarrow (\varepsilon/\kappa)^{1/2}$  и  $\gamma_2 \rightarrow 1$  выражения (4.7) и (5.9) совпадают.

6. Теперь рассматривается линейное развитие длинноволновых вихрей, которые уже не локализованы внутри пограничного слоя. В этом случае возмущается область 1, а 2 является слабо возмущенной. Вблизи поверхности должна располагаться область 3, которая в общем

случае вязкая и нелинейная и для которой действительны оценки

$$(6.1) \quad \Delta x_3 \sim b, \quad \Delta y_3 \sim \varepsilon b^{1/3}, \quad \Delta z_3 \sim c, \quad v_3 \sim \varepsilon/b^{1/3}, \\ u_3 \sim \Delta u_3 \sim b^{1/3}, \quad w_3 \sim c/b^{2/3}, \quad \Delta p_3 \sim c^2/b^{4/3}.$$

В области 2  $\Delta p_2$  создается за счет центробежных эффектов и  $\Delta p_2 \sim \Delta p_3$ . Поэтому здесь справедливы оценки

$$(6.2) \quad \Delta x_2 \sim b, \quad \Delta y_2 \sim \varepsilon, \quad \Delta z_2 \sim c, \quad u_2 \sim 1, \quad \Delta u_2 \sim c^2/\kappa \varepsilon b^{4/3}, \\ v_2 \sim c^2/b^{7/3}, \quad w_2 \sim c/b^{1/3}, \quad \Delta p_2 \sim c^2/b^{4/3}.$$

В области 1 должны затухать все возмущения и, следовательно,

$$(6.3) \quad \Delta x_1 \sim b, \quad \Delta y_1 \sim \Delta z_1 \sim c, \quad u_1 \sim 1, \quad \Delta u_1 \sim \Delta p_1 \sim c^2/b^{4/3}, \\ v_1 \sim w_1 \sim c/b^{1/3}.$$

При взаимодействии областей 1 и 2  $v_1 \sim v_2$ . Из (6.2) и (6.3) видно, что это возможно при

$$(6.4) \quad c \sim \kappa b^2, \quad b > \varepsilon^{1/2}/\kappa^{1/2}.$$

С другой стороны, для взаимодействия областей 2 и 3 необходимо нетривиальное сращивание разложений для скорости  $u$  ( $\Delta u_2 \sim u_3$ ), что возможно (см. (6.1) и (6.2)) при

$$(6.5) \quad c \sim \kappa^{1/2} \varepsilon^{1/2} b^{5/6}, \quad b \leq 1.$$

В общем случае, когда взаимодействуют друг с другом все три области и реализуется полностью трехслойная структура возмущенного течения около вогнутой поверхности [24, 25], справедливы оценки (6.4), (6.5) и

$$(6.6) \quad b \sim \varepsilon^{3/7}/\kappa^{3/7}, \quad c \sim \kappa^{1/7} \varepsilon^{6/7}.$$

Ниже приводятся в окончательном виде краевые задачи для областей 1 и 3 для общего случая (6.6):

$$(6.7) \quad \partial^2 p_1/\partial y_1^2 + \partial^2 p_1/\partial z_3^2 = 0, \quad p_1 \rightarrow 0 \quad (y_1 \rightarrow \infty), \\ \partial p_1/\partial y_1 = \gamma_5 \partial^2 D/\partial x_3^2 \quad (y_1 = 0), \\ \gamma_5 = \lambda/2\pi A^2 K l^6, \quad 0 \leq \gamma_5 \leq 1, \quad p_1(x_3, y_1, z_3) = p_1(x_3, y_1, z_3 + 2\pi), \\ \partial u_3/\partial x_3 + \partial v_3/\partial y_3 + \partial w_3/\partial z_3 = 0, \quad \partial p_3/\partial y_3 = 0, \\ u_3 \partial u_3/\partial x_3 + v_3 \partial u_3/\partial y_3 + w_3 \partial u_3/\partial z_3 = \partial^2 u_3/\partial y_3^2, \\ u_3 \partial w_3/\partial x_3 + v_3 \partial w_3/\partial y_3 + w_3 \partial w_3/\partial z_3 + \partial p_3/\partial z_3 = \partial^2 w_3/\partial y_3^2, \\ u_3 = v_3 = w_3 = 0 \quad (y_3 = 0), \\ u_3 \rightarrow y_3, \quad v_3, \quad w_3, \quad p_3, \quad D \rightarrow 0 \quad (x_3 \rightarrow -\infty), \\ u_3 \rightarrow y_3 + \gamma_4 D, \quad w_3 \rightarrow 0 \quad (y_3 \rightarrow \infty), \\ p_3 = D + p_1(x_3, 0, z_3), \quad \gamma_4 = \lambda^2/4\pi^2 K l^5, \quad 0 \leq \gamma_4 \leq 1,$$

$$\begin{aligned}
u_3, v_3, w_3(x_3, y_3, z_3) &= u_3, v_3, \\
w_3(x_3, y_3, z_3 + 2\pi), \\
p_3, D(x_3, z_3) &= p_3, D(x_3, \\
& z_3 + 2\pi).
\end{aligned}$$

