ПМТФ, № 2, 1961

ЗАТУХАНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

О. С. Рыжов

(Москва)

Асимптотические законы затухания ударных волн на больших расстояниях от места их возникновения были найдены Л. Д. Ландау [1], С. А. Христиановичем [2], Л. И. Седовым [3], Уитэмом [4] и другими авторами в предположении, что среда является однородной. В реальной атмосфере давление, плотность и температура меняются от точки к точке и, кроме того, частицы воздуха находятся, как правило, в движении. Поэтому изучение распространения ударных волн в неоднородной движущейся среде представляет значительный интерес. В рамках геометрической акустики оно проводилось в работе Келлера [5]. Установлению связи между параметрами газа в зоне возмущенного течения и уточнению акустической теории, в которой не учитывается нелинейный характер исходных уравнений газовой динамики, посвящена статья К. Е. Губкина [6]. Независимо Оттерманом [7] рассматривалось движение слабых ударных волн в изотермической покоящейся среде. В работе О. Ю. Полянского [8] предпринята попытка дать простую схему для определения законов затухания ударных фронтов также в следующем за геометрической акустикой приближении. Цель настоящей работы заключается в выяснении основных физических особенностей, возникающих при распространении в неоднородной атмосфере волн малой амплитуды с узкой зоной возмущенного течения. Показывается, что нелинейные эффекты в первом приближении можно учесть, используя подход, аналогичный тому, который применялся Л. Д. Ландау [1]. В заключение рассматривается задача о взаимодействии двух ударных волн, когда одна из них нагоняет другую. Решение этой задачи для однородной атмосферы получено М. А. Цикулиным [9].

Следует отметить, что содержание работы, несмотря на некоторое формальное отличие, тесно связано с теорией коротких волн, развитой в статье С. А. Христиановича и автора [10].

§ 1. Геометрическая акустика. Исходная система уравнений газовой динамики имеет вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = g_i, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0, \qquad \frac{\partial s}{\partial t} + v_j \frac{\partial s}{\partial x_j} = 0 \qquad (1.1)$$

$$p = p(\rho,\ s)$$

Здесь v_i, g_i, p, ρ и s означают соответственно компоненты скорости потока и ускорения силы тяжести, давление, плотность и энтропию в точке с декартовыми координатами x_i в момент времени t. Используется обычная тензорная запись сумм по повторяющимся индексам i, j, которые принимают значения 1, 2, 3.

Уравнение, определяющее C_+-характеристики $\varphi(t, x_i) = 0$ исходной системы (1.1), имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + a\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2} = 0 \qquad \left(a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}\right) \qquad (1.2)$$

где a — скорость распространения звуковых волн. Если принять время t в качестве параметра, то можно рассматривать C_+-характеристики $\varphi(t, x_i) = 0$, являющиеся фиксированными гиперповерхностями в четырехмерном пространстве (t, x_i), как обычные движущиеся поверхности N_+ в физическом пространстве (x_i). Компоненты нормали n_i к этим поверхностям даются формулой

$$n_i = \frac{\partial \varphi / \partial x_i}{\sqrt{(\partial \varphi / \partial x_j)^2}}$$

Система уравнений газовой динамики, приведенная к C_+-характеристикам, принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (v_i + an_i)\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho a n_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho a (a\delta_{ij} + n_i v_j)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho a n_i g_i \qquad (1.3)$$

$$(\delta_{ij} = 0 \quad \text{при } i \neq j, \qquad \delta_{ij} = 1 \quad \text{при } i = j)$$

Уравнение (1.3) составляет основу дальнейшего исследования.

