ПМТФ, № 5, 1971

УДК 532.517.4

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ КАК ЗАДАЧА ОСОБЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Д. Н. Васильев

(Горький)

Рассматривается асимптотическая теория турбулентного пограничного слоя [1,2]. В данной статье делается попытка дальнейшего развития математического аспекта этой теории. Особенности теории продемонстрированы на задаче о близком к так называемому равновесному турбулентном пограничном слое с градиентом давления и вдувом.

Обозначения:

x, y — координаты, параллельные и перпендикулярные стенке;
u — составляющая скорость в направлении x;
p, ρ', ν — давление, плотность, кинематический коэффициент вязкости;
l' — масштаб турбулентности;
τ — касательное напряжение;
u_δ — скорость на внешней границе пограничного слоя;
δ — толщина пограничного слоя;
δ^* — толщина вытеснения;
δ^{**} — толщина потери импульса;
C_f — коэффициент трения;
R — число Рейнольдса.

Индексы 0 — стандартное течение, k — параметр в точке оттеснения (отрыва), * – параметр построен по толщине вытеснения, ** — параметр построен по толщине потери импульса, w — параметр на стенке.

1. Постановка задачи, исходные определения и зависимости. Введем, следуя [1], стандартный турбулентный пограничный слой, относящийся к плоской пластине в несжимаемой жидкости, и припишем ему нижний индекс 0. Для турбулентного касательного напряжения в общем случае примем

$$\tau = \rho l'^2 (du / dy)^2 \tag{1.1}$$

Вводя безразмерные координату η, скорость ω, плотность ρ и масштаб турбулентности l, получим

$$\frac{\tau}{\rho_\delta u_\delta^2} = \rho l^2 \left(\frac{d\omega}{d\eta}\right)^2 \qquad \left(\eta = \frac{y}{\delta}, \ \omega = \frac{u}{u_\delta}, \ \rho = \frac{\rho'}{\rho_\delta'}, \ l = \frac{l'}{\delta}\right) \tag{1.2}$$

Примем, что стандартный пограничный слой имеет на внешней границе те же параметры, что и исследуемый. Тогда из (1.1) следует

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\rho l^2 (d\omega / d\eta)^2}{\rho_0 l_0^2 (d\omega_0 / d\eta)^2} \tag{1.3}$$

При $\nu \to 0$ соотношение (1.3) распространяется на всю толщину пограничного слоя и после формального интегрирования принимает вид

$$1 = \int_0^1 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\tau_0}{\tau}\right)^{1/2} \frac{l}{l_0} \, d\omega \tag{1.4}$$

Соотношение (1.4) представляет собой с точностью до выполнения (1.1) интегральную формулировку предельного относительного закона трения в общем случае. Если принять $l \equiv l_0$, то из (1.4) получим

$$1 = \int_0^1 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{1/2} d\omega \tag{1.5}$$

Для случая течения на плоской пластине при $R \to \infty$ интеграл (1.5) получен и в более общем случае [1]. Показано, что требование автомодельности l по параметрам возмущения для всей толщины пограничного слоя в этом случае не является обязательным. Необходимо лишь существование условия $l \sim y$ в области $y_1 < y \ll \delta$. Выражение (1.4) имеет преимущество перед (1.5) в том смысле, что не предполагает консервативность масштаба турбулентности в общем случае по сравнению со стандартным течением и позволяет легко учесть эту неконсервативность, если известна лишь ее относительная количественная формулировка. Предельный относительный закон трения можно представить также и в ином виде. Из (1.3) аналогично (1.4) получаем

$$\int_0^1 d\omega = \int_0^1 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{1/2} \frac{l_0}{l} d\omega_0 \tag{1.6}$$

Вообще говоря, из (1.3) можно получить несколько интегральных формулировок предельного относительного закона в зависимости от того, в левую или правую часть соотношения (1.3) входит тот или иной сомножитель, описывающий относительное возмущение стандартного пограничного слоя. Можно также сформулировать предельный относительный закон в дифференциальном виде как краевую задачу

$$\frac{d\omega}{d\omega_0} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{1/2} \frac{l_0}{l}, \qquad \begin{array}{l} \omega = 0 \quad \text{при} \quad \omega_0 = 0 \\ \omega = 1 \quad \text{при} \quad \omega_0 = 1 \end{array} \tag{1.7}$$

Лишнее граничное условие дает искомую связь относительного закона трения с параметрами возмущения. Формальное интегрирование (1.7) дает тот или иной интегральный относительный закон.