Здесь индексы 1 и 3 у переменных обозначают номера областей;  $D(x_3, z_3)$  — толщина вытеснения области 3; параметры  $\gamma_4$  и  $\gamma_5$  характеризуют степени взаимодействия областей 2—3 и 1—2 соответственно;  $l$  — толщина области 3. Линеаризация (6.7) для области 3 относительно начальных условий, использование (2.9) и представления  $D(x_3, z_3) = D_1 \exp(\beta x_3) \cos z_3$  позволяют свести ее целиком к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и краевых условий:

$$\begin{aligned}
\beta U_1 + dV_1/dy_3 + W_1 &= 0, \quad \beta y_3 U_1 + V_1 = d^2 U_1/dy_3^2, \\
\beta y_3 W_1 - D_1(1 - \gamma_5 \beta^2) &= d^2 W_1/dy_3^2, \\
U_1(0) = V_1(0) = W_1(0) &= W_1(\infty) = 0, \quad U_1(\infty) = \gamma_4 D_1,
\end{aligned}$$

решение которой выражается через функцию Эйри  $Ai(\eta)$  и имеет дисперсионное соотношение

$$(6.8) \quad \gamma_5 \beta^2 - 3\gamma_4 \beta^{5/3} d Ai(0)/d\eta = 1.$$

Из (6.8) следует, что при  $\gamma_4 = 0, \gamma_5 = 1, l = (\lambda/2\pi A^2 K)^{1/6}$  (когда нет взаимодействия областей 2 и 3)  $\beta = 1$ . Соответствующее предельное решение можно получить из (4.4) при  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 2\pi\delta_1/\lambda, 0 < \gamma_3 \leq 1$ . В линейном приближении при использовании (2.9) и профиля (4.5) при  $\gamma_1 = 1$  удается получить ее аналитическое решение [22] и соотношение для  $\beta$ :

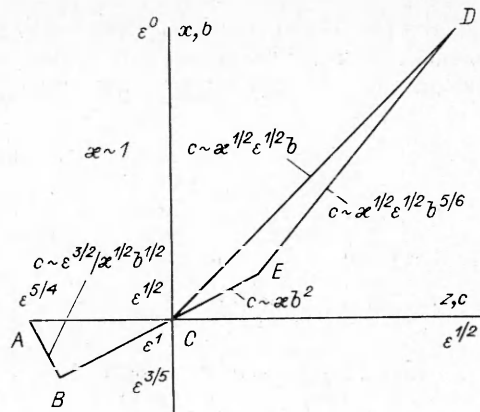
$$(6.9) \quad \gamma_3 \beta_n^2 = (n^2 - 1)/2 + n\gamma_3, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Легко видеть, что при  $\gamma_1, \gamma_2 \rightarrow 1$  формулы (4.6) и (6.9) совпадают и только  $\beta_1 \rightarrow 1$  при  $\gamma_3 \rightarrow 0$ , для всех высших мод  $\beta_n \sim \gamma_3^{1/2} \rightarrow 0, n > 1$ .

В другом случае, когда не возмущается область 1,  $\gamma_5 = 0, \gamma_4 = 1, l = (\lambda^2/4\pi^2 K)^{1/5}$  и из (6.8) вытекает, что  $\beta = (-3d Ai(0)/d\eta)^{-3/5} \approx 1,165$ . Предельное решение можно получить численно из (5.8) для профиля (4.5) при  $\gamma_1 = 1$  [21]. На рис. 5 представлена зависимость  $\beta_1$  для первой моды от  $Re_2$  (кривая 1). Видно, что при  $Re_2 \approx 0,486$  эта мода становится нейтральной, с ростом  $Re_2$   $\beta_1$  стремится к своему асимптотическому значению.

На рис. 6 приведена схема развития вихрей Гертлера в пограничном слое жидкости около вогнутой поверхности. Здесь по оси абсцисс откладывается ширина вихревой области  $c$ , а по оси ординат — ее протяженность  $b, \kappa \sim 1$ . Точка  $B$  отвечает режиму, описываемому решением краевой задачи (2.8). При уменьшении значений  $c$  и  $\lambda$  вихри «всплывают»; этому переходу соответствуют линия  $AB$  и краевая задача (3.4), здесь коротковолновые вихри могут становиться нейтральными. С ростом поперечных размеров вихрей протяженность  $b$  изменяется в соответствии с линией  $BC$ . В точке  $C$  вихри занимают всю толщину пограничного слоя и их развитие описывается решением краевой задачи (4.4).