Следуя Келлеру [5], перейдем непосредственно к изучению движения слабых ударных волн в неоднородной среде. Будем считать, что в невозмущенном состоянии давление p_0, плотность ρ_0, скорость звука a_0 и компоненты скорости v_{0i} не изменяются со временем и заданы как функции координат x_i. В силу малости амплитуды ударной волны относительные изменения давления, плотности и скорости частиц газа на ее фронте малы. Положим поэтому

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad a = a_0 + a', \quad v_i = v_{0i} + v_i' \qquad (1.4)$$

Здесь p', ρ', a' и v_i' —избыточные давление, плотность, скорость звука и компоненты скорости частиц в зоне возмущенного течения. Поскольку безразмерные величины p'/p_0, ρ'/ρ_0, a'/a_0, v_i'/a_0 малы по сравнению с единицей, их квадратами в дальнейшем будем пренебрегать. Сделаем еще два предположения, весьма существенных для дальнейшего [6]. Именно, будем считать, что зона возмущенного движения газа является узкой, т. е. ее ширина λ_* много меньше радиуса кривизны ударного фронта R и расстояния H, на котором существенно меняются параметры среды в состоянии равновесия. Величинами λ_*/R и λ_*/H также будем в дальнейшем пренебрегать по сравнению с единицей. Будем считать еще, что в направлениях, касательных к фронту ударной волны, все избыточные величины меняются медленно (т. е. существенно на расстояниях порядка R и H).

В акустическом приближении скорость ударного фронта относительно частиц газа совпадает с невозмущенной скоростью звука, поэтому ударную волну можно отождествить с C_+-характеристической поверхностью, уравнение которой в результате отбрасывания малых величин имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_{0j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + a_0 \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2} = 0 \qquad (1.5)$$

Коэффициентами этого уравнения служат заданные функции координат v_{0j} и a_0, поэтому его решение может быть получено до интегрирования системы уравнений газовой динамики, и положение ударного фронта определяется независимо от решения всей задачи в целом.

Характеристические кривые (бихарактеристики) уравнения (1.5) являются траекториями элементов поверхности ударного фронта, или лучами, они определяются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = v_{0i} + a_0 n_i, \qquad \frac{dn_i}{dt} = (n_i n_j - \delta_{ij})\left(\frac{\partial a_0}{\partial x_j} + n_k \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_j}\right) \qquad (1.6)$$

На фронтах ударных волн малой амплитуды между возмущенными параметрами газа в первом приближении справедливы зависимости [11]:

$$\rho' = \frac{1}{a_0^2}p', \quad a' = \frac{m_0 - 1}{\rho_0 a_0}p', \quad v' = \frac{1}{\rho_0 a_0}p' \qquad (1.7)$$

$$\left(m_0 = \frac{1}{2\rho_0^3 a_0^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_0^2}\right)_s, \quad V = \frac{1}{\rho}, \quad v' = \sqrt{(v_i')^2}\right)$$

причем $v_i' = v'n_i$. Для идеального газа коэффициент m_0 равен $(\varkappa + 1)/2$, где $\varkappa$ — показатель адиабаты Пуассона. В рассматриваемом приближении ударные волны совпадают с характеристическими поверхностями, поэтому формулами (1.7) можно воспользоваться для исключения функций ρ', a' и v_i' из уравнения (1.3) после его линеаризации. В результате имеем

$$\frac{1}{p'}\frac{dp'}{dt} - \frac{1}{2\rho_0 a_0}\frac{d\rho_0 a_0}{dt} + \frac{1}{2}\left(a_0 \frac{\partial n_j}{\partial x_j} + k_0 \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_j} + n_i n_j \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j}\right) = 0 \qquad (1.8)$$

$$(k_0 = 2m_0 - 1)$$

Здесь

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v_{0j} + a_0 n_j)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

означает производную вдоль луча, определяемого системой (1.6). Для идеального газа коэффициент k_0 равен показателю адиабаты Пуассона $\varkappa$. Интегрируя уравнение (1.8), получим формулу Келлера, дающую закон изменения избыточного давления на фронте ударной волны [5]

$$p' = \frac{p_0'}{L}\sqrt{\frac{\rho_0 a_0}{\rho_{00} a_{00}}}, \qquad L = \exp\left[\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left(a_0 \frac{\partial n_j}{\partial x_j} + k_0 \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_j} + n_i n_j \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j}\right)dt\right] \qquad (1.9)$$

Здесь p_0', ρ_{00}, a_{00} означают избыточное давление на фронте ударной волны и равновесные плотность и скорость звука в начальный момент времени $t = t_0$, взятые в начальной точке луча.