Рассмотрим задачу о турбулентном пограничном слое в несжимаемой жидкости с положительным градиентом давления и вдувом. Для нахождения асимптотического относительного закона трения из выражений (1.4), (1.6) или (1.7) в этом случае необходимо знать связь относительного касательного напряжения и неконсервативности l с профилями скорости ω или ω_0 пограничного слоя и параметрами возмущения. В исследуемой задаче возмущениями являются вдув и продольный градиент давления. Так же как и в большинстве известных работ, примем в первом приближении, что $l / l_0 \equiv 1$.

Связь касательного напряжения с профилем скорости ω или ω_0 и параметрами возмущения находится из совместного рассмотрения уравнений неразрывности и движения в пограничном слое. Для пограничных слоев, близких к равновесным (в том смысле, что влияние производных от параметров возмущения по сравнению с влиянием самих параметров на течение в пограничном слое мало), из уравнений пограничного слоя в частных производных можно получить (см., например, [3]).

$$\frac{\tau}{\rho u_\delta^2} = \frac{C_{f_0}}{2} (\Psi z_1 + b z_2) + (-f) z_3$$

$$z_1 = 1 - \frac{\delta}{\delta^{**}}\left(\omega\int_0^\eta \omega\, d\eta - \int_0^\eta \omega^2\, d\eta\right)$$

$$z_2 = \omega - \frac{\delta}{\delta^{**}}\left(\omega\int_0^\eta \omega\, d\eta - \int_0^\eta \omega^2\, d\eta\right) \tag{1.8}$$

$$z_3 = \eta - H\left(\omega\int_0^\eta \omega\, d\eta - \int_0^\eta \omega^2\, d\eta\right) - \omega\int_0^\eta \omega\, d\eta$$

$$\Psi = \frac{C_f}{C_{f_0}}, \quad b = \frac{2\rho v_w}{\rho u_\delta C_{f_0}}, \quad f = \frac{\delta}{u_\delta}\frac{du_\delta}{dx}, \quad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$$

С учетом этих зависимостей соотношение τ / τ_0 можно записать в виде

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \Psi\varphi_1 + b\varphi_2 + \Lambda\varphi_3 \qquad \left(\varphi_1 = \frac{z_1}{z_{10}},\ \varphi_2 = \frac{z_2}{z_{10}},\ \varphi_3 = \frac{z_3}{z_{10}},\ \Lambda = \frac{-2f}{C_{f_0}}\right) \tag{1.9}$$

Для качественного анализа задачи распределение τ / τ_0 можно найти на основе полиномиальной аппроксимации. В этом случае [1]

$$\tau / \tau_0 = \Psi + (b\omega + \Lambda\eta)\, f(\eta) \tag{1.10}$$

При аппроксимации касательного напряжения полиномом второй или третьей степени выражение $f(\eta)$ соответственно принимает вид

$$f(\eta) = (1 + \eta)^{-1}, \quad \text{или} \quad f(\eta) = (1 + 2\eta)^{-1}$$

Для решения задачи необходима также аналитическая формулировка стандартного профиля скорости. Как теоретические решения, основанные на соображениях подобия и размерности, так и многочисленные экспериментальные данные, систематизированные в [4], показывают, что полностью турбулентную часть стандартного профиля можно представить в виде практически универсального закона дефекта скорости

$$\frac{1 - \omega_0}{\sqrt{{}^1\!/_2 C_{f_0}}} = D_0(\eta), \qquad D_0(\eta) = -\frac{1}{\varkappa}[\ln\eta + W(\eta)] \tag{1.11}$$

