

УДК 532.53

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАТОПЛЕННОГО ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СКАЧКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Й. Шекари, М. Джаван*, А. Еджбалзадех*

Университет Рази, Керманшах, Иран

* Исследовательский центр воды и сточных вод Университета Рази, Керманшах, Иран
E-mails: yones.shekari@yahoo.com, javanmi@gmail.com, eghbalzadeh@gmail.com

Проведено численное моделирование трехмерных затопленных гидравлических скачков. При моделировании формы свободной поверхности использовался метод объема жидкости. Турбулентная структура течения моделировалась с помощью следующих моделей турбулентности: стандартная $k-\varepsilon$, ренорм-групповая (RNG) $k-\varepsilon$, реализуемая $k-\varepsilon$, а также с помощью схем замыкания модели напряжения Рейнольдса (RSM). Исследованы модели турбулентности, в которых используются стандартные пристенные функции и методы расширенного описания пристенного течения. Проведено сравнение расчетных и экспериментальных данных. Показано, что численная модель достаточно точно описывает структуру течения и форму свободной поверхности затопленных гидравлических скачков. Установлено, что расчеты по RNG ($k-\varepsilon$)-модели турбулентности с использованием метода расширенного описания пристенного течения являются наиболее точными при моделировании формы поверхности воды. Результаты расчета по модели RSM с использованием метода расширенного описания пристенного течения лучше согласуются с экспериментальными данными о продольной скорости в полностью развитой области течения вблизи дна канала, чем результаты расчетов по другим моделям турбулентности. Результаты расчетов продольной скорости с использованием стандартной ($k-\varepsilon$)-модели также являются более точными, чем результаты расчетов по модели RNG и реализуемой ($k-\varepsilon$)-модели.

Ключевые слова: трехмерное численное моделирование, затопленный гидравлический скачок, модель турбулентности, метод расширенного описания пристенного течения.

Введение. Процесс перехода от режима сверхкритического течения к режиму докритического течения с сильным турбулентным перемешиванием и захватом воздушных пузырьков называется гидравлическим скачком. В открытом канале при наличии гидравлического скачка глубина потока, зависящая от скорости, быстро меняется на относительно малом расстоянии. В затопленных гидравлических скачках область перехода течения расположена под поверхностью воды. Свободные и затопленные гидравлические скачки, имеющие широкое техническое применение, изучались и численно, и экспериментально.

Классические гидравлические скачки в горизонтальном широком прямоугольном канале с гладким дном исследовались в работах [1–5]. В работе [6] показано, что при определенных условиях диссипация энергии в затопленном скачке может быть меньше, чем в свободном скачке. В [7] установлено, что и в затопленных, и в свободных скачках профили скорости ниже прогиба подобны профилям скорости турбулентной пристенной струи при неблагоприятном градиенте давления. Сравнение свободных, затопленных скачков и

структуры пристенной струи показало, что затопленные скачки можно рассматривать как переходную структуру между пристенными струями и свободными скачками [8]. Из результатов экспериментов [9] следует, что затопленный скачок является трехмерным. При изучении затопленных гидравлических скачков, возникающих при резком расширении канала, установлено, что в определенных гидравлических условиях могут быть сформированы и симметричные, и асимметричные течения. Получены соотношения для определения главных характеристик затопленного скачка, возникающего при резком расширении канала [10]. Структура турбулентного течения в затопленном гидравлическом скачке в прямоугольном канале с горизонтальным шероховатым дном экспериментально исследована в [11].

В последнее время разработаны численные методы, позволяющие проводить анализ сложных гидродинамических задач. Например, созданы двумерные модели, в которых используется стандартная $(k-\varepsilon)$ -модель турбулентности. Эти модели описывают течение в затопленных гидравлических скачках ниже шлюзовых ворот [12]. В работе [13] с использованием уравнения Буссинеска численно моделировались сверхкритическое и докритическое течения и свободный гидравлический скачок в прямоугольном канале при малом угле наклона дна. В [14] в предположении о негидростатичности давления численно исследован свободный гидравлический скачок. В [15] развиты двумерные модели, описывающие затопленный гидравлический скачок с использованием стандартной $(k-\varepsilon)$ -модели турбулентности и метода объема жидкости [16]. Показано, что пристенные функции не всегда применимы в области течения пограничного слоя в затопленном гидравлическом скачке. Численное моделирование свободного гидравлического скачка с помощью ренорм-групповой (RNG) $(k-\varepsilon)$ -модели турбулентности и метода объема жидкости выполнено в [17]. В [18] с использованием $(k-\varepsilon)$ -модели турбулентности проведено численное исследование свободного гидравлического скачка. Свободный гидравлический скачок на гладкой подложке изучен также в [19] с помощью $(k-\varepsilon)$ -модели турбулентности и метода крупных вихрей.

В данной работе проводится исследование влияния различных моделей турбулентности, таких как модель напряжений Рейнольдса (RSM), стандартная $(k-\varepsilon)$ -, RNG $(k-\varepsilon)$ - и реализуемая $(k-\varepsilon)$ -модели, на структуру течения в затопленном гидравлическом скачке. Изучаются характеристики моделей турбулентности, в которых используются стандартные пристенные функции [20] и метод расширенного описания пристенного течения [21–24].