Вывод формул (1.9) основан на возможности определения лучей до построения поля возмущенного течения. По существу он является повторением вывода известного соотношения, которое при переходе через характеристическую поверхность определяет закон изменения скачка выводящей производной решения уравнения в частных производных второго порядка, если следить за распространением скачка вдоль луча [12].

По предположению ширина зоны возмущенного течения λ_*, которую мы будем называть также длиной волны, мала по сравнению с характерными размерами R и H, а избыточные величины p', ρ', a' и v_i' существенно меняются в направлениях, касательных к ударному фронту, только на расстояниях того же порядка, что R и H. В работе [6] показано, что в таком случае формулы (1.7) и (1.9) остаются справедливыми во всем поле возмущенного течения, если под p_0' понимать избыточное давление, взятое в произвольной точке профиля при $t = t_0$. Подобные движения газа получили название коротких волн [10, 13].

Обозначим через λ длину волны в акустическом приближении. Выведем теперь закон изменения λ при движении волны вдоль луча. Пусть хвост волны, соответствующий нулевому избыточному давлению, движется вдоль луча в момент t со скоростью $q_0(l)$, где $q_0(l)$ — так называемая лучевая скорость, равная $\sqrt{(v_{0j} + a_0 n_j)^2}$, а l — длина луча. Фронт волны имеет тогда в момент t скорость

$$q_0(l + \lambda_l) = q_0(l) + \frac{1}{q_0}\frac{dq_0}{dt}\lambda_l$$

Здесь λ_l означает длину волны, измеренную вдоль луча. Длина волны λ является проекцией λ_l на нормаль к ударному фронту. Отсюда следует

$$\lambda = \lambda_l \frac{q_{0n}}{q_0} \qquad (q_{0n} = a_0 + v_{0j} n_j) \qquad (1.10)$$

Здесь q_{0n} — проекция лучевой скорости на нормаль к фронту волны.

Из сравнения скоростей распространения фронта и хвоста волны вдоль луча следует, что в геометрической акустике изменение λ_l определяется выражением

$$\frac{d\lambda_l}{dt} = \frac{\lambda_l}{q_0}\frac{dq_0}{dt}$$

Решая это уравнение, имеем

$$\frac{\lambda_l}{q_0} = \frac{\lambda_{0l}}{q_{00}} \tag{1.11}$$

Здесь λ_{0l} и q_{00} — значения λ_l и q_0 в момент времени $t = t_0$.

Учитывая (1.10), из (1.11) имеем [8]

$$\frac{\lambda}{q_{0n}} = \frac{\lambda_0}{q_{00n}} \tag{1.12}$$

Здесь λ_0 и q_{00n} — начальные значения длины волны λ и проекции лучевой скорости на нормаль к фронту волны q_{0n}.

Из формулы (1.12) следует, что длина волны изменяется уже в приближении геометрической акустики, если среда неоднородна. Этот факт, как будет показано в дальнейшем, имеет решающее значение для вывода законов затухания расходящихся ударных волн.

На протяжении длины волны λ_* скорость меняется мало, поэтому приближенно можно положить время τ, за которое волна пробегает по лучу через данную точку пространства, равным λ_l/q_0. Величину τ часто называют временем действия волны. Формулу (1.11) можно тогда переписать в виде

$$\tau = \tau_0 = \text{const} \tag{1.13}$$

Последнее равенство легко получить непосредственно. Действительно, пусть вся волна в целом двигалась некоторое время t. Тогда хвост волны придет в ту точку, где в момент t был ее фронт, за время $t + \tau$. С другой стороны, это же время складывается из времени пробега хвостом волны начальной ширины возмущенной области и общего времени движения всей волны, т. е. оно равно $\tau_0 + t$. Отсюда следует равенство (1.13).

§ 2. Распространение ударных волн в покоящейся среде. До сих пор мы рассматривали свойства ударных волн с точки зрения геометрической акустики. Однако для наших целей недостаточно линейное приближение. Воспользуемся приведенными в предыдущем параграфе результатами для того, чтобы выяснить свойства волн малой амплитуды во втором приближении.