В работе [1] показано, что при $R \to \infty$ толщина вязкого подслоя $\eta_1 \to 0$ и

$$\sqrt{{}^1\!/_2 C_{f_0}} = -\varkappa(\ln\eta_1)^{-1} \to 0 \tag{1.12}$$

С учетом этого обстоятельства из (1.11) имеем, что

$$\omega = 1 \quad \text{при} \quad \eta > 0, \qquad \omega_0 = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0 \tag{1.13}$$

Таким образом, представление (1.11) при $R \to \infty$ будет корректным в смысле удовлетворения граничного условия на стенке. Количественные формулировки функции следа $W(\eta)$ весьма разнообразны и существенно зависят от того, как определена толщина пограничного слоя.

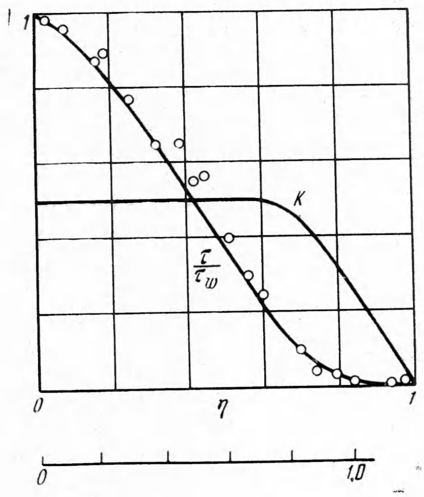
В данной работе за толщину турбулентного пограничного слоя в стандартных условиях принято то значение поперечной координаты, при котором принимает нулевое значение коэффициент корреляции турбулентных пульсаций скорости

$$K = \frac{\langle uv\rangle}{(\langle u^2\rangle\langle v^2\rangle)^{1/2}}$$

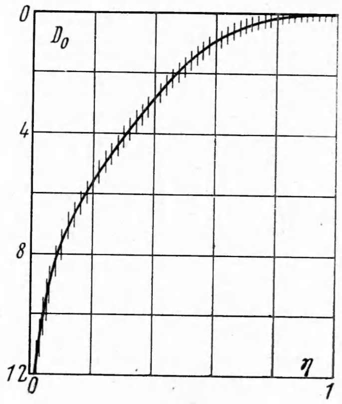
Эта координата соответствует также нулевому значению турбулентного касательного напряжения. Функция следа была аппроксимирована выражением

$$W = a_0 + a_1\eta + {}^1/_2 a_2\eta^2 + \int\limits_0^\eta \eta^{-a_3} \exp\left(\frac{-a_4}{\eta}\right) d\eta \qquad (1.14)$$

При этом для определения коэффициентов a_i было принято, что из условия плавного смыкания с внешним течением $D_0 \approx 0$ и $dD_0 / d\eta \approx 0$. Три оставшихся коэффициента определялись методом наименьших квадратов по экспериментальным данным [4] для D_0. При этом для удовлетворения условия равенства нулю коэффициента корреляции на внешней



Фиг. 1



Фиг. 2

границе пограничного слоя необходимо увеличить его толщину в 1.2 раза по сравнению с принятой в [4]. Последнее хорошо видно из фиг. 1, где приведены экспериментальные данные Клебанова (см., например, [3]) по распределению коэффициента корреляции и относительного касательного напряжения для одного из опытов, также вошедшего в серию, обработанную в [4].

Нижняя шкала оси абсцисс на этой фигуре соответствует толщине пограничного слоя, принятой в [4]. Определение толщины турбулентного пограничного слоя по коэффициенту корреляции более точно, так как эта функция подходит к нулевому значению достаточно круто, в то время как изменение скорости в районе $y \approx \delta$ весьма мало. Аппроксимация $D_0(\eta)$ по (1.14) вместе с экспериментальными данными представлена на фиг. 2. В дальнейшем было принято, что универсальность (1.11), обнаруженная в [4] для конечных чисел R, сохраняется и при $R \to \infty$. На фиг. 1 представлена также теоретическая зависимость для определения касательного напряжения, полученная из выражений (1.8) и (1.14) при $dp / dx = 0$ и $R \to \infty$.