1. Управляющие уравнения. Поле течения вычисляется по уравнению неразрывности и нестационарным уравнениям Навье — Стокса, осредненным по Рейнольдсу:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial(-\overline{\rho u'_i u'_j})}{\partial x_j}.$$

Здесь u_i, u_j ($i, j = 1, 2, 3$), $p, \rho, \mu, \overline{\rho u'_i u'_j}$ — компоненты средней скорости в декартовых координатах, давление, плотность, динамическая вязкость и напряжения Рейнольдса соответственно. Турбулентные течения могут быть описаны с помощью различных моделей турбулентности. При решении управляющих уравнений и моделировании трехмерного затопленного гидравлического скачка использовалось коммерческое программное обеспечение. При решении уравнений импульса и турбулентности применялись схема QUICK и схема первого порядка против потока соответственно. С помощью схемы PRESTO и алгоритма PISO был дискретизирован градиент давления и установлена связь между давлением и скоростью. При решении нестационарных уравнений течения временной шаг полагался

Таблица 1

Основные параметры экспериментов, использованные при численном моделировании

Номер эксперимента	Y_1 , м	U_1 , м/с	Y_2 , м	Y_t , м	Fr_1	S
3	0,025	1,58	0,10	0,187	3,19	0,85
6	0,025	2,72	0,18	0,299	5,49	0,63
8	0,015	3,14	0,17	0,206	8,19	0,24

Таблица 2

Размеры расчетных сеток

Способ описания пристенного течения	Расчетная сетка	
	Эксперименты 3, 6	Эксперимент 8
Стандартные пристенные функции	$281 \times 38 \times 15$	$281 \times 35 \times 15$
Расширенное описание пристенного течения	$281 \times 45 \times 33$	$281 \times 41 \times 33$

равным 0,01 с. Управляющие уравнения решались до тех пор, пока их нормализованные остаточные члены не становились меньше 10^{-4} .

2. Расчетная область. Для проверки численной модели использовались результаты трех экспериментов, описанных в [9]. Эксперименты [9] проводились в прямоугольном канале шириной $Z = 0,467$ м, длиной 7,5 м и глубиной 0,515 м. В табл. 1 приведены значения основных параметров экспериментов, использованных при численном моделировании (Y_2 , Y_t , Y_1 , U_1 — глубина свободного скачка, глубина потока воды вниз по течению, величина зазора при раскрытии задвижки на входе и средняя скорость потока на входе соответственно). Коэффициент погружения S и число Фруда на входе Fr_1 определены с помощью соотношений $S = (Y_t - Y_2)/Y_2$, $Fr_1 = U_1/\sqrt{gY_1}$.

3. Дискретизация расчетной области. В силу аксиальной симметрии поля течения, полученного в эксперименте, для уменьшения времени расчета рассматривалась половина ширины канала. Вследствие быстрого изменения поля течения и формы свободной поверхности в окрестности прогиба вблизи затвора неравномерная сетка была достаточно мелкой. При исследовании влияния стенки на структуру течения применялись стандартные пристенные функции и метод расширенного описания пристенного течения. При использовании стандартных пристенных функций первый узел должен быть расположен в области $y^+ > 30$ (y^+ — безразмерное расстояние от стенки). Для учета влияния вязкости на поток в пристенной области при использовании метода расширенного описания пристенного течения в вязком подслое выбиралась наиболее мелкая сетка, причем первый узел сетки был расположен в области $y^+ \approx 1$. В табл. 2 приведены размеры расчетных сеток.

4. Граничные условия. Граничные условия соответствовали условиям в экспериментальной установке. На входе задавалось вертикальное распределение продольной скорости u , измеренной в [9]: $u/U_1 = 0,99 + 0,02y/Y_1$. Максимальное уменьшение продольной скорости при открытии затвора составляло от 2 до 6 %.

Кинетическая энергия турбулентности k и скорость диссипации ε на границе отверстия затвора определяются по формулам [9]

$$k = 1,4 \cdot 10^{-3} U_1^2, \quad \varepsilon = 2,2 \cdot 10^{-5} U_1^3 / Y_1.$$

Результаты численного моделирования течения с использованием моделей турбулентности для осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стокса (таких, как модели $k-\varepsilon$) зависят от метода описания пристенного течения [25–27]. Поэтому для моделирования бо-

ковой стенки и дна применялись различные методы описания пристенного течения, такие как стандартные пристенные функции и расширенное описание пристенного течения.

Чтобы осуществить переход от области вязкого подслоя к области развитого турбулентного течения, были использованы пристенные функции. Поскольку вязкий подслой и область буферного слоя не моделировались точно, очень мелкая сетка не применялась [20]. В то же время пристенная область моделировалась с большой точностью методом расширенного описания пристенного течения, в котором должна использоваться очень мелкая пристенная сетка. Таким образом, метод расширенного описания пристенного течения является более предпочтительным при описании сложных пристенных течений [21–23, 25]. Граничные условия для давления ставились на выходе из канала и в плоскости его симметрии. На выходе также задавалась глубина потока, равная измеренной глубине нижнего бьефа.

5. Результаты исследования и их обсуждение. Область течения в затопленных гидравлических скачках может быть разделена на области развития, полностью развитые области и области восстановления [12]. Если длина прогиба определена как протяженность затопленного скачка, то область развития и полностью развитая область занимают 15 и 85 % длины скачка соответственно. В области восстановления влияние области прогиба отсутствует [9]. Проведено сравнение результатов выполненных численных расчетов с результатами эксперимента [9]. При этом вычислялась относительная среднеквадратичная погрешность Δ :

$$\Delta = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (e_{i,e} - e_{i,c})^2 \right)^{1/2} \cdot 100.$$

Здесь N — число точек, в которых проводились измерения; $e_{i,e}$, $e_{i,c}$ — экспериментальные и расчетные значения параметра в точке i соответственно.