Прежде всего отметим, что формулы (1.7), которые дают функциональные зависимости между величинами p', ρ', a' и v', соответствуют течениям типа простой волны [11]. Поэтому если мы имеем в неоднородной атмосфере расходящуюся волну с малой шириной области возмущенного движения, то в каждом небольшом участке ее можно рассматривать как плоскую волну Римана. Скорость U перемещения фазы профиля в римановской волне дается равенством [11]

$$U = v_0 + a_0 + m_0\frac{p'}{\rho_0 a_0} \tag{2.1}$$

При наличии разрывов решение Римана теряет силу, однако для волн малой амплитуды с точностью до членов второго порядка относительно p'/p_0 волна остается простой. Причина этого заключается в том, что отражением волны от поверхностей разрывов с рассматриваемой точностью можно пренебречь. Этот факт впервые был использован в [1] для нахождения асимптотических законов затухания ударных волн в однородных средах. Из сказанного следует, что при движении волны в неоднородной атмосфере ее отражение от поверхностей разрывов и от слоев с различными начальными параметрами также оказывается несущественным, если область возмущенного течения достаточно узка. Таким образом, течение в расходящейся волне локально может быть описано римановским решением, причем на разрыве будут выполнены надлежащие граничные условия.

Рассмотрим теперь одиночный одномерный звуковой импульс, движущийся в покоящемся газе, параметры которого изменяются только в направлении его распространения. Согласно равенству (2.1) с течением времени точки сжатия выдвигаются вперед, точки с меньшим избыточным давлением оказываются отставшими. В решении появляется неоднозначность, которая устраняется введением поверхности разрыва. Его положение определяется простым геометрическим условием, которое гласит, что площадь, заключенная под кривой, изображающей профиль волны, остается такой же, как для неоднозначной кривой, определяемой римановским решением [1]. Это условие является прямым следствием сохранения массы вещества, вовлеченной в движение волной.

Чтобы проследить при помощи формулы (2.1) за искажением профиля волны на протяжении промежутков времени, значительно превышающих τ, необходимо учесть тот факт, что уже в первом приближении амплитуда ударной волны изменяется согласно равенству (1.9). В рассматриваемом случае лучи представляют собой параллельные прямые, и $L = 1$. Тем не менее скорость распространения каждой данной точки профиля даже в акустическом приближении не остается постоянной, как это было при движении волны в однородной среде.

Будем считать для простоты, что все избыточные величины в звуковом импульсе с ударной волной имеют треугольные профили. Пусть в момент времени t_0 профиль одной из них (например, давления) изображается треугольником ABC (фиг. 1a). Перемещая точки этого профиля со скоростями (2.1), где избыточное давление p' дается формулой (1.9), мы получим в момент t профиль вида $A'B'C'$ (фиг. 1b). Выведем уравнение согласно которому меняется расстояние l', разделяющее точки A' и B'. Как и в рассмотренной выше теории первого приближения точка A' движется со скоростью $q_0(l)$, причем в данном случае величина $q_0(l)$ равна просто скорости звука a_0.

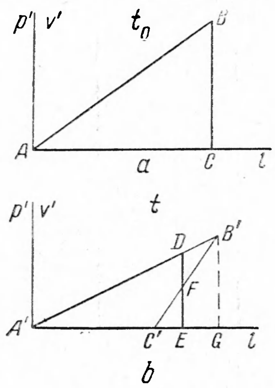
Скорость точки B' дается выражением

$$q_0(l + l') + m_0 \frac{p'}{\rho_0 a_0} = a_0(l) + \frac{1}{a_0}\frac{da_0}{dt} l' + m_0 \frac{p'}{\rho_0 a_0}$$

$$\left(p' = p_0' \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_{00}} \frac{a_0}{a_{00}}}\right)$$

Отсюда имеем искомое уравнение, которое является по существу дифференциальным уравнением луча в следующем за геометрической акустикой приближении

$$\frac{dl'}{dt} = \frac{l'}{a_0}\frac{da_0}{dt} + m_0 \frac{p'}{\rho_0 a_0} \tag{2.2}$$



Фиг. 1

Его решение, как известно, можно представить в следующем виде:

$$l' = \lambda + a_0 \int_{t_0}^{t} \frac{m_0 p'}{\rho_0 a_0^2} dt \qquad \left(\lambda = \lambda_0 \frac{a_0}{a_{00}}\right) \tag{2.3}$$