Из совместного рассмотрения выражений (1.7), (1.9) и (1.11) следует, что задача об асимптотическом относительном законе трения и асимптотическом профиле скорости сводится в данном случае к решению интегродифференциального уравнения

$$\left(\frac{d\omega}{d\eta}\right)^2 = \left\{\frac{C_{f_0}}{2}[\Psi\varphi_1 + b\varphi_2] + (-f)\varphi_3\right\}\left(-\frac{dD_0}{d\eta}\right)^2 \tag{1.15}$$

с граничными условиями (1.7) и с той или иной формулировкой для функций φ_1, φ_2, φ_3, D_5.

2. Асимптотический относительный закон трения и асимптотический профиль скорости. Общее решение уравнения (1.15) даже в случае простейшего аппроксимационного представления (1.10) функций φ_1, φ_2, φ_3 неизвестно. При $R \to \infty$ коэффициент трения $C_{f_0} \to 0$, и если пренебречь членом с C_{f_0} то получим

$$\left(\frac{d\omega}{d\eta}\right)^2 = (-f)\varphi_3\left(\frac{dD_0}{d\eta}\right)^2 \tag{2.1}$$

Для этого уравнения граничное условие $\omega = 0$ при $\eta = 0$ в общем случае не может быть выполнено. Как указано в работе [5], в этих случаях можно подозревать наличие сингулярного характера решения, и классический метод пренебрежения членом с малым параметром или разложения в ряд по этому параметру не может быть применен для всей области решения. Для решения таких задач был предложен [5] метод сращиваемых асимптотических разложений. В соответствии с этим методом введем внутреннюю и внешнюю области решения и разложим это решение в ряд по параметру $\gamma_0 = \sqrt{{}^1/_2\, C_{f_0}}$. Рассмотрим внешнее решение (верхний индекс e) в виде

$$\omega = \omega^e = \sum \omega_n{}^e \gamma_0{}^n \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (1.15) и приравнивая члены с одинаковыми показателями степени при γ_0, получаем с точностью до γ_0.

$$\frac{d\omega_0{}^e}{d\eta} = \sqrt{(-f)\varphi_3}\left(-\frac{dD_0}{d\eta}\right), \qquad \omega_0{}^e = 1 \quad \text{при} \quad \eta = 1 \tag{2.3}$$

Здесь индекс e совместно с индексом 0 обозначает внешнее решение нулевого порядка по γ_0. Формальное интегрирование по η дает

$$\omega_0 = 1 - \sqrt{(-f)}\int_{\eta}^{1}\sqrt{\varphi_3}\left(-\frac{dD_0}{d\eta}\right)d\eta \tag{2.4}$$

Для внутреннего решения введем верхний индекс i и новую внутреннюю переменную, в качестве которой выберем безразмерную скорость в стандартных условиях

$$\omega_0 = 1 - \gamma_0 D_0 \tag{2.5}$$

Разлагая в ряд по γ_0, представим внутреннее решение в виде

$$\omega^i = \sum \omega_n{}^i(\omega_0)\gamma_0{}^n \tag{2.6}$$

Подставляя это соотношение в (1.15) и приравнивая члены с одинаковыми показателями при γ_0, получаем с точностью до γ_0

$$(d\omega_0{}^i / d\omega_0)^2 = \Psi\varphi_1 + b\varphi_2, \qquad \omega_0{}^i = 0 \text{ при } \omega_0 = 0 \tag{2.7}$$

Здесь индекс i совместно с индексом 0 обозначает внутреннее решение нулевого порядка по γ_0. При малых η (область внутреннего решения) из

(1.8) и (1.9), или из исходных уравнений пограничного слоя в частных производных, следует:

$$\varphi_1 \to 1, \qquad \varphi_2 \to \omega \qquad \text{при} \qquad \eta \to 0$$