На рис. 1, 2 приведены расчетные и экспериментальные формы поверхности воды и профили продольной скорости. Способ описания пристенного течения и выбранная турбулентная модель оказывают влияние на расчетную форму поверхности воды. Из табл. 3 следует, что наиболее точно форма поверхности воды определяется с использованием метода расширенного описания пристенного течения и RNG ($k-\varepsilon$)-модели турбулентности, следующей по точности является модель RSM, в которой используются стандартные пристенные функции.

В области пристенной струи результаты численных расчетов и экспериментальные данные хорошо согласуются (см. рис. 2). Однако скорость возвратного течения, моделируемая с использованием всех способов описания пристенного течения и моделей турбулентности, незначительно превышала полученную в эксперименте. Среднеквадратичная погрешность определения продольной скорости в области развития, полностью развитой области и области восстановления вычислялась в точках, находящихся на относительных расстояниях от затвора $X/Y_1 = 12, 36, 105$. Согласно данным [9] все профили скорости расположены в плоскости, находящейся на расстоянии от стенки канала $z/W = 0,36$ мм или $z/W = 168$ мм. Из табл. 4 следует, что при использовании модели турбулентности RSM со стандартными пристенными функциями продольная скорость в области развития вычисляется более точно, чем при использовании других моделей. В полностью развитой области значения продольной скорости, вычисленные по модели турбулентности RSM, в которой используется расширенное описание пристенного течения, лучше согласуются с экспериментальными значениями. В области пристенной струи на течение оказывают влияние характеристики пограничного слоя [15]. Значения скорости, вычисляемые с помощью метода расширенного описания пристенного течения и различных моделей турбулентности, лучше согласуются с результатами эксперимента, чем соответствующие значения, полученные с использованием стандартной пристенной функции (см. табл. 4).

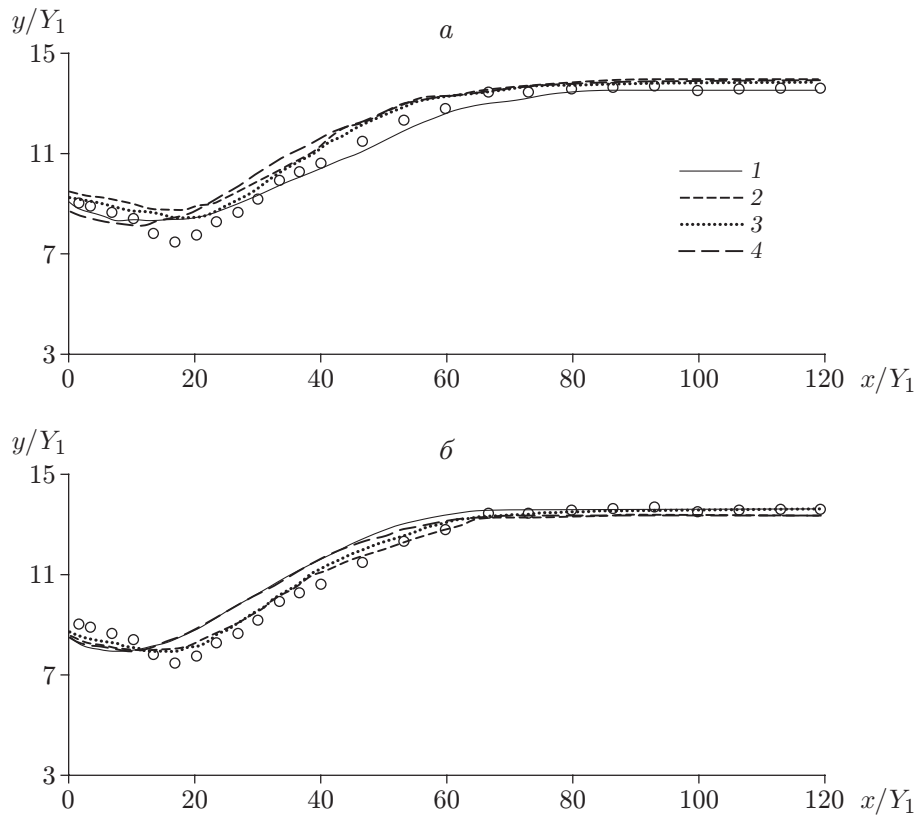


Рис. 1. Расчетная (линии) и экспериментальная (точки) формы поверхности воды: *a* — расчеты с использованием стандартных пристенных функций, *б* — расчеты с использованием расширенного описания пристенного течения; 1 — модель RSM, 2 — стандартная ($k-\varepsilon$)-модель, 3 — RNG ($k-\varepsilon$)-модель, 4 — реализуемая ($k-\varepsilon$)-модель; точки — экспериментальные данные [9] (эксперимент 8)

В области восстановления скорость распределена по глубине канала практически равномерно, при этом расчетные и экспериментальные значения хорошо согласуются. Результаты расчетов по модели RSM с использованием обоих методов описания пристенного течения являются более точными по сравнению с результатами расчетов по другим моделям турбулентности (см. рис. 2 и табл. 4). Результаты моделирования профилей продольной скорости с помощью стандартной модели и RNG ($k-\varepsilon$)-модели, в которой используется расширенное описание пристенного течения, были близки. Сравнение измеренных в экспериментах 3, 6, 8 и рассчитанных максимальных значений средней скорости показало, что результаты расчетов по модели RSM и стандартной ($k-\varepsilon$)-модели хорошо согласуются с экспериментальными данными. При увеличении числа Фруда результаты расчетов по модели RSM лучше согласуются с данными эксперимента, чем результаты расчетов по стандартной ($k-\varepsilon$)-модели.