При дальнейшем увеличении значений  $c$  и  $\lambda$  первая мода отделяется от всех последующих. Высшие моды локализованы внутри пограничного слоя (линия  $CD$ , краевая задача (5.6)), для них  $c > a$ . Первая длинноволновая мода сначала развивается вдоль линии  $CE$  при  $a \sim c > \delta$ .



Р и с. 6

За точкой  $E$  (краевая задача (6.7)) вихревая область начинает сплющиваться, и в точке  $D$  все моды опять сливаются; здесь длинноволновые вихри могут становиться нейтральными.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. I. Stability of viscous liquid contained between two rotating cylinders // Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A.— 1923.— V. 223.— P. 289.
2. Görtler H. Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an concaven Wänden // ZAMM.— 1941.— Bd 21, N 2.
3. Bennett J., Hall P. On the secondary instability of Taylor — Görtler vortices to Tollmien — Schlichting waves in fully developed flows // J. Fluid Mech.— 1988.— V. 186.— P. 445.
4. Daudpota Q. I., Hall P., Zang T. A. On the nonlinear interaction of Görtler vortices and Tollmien — Schlichting waves in curved channel flows at finite Reynolds numbers // J. Fluid Mech.— 1988.— V. 193.— P. 569.
5. Smith A. M. On the growth of Taylor — Görtler vortices along highly concave walls // Quart. Appl. Math.— 1955.— V. 13, N 3.
6. Herbert T. On the stability of the boundary layer on a curved wall // Arch. Mech.— 1976.— V. 28.— P. 1039.
7. Hall P. Taylor — Görtler vortices in fully developed or boundary-layer flows: linear theory // J. Fluid Mech.— 1982.— V. 124.— P. 475.
8. Hall P. On the non-linear evolution of Görtler vortices in non-parallel boundary layers // IMA J. of Appl. Math.— 1982.— V. 29.— P. 173.
9. Hall P. The linear development of Görtler vortices in growing boundary layers // J. Fluid Mech.— 1983.— V. 130.— P. 41.
10. Hall P. The nonlinear development of Görtler vortices in growing boundary layers // J. Fluid Mech.— 1988.— V. 193.— P. 243.
11. Hall P., Lakin W. D. The fully nonlinear development of Görtler vortices in growing boundary layers // Proc. R. Soc. Lond. A415, 1988.
12. Kalburgi V., Mangalam S. M. A comparative study of theoretical methods on Görtler instability.— N. Y., 1988.— (Pap./AIAA; N 0407).
13. Козлов Л. Ф., Цыганюк А. И., Бабенко В. В. и др. Формирование турбулентности в сдвиговых течениях.— Киев: Наук. думка, 1985.
14. Жигулев В. Н., Тумин А. М. Возникновение турбулентности // Динамическая теория возбуждения и развития неустойчивости в пограничных слоях.— Новосибирск: Наука, 1987.
15. Тумин А. М., Чернов Ю. П. Асимптотический анализ устойчивости течения в сжимаемом пограничном слое на искривленной поверхности // ПМТФ.— 1988.— № 3.
16. Гуревич Ю. Г. Развитие локального возмущения в пограничном слое на искривленной поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1990.— № 1.
17. Боголепов В. В., Дегтярев Л. М., Дроздова О. М., Липатов И. И. Асимптотическая структура вихрей Тейлора — Гертлера в пограничном слое.— М., 1988.— (Препр./АН СССР, ИПМ; № 156).
18. Тимошин С. Н. Асимптотический анализ пространственно-неустойчивого спектра вихрей Гертлера // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1990.— № 1.
19. Боголепов В. В., Липатов И. И. Асимптотический анализ развития вихрей Гертлера в пограничном слое жидкости около вогнутой поверхности.— М., 1990.— (Препр./ЦАГИ; № 8).
20. Нейланд В. Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ.— 1974.— Вып. 1529.
21. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления.— М.: Наука, 1984.
22. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1976.
23. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.— М.: ИЛ, 1956.
24. Рожко С. Б., Рубан А. И., Тимошин С. Н. Взаимодействие пространственного пограничного слоя с вытянутым препятствием // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1988.— № 1.
25. Боголепов В. В. Исследование режимов пространственного течения около искривленной поверхности // ПМТФ.— 1989.— № 1.

г. Москва

Поступила 11/III 1991 г.