С учетом этого обстоятельства из уравнения (2.7) получаем

$$(d\omega_0{}^i / d\omega_0)^2 = \Psi + b\omega_0{}^i, \qquad \omega_0{}^i = 0 \qquad \text{при} \qquad \omega_0 = 0 \tag{2.8}$$

Решение (2.8) имеет вид

$$\omega_0{}^i = \sqrt{\Psi}\,\omega_0 + {}^1/_4 b\omega_0{}^2 \tag{2.9}$$

Параметр Ψ является пока свободным и его связь с f и b устанавливается путем согласования внутреннего и внешнего решения. Для нахождения этой связи применим принцип предельного сращивания, который формулируется так [5]: внешний предел внутреннего разложения равен внутреннему пределу внешнего разложения.

Аналитическая формулировка этого принципа в рассматриваемом случае имеет вид

$$\omega_0{}^i(1) = \omega_0{}^e(0) \tag{2.10}$$

Подставляя (2.4) и (2.9) в (2.10), получаем

$$\sqrt{\Psi} + {}^1/_4 b = 1 - \sqrt{(-f)}\int_0^1 \sqrt{\varphi_3}\left(-\frac{dD_0}{d\eta}\right)d\eta \tag{2.11}$$

Это и есть предельный относительный закон трения при градиентном течении со вдувом. Для профиля скорости можно построить составное решение нулевого порядка по γ_0 во всей области решения. Для получения составного решения воспользуемся аддитивным методом [5]

$$\omega_0{}^+ = \begin{cases} \omega_0{}^e + \omega_0{}^i - \omega_0{}^e(0) \\ \omega_0{}^e + \omega_0{}^i - \omega_0{}^i(1) \end{cases} \tag{2.12}$$

Здесь индекс плюс совместно с индексом 0 обозначает составное решение нулевого порядка по γ_0. С учетом (2.4), (2.9) и (2.11) из (2.12) находим

$$\omega_0{}^+ = 1 - \sqrt{(-f)}\int_\eta^1 \sqrt{\varphi_3}\left(-\frac{dD_0}{d\eta}\right)d\eta + \sqrt{\Psi}\,\omega_0 + \frac{b}{4}\omega_0{}^2 - \sqrt{\Psi} - \frac{b}{4}$$

или

$$\omega_0{}^+ = \sqrt{(-f)}\int_0^\eta \sqrt{\varphi_3}\left(-\frac{dD_0}{d\eta}\right)d\eta + \sqrt{\Psi}\,\omega_0 + \frac{b}{4}\omega_0{}^2 \tag{2.13}$$

Исключая Ψ, при помощи (2.11) получим

$$\omega_0{}^+ = \sqrt{(-f)}\left[\int_0^\eta \sqrt{\varphi_3}\left(-\frac{dD_0}{d\eta}\right)d\eta - \omega_0\int_0^1 \sqrt{\varphi_3}\left(-\frac{dD_0}{d\eta}\right)d\eta\right] +$$
$$+ \omega_0\left(1 - \frac{b}{4}\right) + \frac{b}{4}\omega_0{}^2 \tag{2.14}$$

Из выражений (1.13), (2.13), отчетливо видно, что при $\gamma_0 \to 0$ решение состоит из двух частей: сингулярной

$$\sqrt{\Psi}\,\omega_0 + {}^1/_4 b\omega_0{}^2$$

целиком сосредоточенной в бесконечно малой окрестности η, и регулярной, имеющей место в интервале $0 < \eta \leqslant 1$. С учетом (1.13) при $R \to \infty$ решение (2.13) можно записать также в виде

$$\omega_0^+ = \left(\sqrt{\Psi} + \frac{b}{4}\right) + \sqrt{(-f)}\int_0^\eta \sqrt{\varphi_3}\left(-\frac{dD_0}{d\eta}\right)d\eta \quad \text{при} \quad \eta > 0 \tag{2.15}$$

$$\omega_0^+ = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0$$

Таким образом, применение принципа сращиваемых асимптотических разложений позволило ясно и просто выявить особый характер задачи о предельном течении ($R \to \infty$, $\gamma_0 \to 0$) в турбулентном пограничном слое с градиентом давления и вдувом.