На рис. 3, *a* приведены экспериментальные значения интенсивности продольной турбулентности $\sqrt{u'^2}$, а также значения $\sqrt{u'^2}$, вычисленные по стандартной ($k-\varepsilon$)-модели и модели турбулентности RSM. Видно, что с увеличением расстояния от затвора интенсивность продольной турбулентности быстро уменьшается. В области пристенной струи вблизи дна канала результаты расчета по модели RSM лучше согласуются с результатами эксперимента, чем результаты расчета по стандартной ($k-\varepsilon$)-модели. Соответствующие значения, полученные с использованием других моделей турбулентности, в области

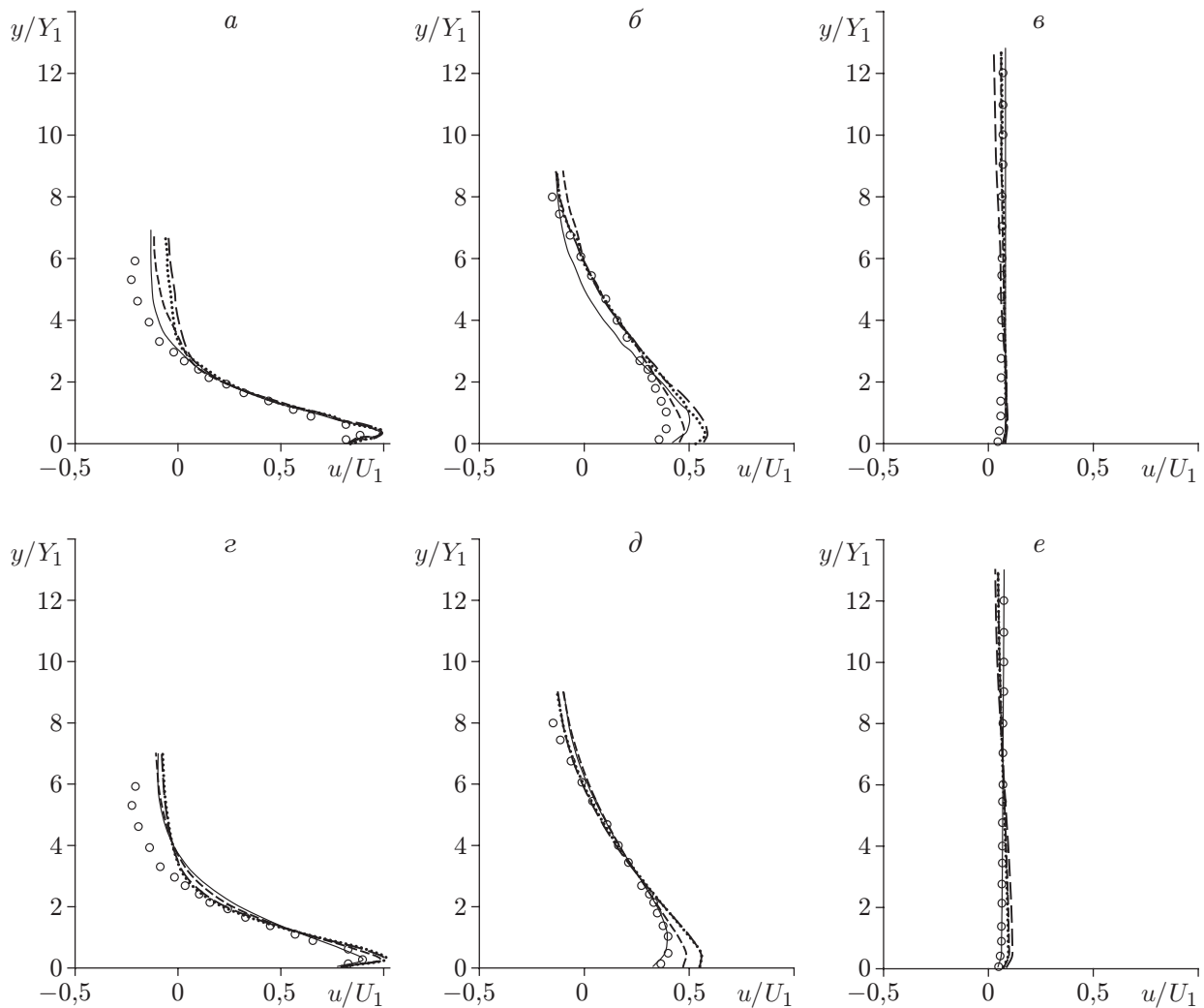


Рис. 2. Расчетные (линии) и экспериментальные (точки) профили продольной скорости:

a-f — расчеты с использованием стандартных пристенных функций, *z-e* — расчеты с использованием расширенного описания пристенного течения; *a, z* — $x/Y_1 = 12$, *б, д* — $x/Y_1 = 36$, *в, е* — $x/Y_1 = 105$; остальные обозначения те же, что на рис. 1

