

$$(11) \quad \mathbf{F}_{j3} = 3B \operatorname{Im} \{ \exp [- (-1)^j ikl] [(\mathbf{m} \cdot \mathbf{U}_2) \mathbf{U}_1^* + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{U}_1^*) \mathbf{U}_2 + (\mathbf{U}_1^* \cdot \mathbf{U}_2) \mathbf{m} - 5 (\mathbf{m} \cdot \mathbf{U}_1^*) (\mathbf{m} \cdot \mathbf{U}_2) \mathbf{m}] \} (kl)^{-3};$$

$$(12) \quad \mathbf{F}_{j4} = -3 (-1)^j B \operatorname{Re} \{ \exp [- (-1)^j ikl] [(\mathbf{m} \cdot \mathbf{U}_2) \mathbf{U}_1^* + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{U}_1^*) \mathbf{U}_2 + (\mathbf{U}_1^* \cdot \mathbf{U}_2) \mathbf{m} - 5 (\mathbf{m} \cdot \mathbf{U}_1^*) (\mathbf{m} \cdot \mathbf{U}_2) \mathbf{m}] \} (kl)^{-4}$$

$$(B = \pi k^4 R_1^3 R_2^3 \rho_0 / 2, \mathbf{m} = \mathbf{l} / l, \mathbf{l} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

Сравним полученные формулы с ранее известными. В [1, 2] приводится формула для силы Кёнига в несжимаемой жидкости при условии, что обе частицы колеблются вдоль линии, соединяющей их центры. В [3] эта формула обобщается на случай, когда направления осцилляций частиц произвольны. При этом она существенно усложняется. Учет сжимаемости жидкости выявляет тот факт, что структура силы Кёнига имеет еще более сложный характер. Во-первых, у силы Кёнига возникают дальнедействующие члены (9)—(11), которые в отличие от «классического» члена (12) обратно пропорциональны не l^4 , а l , l^2 и l^3 соответственно. В пределе несжимаемой жидкости ($kl \ll 1$) можно ограничиться только последним членом (12), совпадающим с полученным в [1—3]. Во-вторых, сила Кёнига начинает зависеть от фазы переизлучения kl , вследствие чего при определенных l она может обращаться в нуль и менять знак. В-третьих, $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \neq 0$. Последнее связано с тем, что в сжимаемой жидкости часть импульса рассматриваемой системы уносится на бесконечность [5].

В заключение отметим, что изменения в структуре силы Кёнига имеют в некотором смысле универсальный характер. Аналогичные изменения обнаружены у силы Бьеркнеса [5, 6]. Те же эффекты имеют место и в задачах о радиационном взаимодействии в поле электромагнитной волны электрических зарядов [7] и магнитных моментов [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. — М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
2. Кузнецов Г. Н., Щёкин И. Е. Взаимодействие пульсирующих пузырьков в вязкой жидкости // Акуст. журн. — 1972. — Т. 18, № 4.
3. Алексеев В. Н. К вопросу о радиационной силе давления звука на сферу // Акуст. журн. — 1983. — Т. 29, № 2.
4. Агранат Б. А., Дубровин М. Н., Хаевский Н. Н. и др. Основы физики и техники ультразвука. — М.: Высш. шк., 1987.
5. Немцов Б. Е. Эффекты радиационного взаимодействия пузырьков в жидкости // Письма в ЖТФ. — 1983. — Т. 9, № 14.
6. Дойников А. А., Завтрак С. Т. Учет сжимаемости жидкости в задаче о взаимодействии газовых пузырьков в поле звуковой волны // Акуст. журн. — 1988. — Т. 34, № 2.
7. Завтрак С. Т. Радиационное взаимодействие зарядов // Письма в ЖТФ. — 1989. — Т. 15, № 9.
8. Завтрак С. Т. Радиационное взаимодействие магнитных моментов в поле плоской электромагнитной волны // Письма в ЖТФ. — 1989. — Т. 15, № 16.

г. Минск

Поступила 20/IX 1989 г.,
в окончательном варианте — 31/VII 1990 г.