Сопоставим решение (2.15) с некоторыми точными частными решениями уравнения (1.15).

Течение с градиентом давления при отсутствии вдува. Дифференциальное уравнение задачи в этом случае принимает вид

$$\frac{d\omega}{d\eta} = \sqrt{\gamma_0^2\Psi\varphi_1 + (-f)\varphi_3}\left(-\frac{dD_0}{d\eta}\right) \tag{2.16}$$

с граничными условиями (1.7)

Решение этого уравнения можно записать в виде

$$\omega = \lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \eta_2\to 0}}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{1}{\varkappa\eta}\sqrt{\gamma_0^2(\eta_1)\Psi + (-f)\eta}\,d\eta + \int_{\eta_2}^{\eta}\sqrt{\gamma_0^2(\eta_1)\Psi\varphi_1 + (-f)\varphi_3}\left(-\frac{dD_0}{d\eta}\right)d\eta \tag{2.17}$$

где $\eta_2 > \eta_1$ и учтено, что

$$\left(-\frac{dD_0}{d\eta}\right) \to \frac{1}{\varkappa\eta} \quad \text{при} \quad \eta \to 0$$

Весьма существенным здесь является тот факт, что параметр γ_0 связан с нижним пределом интегрирования в первом интеграле. Вычисляя первый интеграл, получаем

$$\omega = \lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \eta_2\to 0}}\frac{\gamma_0(\eta_1)\sqrt{\Psi}}{\varkappa}\ln\frac{(\Phi_2-\theta)(\Phi_1+\theta)}{(\Phi_2+\theta)(\Phi_1-\theta)} + \frac{2}{\varkappa}(\Phi_2-\Phi_1) +$$

$$+ \int_0^\eta \sqrt{(-f)\varphi_3}\left(-\frac{dD_0}{d\eta}\right)d\eta \qquad (\eta_2 > \eta_1) \tag{2.18}$$

$$\Phi_\nu = \sqrt{\gamma_0^2(\eta_1)\Psi + (-f)\eta_\nu} \quad (\nu = 1, 2), \qquad \theta = \sqrt{\gamma_0^2(\eta_1)\Psi}$$

Подставляя

$$\gamma_0^2(\eta_1) = \left(-\frac{\varkappa}{\ln\eta_1}\right)^2 \quad \text{при} \quad \eta_1 \to 0$$

в выражение (2.18) и вычисляя предел правой части, после преобразований получаем

$$\omega = \sqrt{\Psi} - \sqrt{(-f)}\int_0^\eta \sqrt{\varphi_3}\left(-\frac{dD_0}{d\eta}\right)d\eta \quad \text{при} \quad \eta > \eta_1 \to 0 \tag{2.19}$$

$$\omega = 0 \ \text{при} \ \eta = \eta_1 \to 0$$

Таким образом, получен тот же результат, что и методом сращиваемых асимптотических разложений при $b = 0$.

Течение со вдувом при отсутствии градиента давления. Уравнение (1.15) в этом случае принимает вид

$$\frac{d\omega}{d\eta} = \sqrt{\gamma_0^2(\Psi\varphi_1 + b\varphi_2)}\left(-\frac{dD_0}{d\eta}\right) \tag{2.20}$$

или после введения переменной ω_0

$$d\omega \,/\, d\omega_0 = \sqrt{\Psi\varphi_1 + b\varphi_2} \tag{2.21}$$

В пристенной области $\eta \to 0$, $\varphi_1 \to 1$, $\varphi_2 \to \omega$ и, следовательно,

$$d\omega \,/\, d\omega_0 = \sqrt{\Psi + b\omega} \tag{2.22}$$

Решение этого уравнения с граничными условиями (1.7) имеет вид [1]

$$\omega = \sqrt{\Psi}\,\omega_0 + {}^1\!/_4 b\omega_0^2 \tag{2.23}$$

Подставляя (2.23) в (1.8), находим, что если $\gamma_0 \to 0$, то $z_1 \to z_{10}$ при $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\varphi_2 \to 1$ при $\eta > 0$, $\varphi_2 \to \omega$ при $\eta \to 0$.