Таблица 3

Относительная среднеквадратичная погрешность при моделировании формы поверхности воды

Способ описания пристенного течения	Модель турбулентности	Δ , %
Стандартные пристенные функции	RSM	0,50
	RNG $k-\epsilon$	0,63
	Реализуемая $k-\epsilon$	0,93
	Стандартная $k-\epsilon$	0,90
Расширенное описание пристенного течения	RSM	0,99
	RNG $k-\epsilon$	0,47
	Реализуемая $k-\epsilon$	0,54
	Стандартная $k-\epsilon$	0,99

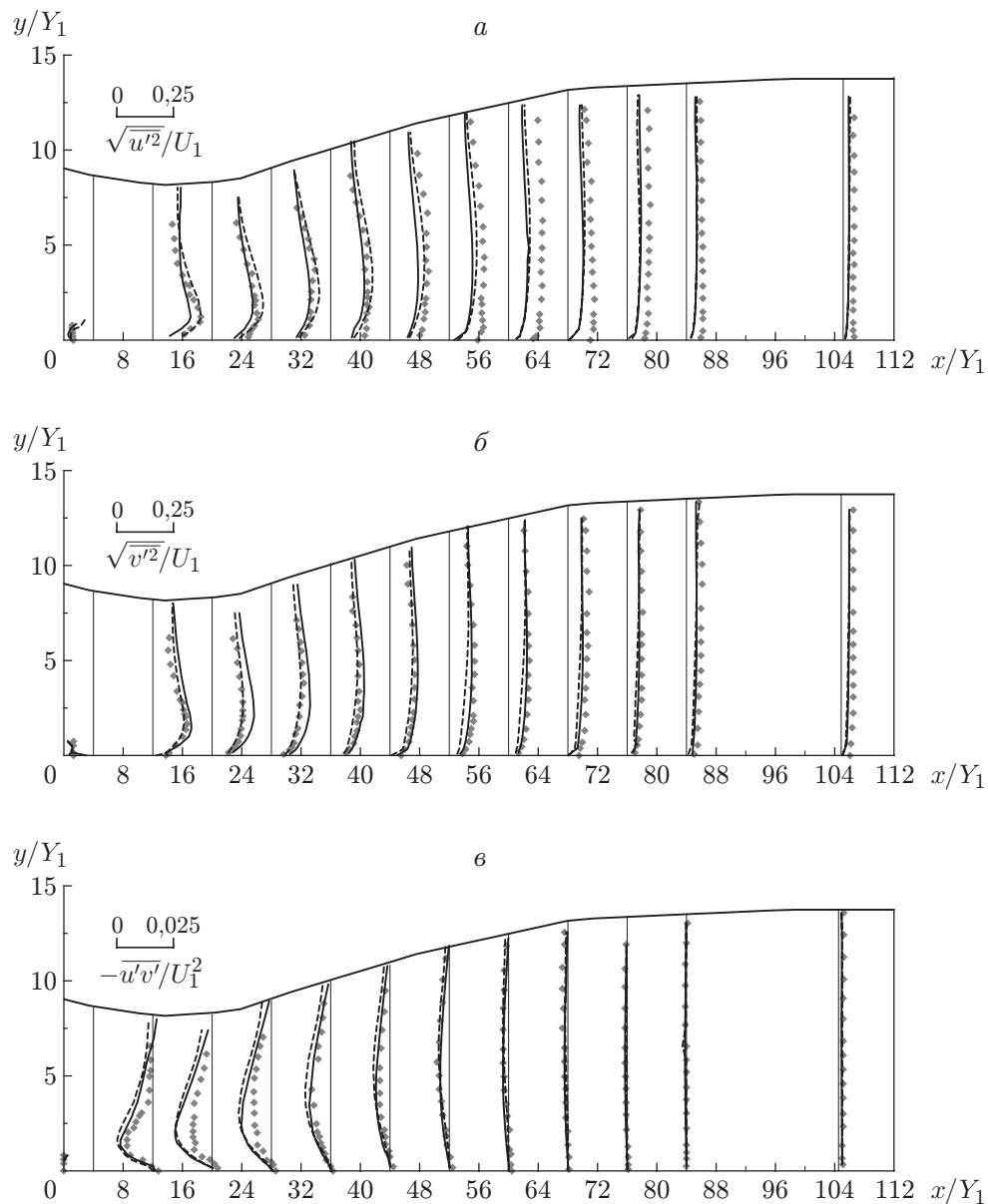


Рис. 3. Экспериментальные (точки) и расчетные (линии) значения интенсивности турбулентности $\sqrt{u'^2}$ (а), $\sqrt{v'^2}$ (б) и турбулентного сдвигового напряжения $-\overline{u'v'}$ (в):

сплошные линии — стандартная ($k-\varepsilon$)-модель, штриховые — модель RSM, точки — экспериментальные данные [9]

Таблица 4

Относительная среднеквадратичная погрешность при моделировании профилей продольной скорости

Способ описания пристенного течения	Модель турбулентности	Δ , %		
		$x/Y_1 = 12$	$x/Y_1 = 36$	$x/Y_1 = 105$
Стандартные пристенные функции	RSM	16,3	18,9	5,4
	RNG $k-\varepsilon$	29,5	24,4	6,4
	Реализуемая $k-\varepsilon$	34,1	28,3	8,7
	Стандартная $k-\varepsilon$	24,2	14,1	7,5
Расширенное описание пристенного течения	RSM	25,1	9,2	5,3
	RNG $k-\varepsilon$	26,6	20,2	6,4
	Реализуемая $k-\varepsilon$	29,1	23,3	10,6
	Стандартная $k-\varepsilon$	22,2	12,2	6,4

