

ОБ АВТОМОДЕЛЬНОСТИ ДВИЖЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Э. В. Прозорова

(Ленинград)

В работе показано, что задачи о развитии пограничного слоя на полубесконечной пластине при скорости внешнего потока $U=(1+ct)^b a$ и на цилиндре при скоростях $U=ct^\alpha x^m$ и $U=(1+ct)^b a x^m$ автомодельны. Приведены результаты численных расчетов при различных α , b , m . Рассмотрена задача о ступенчатом нестационарном нагреве пластины, импульсивно приведенной в движение в несжимаемой жидкости, показана ее автомодельность, приведены результаты численного решения.

Задача о движении полубесконечной пластины со скоростью $U=(1+ct)^b a$. Система дифференциальных уравнений ламинарного нестационарного пограничного слоя и граничных условий для данного случая имеет вид:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= acb(1+ct)^{b-1} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ u=U, v=0 &\text{ при } y=0, t=0; \\ u=0, v=0, y=0, t > 0, x > 0; \\ u=U, y=\infty, t > 0, x > 0. \end{aligned}$$

Выберем в качестве новых независимых переменных и функций следующие:

$$\xi = \frac{x}{(1+ct)^{1+b}}; \quad \eta = \frac{y}{(1+ct)^{1/2}}; \quad u = \Phi(1+ct)^b; \quad v = \frac{V}{(1+ct)^{1/2}}.$$

После замены задача записывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} &= 0; \\ b c \Phi - \frac{1}{2} c \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - c(1+t) \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + V \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= acb + v \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}; \\ \Phi(\eta, \xi) &= 0, V=0 \text{ при } \eta=0; \\ \Phi(\eta, \xi) &= 1 \text{ при } \eta=\infty. \end{aligned}$$

Задача об ускорении цилиндра ($U=ct^\alpha x^m$). Система уравнений [1] пограничного слоя имеет вид

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \alpha c x^m t^{\alpha-1} + c^2 t^{2\alpha} m x^{2m-1} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Граничные условия аналогичны условиям задачи (1). Вводятся новые переменные

$$\xi = x \left(t^{1-m} \right)^{-1}, \quad \eta = \frac{y}{t^{1/2}};$$

$$\Phi = u/cx^m t^{-\alpha}, \quad V = v/cx^{m-1} t^{-(\alpha+1/2)}.$$

В новых переменных уравнения (2) переписываются в виде:

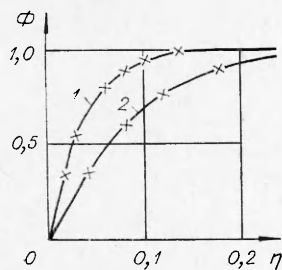
$$\begin{aligned} \alpha\Phi + \frac{(\alpha+1)}{m-1} \xi \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - \frac{1}{2} \eta \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + \Phi \left[cm\xi^{m-1} \Phi + c\xi^m \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \right] + \\ + c\xi^{m-1} V \frac{\partial V}{\partial\eta} = \alpha + cm\xi^{m-1} + v \frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}; \\ m\Phi + \xi \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \frac{\partial V}{\partial\eta} = 0, \end{aligned}$$

а граничные условия имеют такой же вид, как в задаче (1).

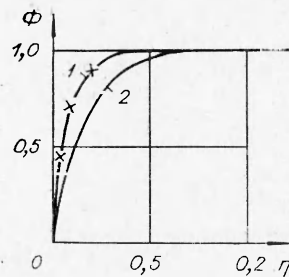
Для численного решения задачи используется неявная численная схема [2]

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_i^{j+1} - \Phi_i^j}{\Delta\xi} = \frac{1}{\left(\Phi_i^{j+1} c\xi_i^m + \frac{\alpha+1}{m-1} \xi_i \right)} \left[\frac{\Phi_{i+1}^{j+1} - 2\Phi_i^{j+1} + \Phi_{i-1}^{j+1}}{\Delta\eta^2} - \right. \\ \left. - \left(c\xi_i^{m-1} V_i^{j+1} - \frac{1}{2} \eta_i \right) \frac{\Phi_{i+1}^{j+1} - \Phi_{i-1}^{j+1}}{\Delta\eta} + cm\xi_i^{m-1} (1 - \Phi_i^{j+1})^2 + \right. \\ \left. + \alpha (1 - \Phi_i^{j+1}) \right]. \end{aligned}$$

Для расчета поля течения вдоль продольной координаты η в каждой i -й точке ξ_i используется метод прогонки. На фиг. 1, 2 приведена касательная составляющая скорости в расчетных координатах ξ , η при $c=500$



Фиг. 1



Фиг. 2

(на обеих фигурах кривая 1 соответствует значению $\xi=0,5$; кривая 2 — значению $\xi=11$). На фиг. 1 приведен случай $\alpha=0,5$ при $m=0,5$; на фиг. 2 $\alpha=0,5$ при $m=1,5$. Звездочками обозначены точки при $\alpha=1,5$, $m=0,5$ (фиг. 1) и $\alpha=1,5$, $m=1,5$ (фиг. 2). Из записи разностной схемы и графиков видно, что показатель степени α слабо влияет на безразмерный профиль скорости, в то время как m совершенно изменяет вид зависимости от координаты.