Следовательно, при $\gamma_0 \to 0$ и $f \equiv 0$ уравнение (2.21) переходит в (2.22) и вместе со своим решением (2.23) не зависит от η. Так же как и в предыдущем частном случае, решение (2.23) совпадает с решением (2.13), полученным по методу сращиваемых асимптотических разложений.

3. **Численные результаты.** Рассмотрим сначала случай, когда функция φ_3 автомодельна по параметрам возмущения, например, выбрана по (1.10). Из (2.11) в этом случае следует:

$$\sqrt{\Psi} = (1 - {}^1\!/_4 b)(1 - \sqrt{F}), \qquad F = f \,/\, f_k \tag{3.1}$$

Параметр f_k также находится из (2.11) при условии $\Psi = 0$

$$\sqrt{(-f_k)} = \left(1 - \frac{b}{4}\right)\left[\int_0^1 \sqrt{\varphi_3}\left(-\frac{dD_0}{d\eta}\right)d\eta\right]^{-1} \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) видно, что предельный относительный закон трения в форме (3.1) не зависит от конкретной количественной формулировки φ_3. Конкретный вид этой функции определяет лишь параметр f_k при заданном b или параметр b_k при заданном f. Из соотношений (1.8) видно, что функции φ_1, φ_2, φ_3 неявным образом зависят от параметров возмущения, и любой метод, основанный на их автомодельности по возмущениям, не даст правильных количественных результатов. Выделим из (2.15) особую часть решения, что сводится к изменению граничного условия для скорости на стенке. В этом случае уравнения (2.15) и (1.8), (1.9) образуют систему

$$\frac{d\omega}{d\eta} = \sqrt{-f}\,\sqrt{\varphi_3}\left(-\frac{dD_0}{d\eta}\right), \quad \frac{dJ_1}{d\eta} = \omega, \quad \frac{dJ_2}{d\eta} = \omega^2 \tag{3.3}$$

где

$$\varphi_3 = \frac{\eta - H(J_1\omega - J_2) - \omega J_1}{1 - [D_0\eta - J_3(\eta)]\,[J_3(1)]^{-1}}, \quad J_1 = \int_0^\eta \omega\, d\eta, \quad J_2 = \int_0^\eta \omega^2\, d\eta, \quad J_3 = \int_0^\eta D_0\, d\eta$$

Граничные условия принимают вид

$$\begin{gathered}\omega = \sqrt{\Psi} + {}^1\!/_4 b, \ J_1 = 0, \ J_2 = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \\ \omega = 1, \ \ J_1 = 1 - \delta^* / \delta, \ \ J_2 = 1 - \delta^* / \delta - \delta^{**} / \delta \quad \text{при } \eta = 1\end{gathered} \tag{3.4}$$

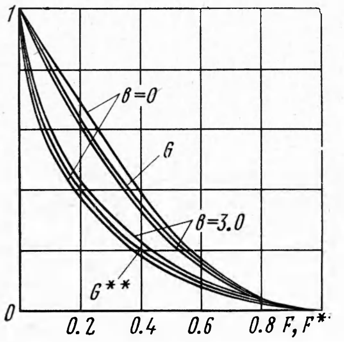
Граничные условия при $\eta = 1$ позволяют найти зависимости Ψ, δ^* / δ, δ^{**} / δ и H от f и b.

Система (3.3) с граничными условиями (3.4) решалась на ЭЦВМ.