УДК 532.516 : 536.24.01

Е. А. Рябицкий

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

При отсутствии массовых сил существенное влияние на устойчивость равновесия неравномерно нагретой жидкости оказывают зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры и порождаемый ею термокапиллярный эффект. Если равновесный градиент температуры достаточно велик, то наличие термокапиллярных сил на свободной поверхности может привести к возникновению конвективного движения.

Исследование термокапиллярной неустойчивости равновесия относительно монотонных возмущений проводилось в [1—4]. При этом, если для плоского слоя делались попытки исследовать немонотонные возмущения [5, 6], для цилиндрической области такого анализа не проводилось. В то же время известно [7, 8], что в случае цилиндра наличие капиллярного механизма конвекции приводит к появлению колебательных возмущений, которые нейтрально устойчивы. В данной работе изучается устойчивость равновесия цилиндрического слоя относительно произвольных возмущений. Проведенный численный анализ монотонной неустойчивости показал, что для деформируемой свободной поверхности нейтральная кривая — не единая кривая с точкой разрыва, а состоит из двух самостоятельных, каждая из которых соответствует своему типу возмущений: капиллярному или термокапиллярному. Кроме того, при учете капиллярного механизма конвекции появляется колебательная неустойчивость, которая имеет место для осесимметрических и азимутальных ($m = 1$) возмущений. Для других азимутальных мод колебательные возмущения стабилизируются капиллярностью. Обнаружено, что наличие термокапиллярного механизма стабилизирует неустойчивость Рэлея в области длинных волн.

1. Рассмотрим цилиндрический слой вязкой теплопроводной жидкости, ограниченный твердой внутренней и свободной внешней поверхностями, при отсутствии массовых сил. Введем цилиндрическую систему координат с осью z , направленной вдоль образующей цилиндра. Уравнения твердой и свободной границ соответственно $r = r_0$ и $r = r_1$. Зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры описывается формулой $\sigma = \sigma_0 - \kappa\Theta$.

Пусть внутри жидкости равномерно распределены источники тепла интенсивности $q = \text{const}$. Тогда равновесное состояние описывается формулами

$$(1.1) \quad u = v = w = 0, \quad p = \text{const}, \quad \Theta(r) = q [2r_0^2 \ln(r/r_1) - r_0^2 + r_1^2] / 4\chi.$$

Здесь (u, v, w) — компоненты вектора скорости; p — давление; Θ — температура; χ — коэффициент теплопроводности.

Выберем в качестве единиц длины, времени, скорости, давления и температуры r_1 ; r_1^2/ν , ν/r_1 , $\rho\nu^2/r_1^2$, $\nu\gamma r_1/\chi$ (ρ — плотность, ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости, $\gamma = qr_1/2\chi$). При этом выражение для равновесной температуры примет вид

$$\Theta_0(\xi) = \text{Pr}^{-1}(2d^2 \ln \xi + 1 - \xi^2).$$

Ищем возмущения вектора скорости, давления, температуры и нормальной составляющей свободной поверхности в форме

$$(U, V, W, P, T, R) = (U(\xi), V(\xi), W(\xi), P(\xi), T(\xi), R) \times \exp[i\alpha\eta + im\varphi - i\alpha C\tau],$$

где α , τ — осевое и азимутальное волновые числа; $C = C_r + iC_i$ — комплексный декремент; τ — безразмерное время. Критерием устойчивости равновесного состояния (1.1) служит знак мнимой части декремента: значения параметров задачи, для которых $C_i < 0$, отвечают области устойчивости; если существуют такие значения параметров, что $C_i > 0$, то имеем неустойчивость; случаю $C_i = 0$ соответствует граница устойчивости (нейтральные возмущения).

Уравнения малых возмущений примут вид [9]

$$(1.2) \quad \begin{aligned} aU + P' &= -i\alpha W' - \frac{im}{\xi^2}(\xi V)'', \\ aV + \frac{im}{\xi}P &= \left[\frac{1}{\xi}(\xi V)' \right]' + \frac{2im}{\xi^2}U, \\ aW + i\alpha P &= \frac{1}{\xi}(\xi W)', \quad \frac{1}{\xi}(\xi U)' + \frac{im}{\xi}V + i\alpha W = 0, \\ bT - \left(\frac{d^2}{\xi} - \xi \right)U &= \frac{1}{\xi}(\xi T)' \quad (d < \xi < 1); \\ a &= -i\alpha C + \alpha^2 + m^2/\xi^2, \quad b = -i\alpha \text{Pr} C + \alpha^2 + m^2/\xi^2; \end{aligned}$$