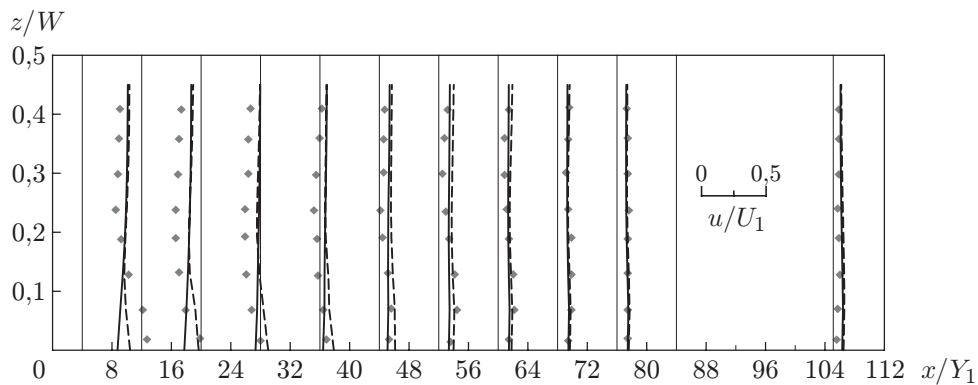


Рис. 4. Экспериментальные (точки) и расчетные (линии) профили продольной скорости в поперечном сечении канала: сплошные линии — стандартная ($k-\varepsilon$)-модель, штриховые — модель RSM, точки — экспериментальные данные [9]

за прогибом оказались меньше. Результаты расчетов интенсивности вертикальной турбулентности $\sqrt{v'^2}$ по модели RSM являются более точными, чем результаты расчетов по стандартной ($k-\varepsilon$)-модели в пристенной струе и области рециркуляции. За этими областями результаты расчетов $\sqrt{v'^2}$ по модели RSM занижены, в то время как результаты расчетов по стандартной ($k-\varepsilon$)-модели хорошо согласуются с экспериментальными данными (рис. 3, б). Сравнение результатов расчетов по модели турбулентности RSM с данными эксперимента показало, что при использовании модели RSM значения напряжения турбулентного сдвига $-\overline{u'v'}$ в рециркуляционной области завышены. В начале этой области результаты расчетов по стандартной ($k-\varepsilon$)-модели являются более точными, чем результаты расчетов по модели RSM. Однако ниже по течению от рециркуляционной области результаты расчетов по этим моделям турбулентности хорошо согласуются с данными эксперимента (рис. 3, в).

Проведено сравнение расчетных распределений продольной скорости в плоскости поперек канала ($y/Y_1 = 5,3$) с данными эксперимента 8 (рис. 4). На рис. 4 видно, что вблизи плоскости симметрии в области прогиба значения продольной скорости, вычисленные по стандартной ($k-\varepsilon$)-модели и модели RSM, занижены. В области струи вблизи боковой стенки значения u , вычисленные по модели турбулентности, являлись заниженными, а на большем расстоянии от затвора результаты расчетов по модели RSM были завышены. В то

же время результаты расчетов с помощью стандартной $(k-\varepsilon)$ -модели хорошо согласуются с данными эксперимента. В области восстановления результаты расчетов по моделям турбулентности хорошо согласуются с результатами эксперимента. Различие экспериментальных и численных данных в области прогиба в плоскости $y/Y_1 = 5,3$, по-видимому, обусловлено сложной структурой течения.

Проведено сравнение значений продольной скорости и турбулентного сдвигового напряжения $\overline{u'v'}$, рассчитанных с использованием стандартной $(k-\varepsilon)$ -модели и модели турбулентности RSM, с результатами эксперимента в четырех точках трех сечений с координатами $x/Y_1 = 4, 32, 64$. При наличии вертикального вихревого движения в окрестности отверстия затвора на поверхности воды вблизи центральной плоскости канала влияние возвратного течения было более существенным, чем вблизи боковых стенок [9]. Результаты экспериментов и расчетов продольной скорости в области пристенной струи хорошо согласуются. В области возвратного течения результаты расчетов продольной скорости занижены вблизи боковой стенки и завышены вблизи плоскости симметрии, в то время как при $z/W = 0,24$ они хорошо согласуются с экспериментальными данными. При $x/Y_1 = 32$ результаты расчетов по моделям турбулентности хорошо согласуются с данными эксперимента, но точность расчетов по модели RSM вблизи боковой стенки и плоскости симметрии больше точности расчетов по стандартной $(k-\varepsilon)$ -модели. Также при $x/Y_1 = 64$ результаты моделирования по модели RSM лучше согласуются с данными эксперимента, чем результаты расчетов по стандартной $(k-\varepsilon)$ -модели. Расчетные значения турбулентного напряжения сдвига хорошо согласуются с экспериментальными значениями в области пристенной струи, при этом результаты расчетов по обоим моделям турбулентности близки. При $x/Y_1 = 32$ результаты расчетов и экспериментальные данные хорошо согласуются в области вблизи дна канала. Над пристенной областью рассчитанное турбулентное напряжение сдвига было завышено вблизи боковой стенки и занижено вблизи плоскости симметрии канала, при этом рассчитанные значения турбулентного напряжения сдвига в основном согласуются с результатами эксперимента при $z/W = 0,13; 0,24$. При $x/Y_1 = 64$ вблизи боковой стенки канала результаты расчетов по модели RSM были более точными, чем результаты расчетов по стандартной $(k-\varepsilon)$ -модели.