На фиг. 3 представлен предельный относительный закон трения в виде зависимости

$$G(F, b) = \frac{\Psi}{(1 - {}^1/_4 b)^2} \tag{3.5}$$

Связь параметров b и f в точке оттеснения (отрыва) пограничного слоя $\Psi = 0$ представлена на фиг. 4. При расчетах турбулентного пограничного слоя более удобным является параметр градиентности, построенный по толщине потери импульса



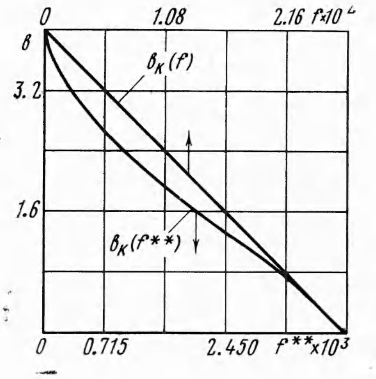
Фиг. 3

$$f^{**} = \frac{\delta^{**}}{u_\delta} \frac{du_\delta}{dx}$$

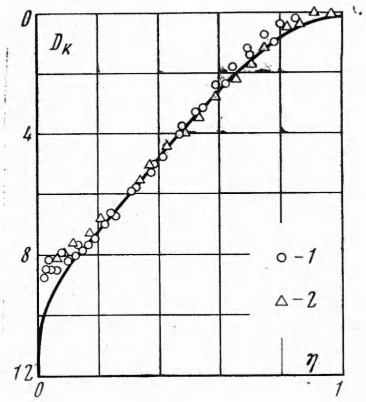
Поэтому на фиг. 3 представлен также предельный относительный закон трения в виде

$$G^{**}(F, b) = \frac{\Psi^{**}}{(1 - {}^1/_4 b)^2}, \quad F^{**} = \frac{f^{**}}{f_k^{**}} \tag{3.6}$$

Связь параметров b и f^{**} в точке оттеснения пограничного слоя ($\Psi^{**} = 0$) представ-



Фиг. 4



Фиг. 5

лена на фиг. 4. Видно, что зависимости (3.5) и (3.6) слабо расслаиваются по параметру b и удовлетворительно аппроксимируются выражениями

$$G = (1 - F)^2, \quad G^{**} = 1 - \sqrt{F^{**}(2 - F^{**})} \tag{3.7}$$

При отсутствии градиента давления ($f = 0$) полученные в данной работе результаты тождественны теоретическим результатам работы [1], где проведено достаточно подробное сопоставление теории с экспериментом. В работе [6] на основе тщательного анализа большого количества современных экспериментальных данных по отрыву турбулентного пограничного слоя установлено, что $2.2 < H_k < 2.8$ и значения $H_k > 2.4$ обусловлены, вероятно, вторичными течениями или искажениями, вносимыми зондами, в пристеночной области. Полученное в данной работе теоретическое значение $H_k = 2.3$. На фиг. 5 предельный расчетный профиль скорости

$D_k = (1 - \omega) / \sqrt{(-f^*)}$ при $\Psi = 0$ сопоставляется с известными экспериментальными профилями Стрэтфорда, полученными [7] при $\Psi \approx 0$. (0 — сечение *1*, Δ — сечение *2*). Экспериментальные значения параметров градиентности составляли при этом $0.0065 < f_k^* < 0.01$, $H_k \approx 2.29$.

Теоретическое значение $f_k^* = f^{**}H_k = 0.00821$, а также теоретический профиль скорости удовлетворительно совпадают с экспериментальными.

Автор благодарит С. С. Кутателадзе, А. И. Леонтьева и Г. В. Ароновича за внимание к работе.

Поступила 11 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
2. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. Новосибирск. Изд-во СО АН СССР, 1964.
3. Ротта И. К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. Л., «Судостроение», 1967.
4. Клаузер Ф. Турбулентный пограничный слой. Сб. «Проблемы механики», вып. 2, М., Изд-во иностр. лит., 1959.
5. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1 967.
6. Ferbholz H. H. Experimentelle Untersuchung einer inkompressiblen turbu lenten Grenzschicht mit Wandreibung nahe Null an einem längsangeströmten Kreiszylinder. Z. Flugwiss., 1968, Irg. 16, H. 11.
7. Stratford B. An experimental flow with zero skin friction thronghout its region of pressure rise. J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, pt 1.