Задача о движении цилиндра со скоростью $U=(1+ct)^b ax^m$. После введения переменных

$$\xi = \frac{x}{(1+ct)^{\frac{1+b}{1-m}}}; \quad \eta = \frac{y}{(1+ct)^{1/2}}; \quad \Phi = \frac{u}{ax^m} (1+ct)^{-b};$$

$$V = \frac{v}{cx^{m-1}} (1+ct)^{-\left(\frac{1}{2}+b\right)}$$

задача записывается в виде:

$$bc\Phi - \frac{1}{2} c\eta \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} - \frac{1+b}{1-m} c\xi \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \Phi \left[a\xi^m \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + ma\xi^{m-1} \Phi \right] +$$

$$+ a\xi^{m-1} V \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = bc + am\xi^{m-1} + v \frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}; \quad m\Phi + \xi \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \frac{\partial V}{\partial\eta} = 0;$$

$$\Phi(\eta, \xi) = 0, \quad V = 0 \quad \text{при } \eta = 0;$$

$$\Phi(\eta, \xi) = 1 \quad \text{при } \eta = \infty.$$

Поскольку в первоначальные уравнения входит только производная по t , автомодельность, если она есть для функций $U=f(t)\varphi(x)$, будет и для функции $U=f(1+ct)\varphi(x)$.

Численное решение получено по схеме, близкой к схеме предыдущей задачи. Анализ результатов говорит о слабом влиянии способа ускорения (b) и сильной зависимости профиля безразмерной скорости от формы тела (m).

Задача о ступенчатом нестационарном нагреве плоской пластины, импульсивно приведенной в движение [1]

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

где σ — число Прандтля,

$$\begin{aligned} u=v=0, \quad T=T_e & \quad \text{при } t=0; \\ u=v=0 & \quad \text{при } t>0, \quad y=0; \\ u=U_\infty & \quad \text{при } t>0, \quad x>0, \quad y=\infty; \\ T=T_w & \quad \text{при } t>0, \quad y=0, \quad x>0; \\ T=T_e & \quad \text{при } t>0, \quad y=\infty. \end{aligned}$$

После замены переменных

$$u = \Phi(\xi, \eta); \quad v = \frac{V}{t^{1/2}}; \quad \xi = \frac{x}{t}; \quad \eta = \frac{y}{t^{1/2}}; \quad \theta = \frac{T - T_w}{T_e - T_w}$$

задача (3) записывается в виде:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \frac{\partial V}{\partial\eta} = 0;$$

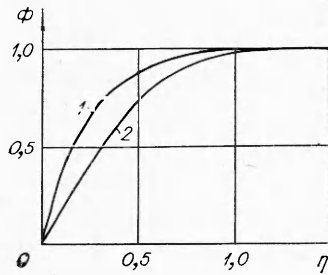
$$-\xi \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - \frac{1}{2} \eta \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + V \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = \nu \frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2};$$

$$-\xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{i}{2} \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \Phi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - V \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2};$$

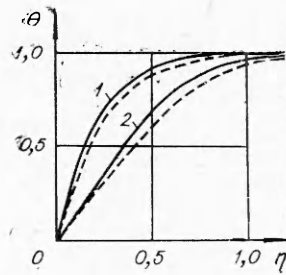
$$\Phi = V = 0, \quad \theta = 0, \quad \eta = 0;$$

$$\Phi = U, \quad \theta = 1, \quad \eta = \infty.$$

Кинематические и температурные профили для $\bar{U}_\infty = 500$ см/с приведены на фиг. 3, 4 для $\sigma = 0,7$ (сплошная линия) и для $\sigma = 0,4$ (штриховая линия); кривая 1 соответствует значению $\xi = 0,25$; кривая 2 — значению $\xi =$

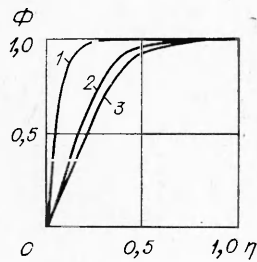


Фиг. 3

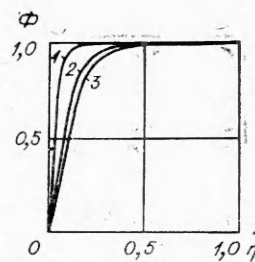


Фиг. 4

$= 17,75$. Тем же методом рассматривался тепловой слой при продольном перепаде давления (импульсивное движение Фокнера—Скэн) для малых чисел Маха. Результаты расчетов приведены на фиг. 5, 6 для $m = 0,5$, $\sigma = 0,7$, где кривая 1 соответствует значению $\xi = 0,25$; кривая 2 — значению $\xi = 17,75$; кривая 3 — значению $\xi = 37$.



Фиг. 5



Фиг. 6

Для задачи Фокнера — Скэн безразмерные тепловые и кинематические профили отличаются сильнее.

Использование указанных автомодельных переменных позволяет провести численный расчет вплоть до выхода на стационарный режим за время порядка 20 ÷ 30 мин на машине типа БЭСМ-3М. В рамках теории пограничного слоя можно также показать, что задача об импульсивном движении пластины в сжимаемом газе и задача о формировании пограничного слоя за проходящей ударной волной на тонкой полубесконечной пластине автомодельны.

Поступила 31 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962, с. 255.
2. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971, с. 41.