Экспериментальные и расчетные значения коэффициента напряжения сдвига на дне для экспериментов 3, 6, 8 показаны на рис. 5. Коэффициент напряжения сдвига можно определить по формуле

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho U_{in}^2 / 2} = \frac{u_*^2}{U_{in}^2 / 2},$$

где τ_w, u_* — напряжение сдвига на дне и сдвиговая скорость соответственно. Из рис. 5 следует, что вычисленные и полученные в эксперименте значения коэффициента напряжения сдвига хорошо согласуются, но значение коэффициента напряжения сдвига, полученное по стандартной $(k-\varepsilon)$ -модели, больше соответствующего значения, вычисленного по модели RSM.

Заключение. В работе численно исследованы трехмерные затопленные гидравлические скачки. Для моделирования свободной поверхности и структуры турбулентного течения в затопленных гидравлических скачках использовались метод объема жидкости и различные модели турбулентности: RSM, стандартная $k-\varepsilon$, ренорм-групповая (RNG) $k-\varepsilon$ и реализуемая $k-\varepsilon$. Изучена адекватность моделей турбулентности, в которых используются стандартные пристенные функции и методы расширенного описания пристенного течения. Показано, что результаты расчетов трехмерных затопленных гидравлических скачков удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

При расчете формы поверхности воды наиболее точными являются результаты, полученные с помощью RNG $(k-\varepsilon)$ -модели турбулентности, в которой используется метод

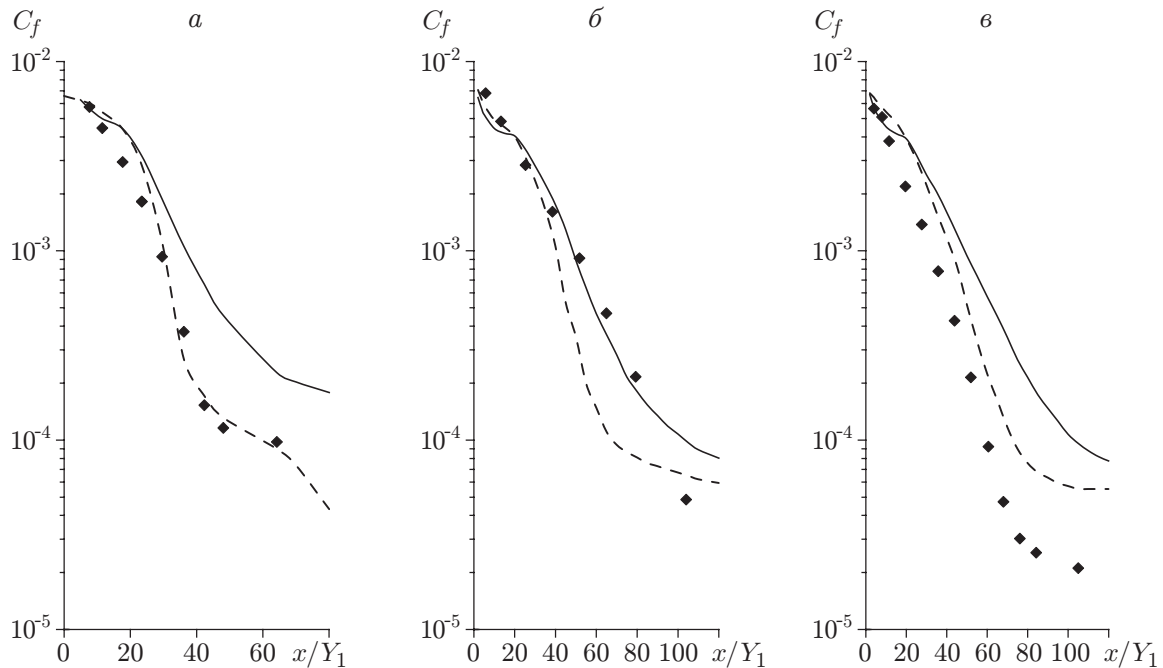


Рис. 5. Экспериментальные (точки) и расчетные (линии) значения коэффициента сдвигового напряжения на дне:

точки — экспериментальные данные [9] (*a* — эксперимент 3, *б* — эксперимент 6, *в* — эксперимент 8), сплошные линии — стандартная ($k-\varepsilon$)-модель, штриховые — модель RSM