условия на твердой границе ($\xi = d$):

$$(1.3) \quad U = V = W = T' = 0;$$

на свободной поверхности ($\xi = 1$):

$$(1.4) \quad V' - V + imU = -imM(T + \Theta'_0 R);$$

$$(1.5) \quad i\alpha U + W' = -i\alpha M(T + \Theta'_0 R);$$

$$(1.6) \quad -i\alpha CR = U;$$

$$(1.7) \quad -P + 2U' = -M(T + \Theta'_0 R) + We(1 - \alpha^2 - m^2)R;$$

$$(1.8) \quad T' + BiT + (\Theta''_0 + Bi\Theta'_0)R = 0.$$

Здесь $\xi = r/r_1$; $d = r_0/r_1$; $M = \gamma\chi r_1^2/\rho\nu\chi$ — число Марангони; $We = r_1\sigma_0/\rho\nu^2$ — число Вебера; $Pr = \nu/\chi$ — число Прандтля, $Bi = \beta r_1/\lambda$ — число Био; λ, β — коэффициенты теплопроводности и межфазного теплообмена.

Для того чтобы исследовать термокапиллярный механизм конвекции отдельно, без учета капиллярности, целесообразно рассмотреть задачу в упрощенной постановке (как это сделано, например, в [1, 3]), а именно: считать, что свободная поверхность недеформируема ($R = 0$). В этом случае неустойчивость может возникнуть только из-за неоднородности распределения температуры на свободной поверхности. В рассматриваемой задаче это условие, за исключением случаев $\alpha = 1, m = 0$ и $\alpha = 0, m = 1$, можно формально получить из (1.7), положив $We = \infty$. Тогда граничные условия при $\xi = 1$ примут вид

$$(1.9) \quad V' - V + imMT = 0, \quad W' + i\alpha MT = 0, \quad U = 0, \\ T' + BiT = 0.$$

В перечисленных выше исключениях при $m = 0$ прямая $\alpha = 1$ соответствует границе рэлеевской неустойчивости [9] и при рассмотрении термокапиллярного механизма не учитывается. При $\alpha = 0, m = 1$ имеет место только тривиальное решение [4].

2. Проведем асимптотический анализ длинноволновых возмущений ($\alpha \rightarrow 0$) при $m = 0$. В этом случае задача для функции V отделяется. Пусть $We = \infty$, полагая $\alpha C = O(\alpha)$, получаем характеристическое уравнение для определения комплексного декремента:

$$(2.1) \quad \gamma [J_1(\gamma)Y_1(\gamma d) - Y_1(\gamma)J_1(\gamma d)] + Bi [Y_0(\gamma)J_1(\gamma d) - \\ - J_0(\gamma)Y_1(\gamma d)] = 0$$

($\gamma = (i\alpha C Pr)^{1/2}$, J_0, J_1, Y_0, Y_1 — функции Бесселя 1-го и 2-го рода). Уравнение (2.1) имеет счетное число вещественных корней.

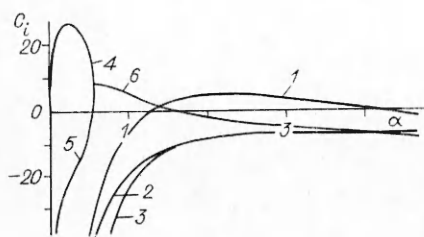
Если $We \neq \infty$, тогда, предполагая, что $C = O(\alpha)$, $T = O(1/\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 0$, $Bi \neq 0$, находим

$$(2.2) \quad C = -\frac{i\alpha}{4} \left\{ We \left[\frac{(1-d^2)^2}{4} + \frac{1-d^2}{2} + \ln d \right] - \right. \\ \left. - M(1+d^2) \left[\frac{(1-d^2)^2}{4} + \frac{3(1-d^2)}{2} + 3 \ln d \right] \right\}.$$

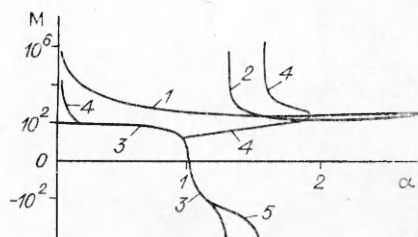
Анализ (2.1) и (2.2) показывает, что при $m = 0, Bi \neq 0$ длинноволновые возмущения всегда монотонны и при $We = \infty$ состояние равновесия устойчиво.