расширенного описания пристенного течения. В полностью развитой области вблизи дна канала результаты расчета по модели RSM с использованием метода расширенного описания пристенного течения лучше согласуются с экспериментальными данными о продольной скорости, чем результаты расчетов по другим моделям турбулентности. Стандартная ($k-\varepsilon$)-модель позволяет определить продольную скорость более точно, чем модель RNG и реализуемая ($k-\varepsilon$)-модель. В области прогиба значения продольной скорости поперек канала, полученные по модели RSM и стандартной ($k-\varepsilon$)-модели, являются заниженными. Значения коэффициента напряжения сдвига и максимальной средней скорости затопленных гидравлических скачков, вычисленные по стандартной ($k-\varepsilon$)-модели, больше соответствующих значений, вычисленных по модели RSM. Значения интенсивности продольной и вертикальной турбулентности и турбулентного напряжения сдвига, вычисленные по модели RSM и стандартной ($k-\varepsilon$)-модели, хорошо согласуются с экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Long D., Steffler P. M., Rajaratnam N., Smy P. Structure of flow in hydraulic jumps // J. Hydraul. Res. 1990. V. 29, N 2. P. 207–218.
2. Liu M., Rajaratnam N., Zhu D. Turbulence structure of hydraulic jumps of low Froude numbers // J. Hydraul. Engng. Proc. ASCE. 2004. V. 130. P. 511–520.
3. McCorquodale J. A. Hydraulic jumps and internal flows // Encyclopedia of fluid mechanics / Ed. by N. P. Chermisinoff. Houston: Gulf Publ., 1986. V. 2, chap. 6. P. 120–173.
4. Rouse H., Siao T. T., Nagaratnam S. Turbulence characteristics of the hydraulic jumps // J. Hydraul. Div. Proc. ASCE. 1958. V. 84, N 1. P. 1–30.
5. Svendsen I. A., Veeramony J., Bakunin J., Kirby J. T. The flow in weak turbulent hydraulic jump // J. Fluid Mech. 2000. V. 418. P. 25–57.

6. **Rao N. S. G., Rajaratnam N.** The submerged hydraulic jump // J. Hydraul. Div. Proc. ASCE. 1963. V. 89, N HY1. P. 139–162.
7. **Rajaratnam N.** The hydraulic jump as a wall jet // J. Hydraul. Div. Proc. ASCE. 1965. V. 91, N 5. P. 107–132.
8. **Wu S., Rajaratnam N.** Free jumps, submerged jumps and wall jets // J. Hydraul. Res. 1995. V. 33, N 2. P. 197–212.
9. **Long D., Steffler P. M., Rajaratnam N.** LDA study of flow structure in submerged hydraulic jumps // J. Hydraul. Res. 1990. V. 28, N 4. P. 437–460.
10. **Ohtsu I., Yasuda Y., Ishikawa M.** Submerged hydraulic jumps below abrupt expansions // J. Hydraul. Engng. Proc. ASCE. 1999. V. 125, N 5. P. 492–499.
11. **Dey S., Sarkar A.** Characteristics of turbulent flow in submerged jumps on rough beds // J. Engng Mech. Proc. ASCE. 2008. V. 134, N 1. P. 49–59.
12. **Long D., Steffler P. M., Rajaratnam N.** A numerical study of submerged hydraulic jumps // J. Hydraul. Res. 1991. V. 29, N 3. P. 293–308.
13. **Gharangik A. M., Chaudhry M. H.** Numerical model of hydraulic jump // J. Hydraul. Engng. Proc. ASCE. 1991. V. 117. P. 1195–1209.
14. **Chippada S., Ramaswamy B., Wheeler M. F.** Numerical simulation of hydraulic jump // Intern. J. Numer. Methods Engng. 1994. V. 37. P. 1381–1397.
15. **Ma F., Hou Y., Prinos P.** Numerical calculation of submerged hydraulic jump // J. Hydraul. Res. 2002. V. 39, N 5. P. 1–11.
16. **Hirt C. W., Nicholls B. D.** Volume of fluid (VOF) method for dynamics of free boundaries // J. Comput. Phys. 1981. V. 39. P. 201–221.
17. **Sarker M. A., Rhodes D. G.** Physical modeling and CFD applied to hydraulic jumps: Rep. / Cranfield Univ. S. l., 2002.
18. **Zhao Q., Misra S. K., Svendsen S., Kirby I.** Numerical study of a turbulent hydraulic jump // Proc. of 17th Engng mech. conf. N. Y.: Univ. of Delaware, 2004.
19. **Gonzalez A., Bombardelli F.** Two-phase flow theory and numerical models for hydraulic jumps, including air entrainment // Proc. of the 31st IAHR congress, Seoul (Korea), 2005. S. l., 2005.
20. **Lauder B. E., Spalding D. B.** The numerical computation of turbulent flows // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 1974. V. 3. P. 269–289.
21. **Chen H. C., Patel V. C.** Near-wall turbulence models for complex flows including separation // AIAA J. 1988. V. 26, N 6. P. 641–648.
22. **Jongen T.** Simulation and modeling of turbulent incompressible flows: Thesis PhD. Lausanne, 1992.
23. **Kader B.** Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1981. V. 24, N 9. P. 1541–1544.
24. **Wolfstein M.** The velocity and temperature distribution of one-dimensional flow with turbulence augmentation and pressure gradient // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1969. V. 12. P. 301–318.
25. **Shih T. H., Lumley J. L.** Kolmogorov behavior of near-wall turbulence and its application in turbulence modeling // Intern. J. Comput. Fluid Dynamics. 1993. V. 1, N 1. P. 43–56.
26. **Pasinato H. D.** Some results based on near-wall turbulence // Intern. J. Comput. Fluid Dynamics. 2000. V. 14, N 2. P. 159–169.
27. **Kim J. Y., Ghajar A. J., Tang C., Foutch G. L.** Comparison of near-wall treatment methods for high Reynolds number backward-facing step flow // Intern. J. Comput. Fluid Dynamics. 2005. V. 19, N 7. P. 493–500.