Решение задачи (1.2)–(1.8) для монотонных нейтральных возмущений ($C = 0$) построено в [4]. Полученная при этом аналитическая зависимость чисел Марангони от остальных параметров использовалась для контроля расчетов.

3. Численное решение задачи (1.2)–(1.8) осуществлялось методом ортогонализации. Найденные асимптотические значения (2.1), (2.2) использовались в качестве начального приближения. На примере расплава германия с $Pr = 0,016, Bi = 2$ исследуем влияние капиллярного и термокапиллярного механизма на устойчивость равновесия. Рассмотрим осесимметрические возмущения ($m = 0$), полагая $d = 0,1$.



Р и с. 1



Р и с. 2

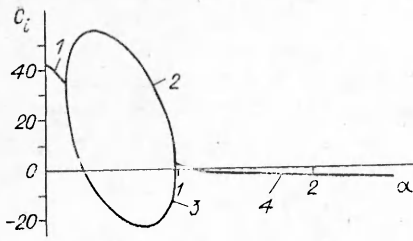
Пусть свободная поверхность недеформируема ($We = \infty$). Проведенные расчеты показали, что в этом случае потеря устойчивости происходит при $M > 216$, что совпадает с результатами [4]. Кроме того, для всех α получено, что $C_r = 0$. На рис. 1 приведены результаты расчетов C_i от α для наиболее опасных мод, построенные при $M = 300$ и 80 (кривые 1, 2). Соответствующая нейтральная кривая приведена на рис. 2 (кривая 1). Таким образом, анализ полученных численных и аналитических результатов показывает, что в случае недеформируемой свободной поверхности (термокапиллярный механизм возникновения конвекции) реализуются только монотонные возмущения.

Учет деформации свободной поверхности приводит к дестабилизации равновесия. При этом спектр наиболее опасных возмущений имеет более сложный вид и для $M = 80$ приведен на рис. 1. Кривая 3 иллюстрирует изменение термокапиллярной моды при уменьшении числа Вебера. Отметим, что для этой моды C_r всегда равно нулю независимо от We . Соответствующая этим возмущениям нейтральная кривая при $We = 10^4$ приведена на рис. 2 (линия 2). Кроме того, учет деформации свободной поверхности приводит к появлению нового механизма неустойчивости. Как показано на рис. 1, в этом случае появляются две новые монотонные в области малых α моды (кривые 4, 5). При этом кривая 4 лежит в верхней полуплоскости и начинается с асимптотики (2.2). Точки пересечения кривой 5 с осью $C_i = 0$ ($\alpha = 0,53$ при $M = 80$) формируют монотонную капиллярную нейтральную кривую, которая для $We = 10^4$ приведена на рис. 2 (кривая 3). При увеличении числа Марангони кривые 4 и 5 смещаются вниз и для $94,5 < M < 95,6$ капиллярная монотонная кривая определяется точками пересечения кривой 4 с осью $C_i = 0$. При $M > 95,6$ монотонная неустойчивость в области малых α исчезает.

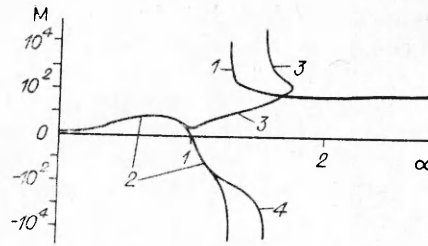
Рассмотрим возникновение колебательной неустойчивости. Как показано на рис. 1, с ростом α монотонные капиллярные моды сливаются, образуя комплексно-сопряженную пару. Мнимая часть декремента на рис. 1 соответствует кривой 6, а нейтральная кривая для колебательной неустойчивости приведена на рис. 2 (кривая 4), она состоит из двух частей, связанных между собой кривой 3, точки перехода одной кривой в другую следующие: $\alpha = 0,16$, $M = 94,5$ и $\alpha = 0,95$, $M = 18,9$.

Кроме нагрева жидкости, аналогичный механизм возникновения колебательной неустойчивости имеет место и при охлаждении. В этом случае, как показано на рис. 2, нейтральная кривая колебательных возмущений (линия 5) ответвляется от нейтральной кривой капиллярных монотонных возмущений. Область устойчивости на рис. 2 ограничена слева и снизу при $0,95 < \alpha < 1,14$ линией 3 и при $1,14 < \alpha < 1,56$ — линией 5. Сверху граница проходит по кривой 4 при $0,95 < \alpha < 1,92$ и кривой 2 при $\alpha > 1,92$. Кроме того, появляется «островок устойчивости» в области малых волновых чисел, ограниченных сверху левой частью линии 4 и снизу прямой $M = 95,6$. Отметим, что кривая 5 и верхняя ветвь кривой 4 имеют одну и ту же асимптотику $\alpha = 1,56$, следовательно, наблюдается аналогия в поведении нейтральных кривых для монотонных и колебательных возмущений.

Таким образом, все возмущения делятся на два типа: тепловые и капиллярные, каждый из которых соответствует своему механизму не-



Р и с. 3



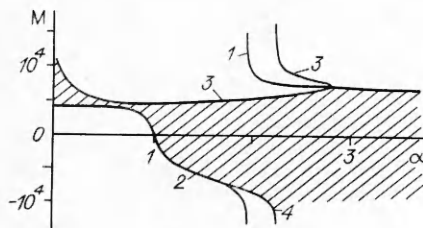
Р и с. 4

устойчивости. Тепловая неустойчивость обусловлена наличием температурной неоднородности на свободной границе и связанным с ней термокапиллярным эффектом. Возмущения этого типа всегда монотонны и играют ведущую роль при больших волновых числах. Впервые этот механизм неустойчивости описан в [1].

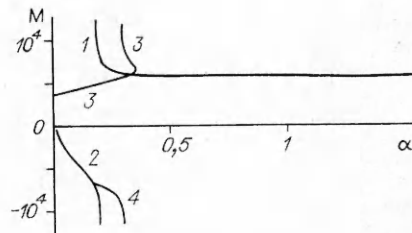
Капиллярные возмущения возникают из-за деформируемости свободной границы и реализуются в виде пары волн, бегущих по поверхности. Этот тип неустойчивости является ведущим при небольших α и впервые исследовался Рэлеем [7]. Одновременное влияние обоих механизмов приводит к возникновению колебательных возмущений, относительно которых неустойчивость возможна только в ограниченном интервале волновых чисел ($\alpha < 1,95$ для $We = 10^4$). При этом коротковолновые возмущения стабилизируются силами поверхностного натяжения. Кроме того, наличие термокапиллярного механизма конвекции стабилизирует неустойчивость Рэлея в области длинных волн.

Описанное выше поведение наиболее опасных возмущений характерно для чисел Био, не равных нулю. Если свободная поверхность теплоизолирована ($Bi = 0$), то механизм возникновения колебательных возмущений будет уже другим. На рис. 3 приведены графики капиллярных мод, построенные при $Bi = 0$, $M = 2$, $We = 10^4$. Видно, что длинноволновые возмущения всегда колебательные, а состояние равновесия относительно этих возмущений неустойчивое. При уменьшении длины волны колебательная мода (линия 1) распадается на две монотонные ветви (линии 2, 3), нижняя из которых пересекает ось $C_i = 0$ и формирует монотонную нейтральную кривую. При дальнейшем увеличении волнового числа монотонные моды сливаются, вновь образуя комплексно-сопряженную пару (линия 4). Соответствующие нейтральные кривые приведены на рис. 4. Здесь кривые 1, 2 отвечают монотонным возмущениям, 3, 4 — колебательным. Область устойчивости односвязна и ограничена слева линиями 2 и 3.

Рассмотрим влияние других параметров задачи на поведение нейтральных кривых. Интересный эффект наблюдается при уменьшении безразмерной толщины слоя, а именно: с ростом d точки перехода колебательной нейтральной кривой в монотонную смещаются навстречу друг другу и при некотором d_0 появляется «мостик» между областями устойчивости. В качестве иллюстрации рассмотрим рис. 5, на котором приведены нейтральные кривые, построенные при $d = 0,5$, $Bi = 2$, $We = 10^4$ (для этих Bi и We получаем $d_0 = 0,447$). Область устойчивости заштрихована. Аналогичное поведение нейтральных кривых наблюдается и при



Р и с. 5



Р и с. 6

уменьшении Pr . В этом случае образование связанной области устойчивости происходит при очень малых значениях Pr (порядка 10^{-4}). Кроме того, уменьшение Pr приводит к дестабилизации равновесия.

Рассмотрим азимутальные возмущения ($m \neq 0$). Известно [8], что при наличии капиллярного механизма конвекции данные возмущения всегда устойчивы. Однако учет термокапиллярности приводит к появлению колебательной неустойчивости, которая может быть наиболее опасной. На рис. 6 представлены нейтральные кривые, построенные при $m = 1$, $Bi = 2$, $Pr = 0,016$, $We = 10^4$ (1, 2 отвечают монотонным, а 3, 4 — колебательным возмущениям). Таким образом, наблюдается качественное совпадение поведения азимутальных и осесимметрических нейтральных кривых. При этом осесимметрические возмущения будут более опасные, чем азимутальные. Проведенный численный анализ показал, что колебательная неустойчивость возможна только при $m = 1$. При увеличении азимутального волнового числа колебательные возмущения стабилизируются капиллярностью.

Автор выражает благодарность В. К. Андрееву за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pearson J. R. A. On convection cells induced by surface tension // *J. Fluid Mech.*— 1958.— V. 4, N 5.
2. Scriven L. E., Sternling C. V. On cellular convection driven by surface tension gradients: effect of mean surface tension and surface viscosity // *J. Fluid Mech.*— 1964.— V. 19, N 3.
3. Антимиров М. Я., Лиениня В. Р. Возникновение термокапиллярной конвекции в цилиндрическом слое жидкости в условиях невесомости // *Изв. ЛатвССР. Сер. физ. и техн. наук.*— 1978.— № 3.
4. Андреев В. К., Родионов А. А., Рябицкий Е. А. Возникновение термокапиллярной конвекции в жидком цилиндре, цилиндрическом и плоском слоях под действием внутренних источников тепла // *ПМТФ.*— 1989.— № 2.
5. Vidal A., Acrivos A. Nature of the neutral state in surface tension driven convection // *Phys. Fluids.*— 1966.— V. 9, N 3.
6. Урпин В. А., Яковлев Д. Г. Возбуждение капиллярных волн в неоднородно прогретых жидких пленках // *ЖТФ.*— 1989.— Т. 59, № 2.
7. Ламб. Гидродинамика.— М.: И.: Гостехиздат, 1947.
8. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability.*— Oxford University Press, 1961.
9. Андреев В. К., Рябицкий Е. А. Малые возмущения термокапиллярного движения в случае цилиндра.— М., 1984.— Деп. в ВИНТИ 27.11.84, № 7788—84.

г. Красноярск

Поступила 10/VIII 1990 г.

УДК 533.6.011.536.24

А. В. Буреєв, В. И. Зинченко

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОБТЕКАНИЯ СФЕРИЧЕСКИ ЗАТУПЛЕННЫХ КОНУСОВ В ОКРЕСТНОСТИ ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ТЕЧЕНИЯ В УДАРНОМ СЛОЕ И ВДУВЕ ГАЗА С ПОВЕРХНОСТИ

В рамках модели полного вязкого ударного слоя в окрестности плоскости симметрии течения проводится исследование обтекания затупленного но сфере конуса в широком диапазоне чисел Рейнольдса, когда в ударном слое реализуются различные режимы течения. При рассмотрении пространственного течения в ударном слое проблема автономного расчета для плоскости симметрии решалась в [1, 2] путем разложения давления в ряд Фурье по окружной координате, а в [3] для модели тонкого вязкого ударного слоя использовалось задание градиента давления по окружной координате из таблицы невязкого обтекания. В данной работе применяется процедура обрезания рядов [4], проанализировано влияние углов атаки α_A и конусности β , в том числе для случаев, когда α_A значительно превосходит β , а также величины расходов и закона распределения вдуваемого газа через пористую сферическую оболочку на характеристики теплообмена.