Формулы (2.2) и (2.3) показывают, что при распространении ударных волн в неоднородной атмосфере происходит своеобразное наложение акустического эффекта изменения длины волны при прохождении через слои с различными скоростями звука на явление, обусловленное эффектом более высокого порядка по амплитуде. На движение точки B', первоначально опередившей точку C' из-за того, что ей соответствовало более высокое давление, начинает оказывать влияние также тот факт, что она проходит через слои, в которых в одинаковые моменты времени невозмущенные скорости звука отличны от соответствующих точке C'. Оба эффекта нельзя просто суммировать, что является следствием нелинейности исходной системы уравнений газовой динамики. Только в частном случае изотермической атмосферы производная da_0/dt в уравнении (2.2) равна нулю. В геометрической акустике точки B' и C' совпадают одна с другой и $l' = \lambda$.

Отметим, что при вычислении времени, за которое волна проходит через данную точку пространства, учет влияния избыточного давления может быть произведен точно так же, как и в случае однородной или изотермической среды. Это объясняется тем, что время действия волны τ в геометрической акустике остается, согласно равенству (1.13), неизменным за весь период движения волны.

Как уже указывалось выше, разрыв в действительности переходит в некоторую точку E, и истинный профиль будет не $A'B'C'$, а $A'DE$. Площади $DB'F$ и $C'FE$ должны быть равны одна другой, поэтому площадь профиля $A'B'C'$ оказывается равной площади $A'DE$ [1]. Воспользуемся этим условием для вывода законов затухания ударной волны. Из подобия треугольников $A'DE$ и $A'B'G$ имеем

$$\frac{p_*'}{p'} = \lambda_*\left(\lambda + a_0\int\limits_{t_0}^{t} \frac{m_0 p'}{\rho_0 a_0^2}\,dt\right)^{-1} \tag{2.4}$$

Здесь p_*' и λ_* — давление на ударном фронте и длина волны $A'E$ в следующем за геометрической акустикой приближении. Отсюда, используя условие равенства площадей треугольников $A'B'C'$ и $A'DE$ и переходя в интегралах от переменной t к переменной l, получим

$$\lambda_* = \lambda_0\frac{a_0}{a_{00}}\left(1 + \frac{p_0'}{\lambda_0}\sqrt{\frac{a_{00}}{\rho_{00}}}\int\limits_{l_0}^{l}\frac{m_0\,dl}{\rho_0^{1/2}a_0^{5/2}}\right)^{1/2} \tag{2.5}$$

Теперь из (2.4), учитывая (1.9) и (2.5), имеем

$$p_*' = p_0'\sqrt{\frac{\rho_0 a_0}{\rho_{00}a_{00}}}\left(1 + \frac{p_0'}{\lambda_0}\sqrt{\frac{a_{00}}{\rho_{00}}}\int\limits_{l_0}^{l}\frac{m_0\,dl}{\rho_0^{1/2}a_0^{5/2}}\right)^{-1/2} \tag{2.6}$$

Если среда однородна, то $\rho_0 = \rho_{00}$ и $a_0 = a_{00}$ и формулы (2.5) и (2.6) переходят в решение Крюссара [11]

$$\lambda_* = \lambda_0\left(1 + \frac{l - l_0}{\lambda_0}\,\frac{m_0 p_0'}{\rho_0 a_0^2}\right)^{1/2}$$

$$p_*' = p_0'\left(1 + \frac{l - l_0}{\lambda_0}\,\frac{m_0 p_0'}{\rho_0 a_0^2}\right)^{-1/2}$$

Рассмотрим теперь расходящуюся волну произвольной формы, которая распространяется в неоднородной покоящейся атмосфере. Лучи, определяемые уравнениями (1.6), являются в общем случае пространственными кривыми, направление которых в каждой точке совпадает с направлением нормали к фронту волны. Направление нормали к ударному фронту, вычисленное с учетом влияния избыточного давления p_*', мало отличается от направления луча, поэтому в дальнейшем эти направления будем отождествлять. Повторяя без изменения приведенные выше рассуждения, получим

$$\lambda_* = \lambda_0 \frac{a_0}{a_{00}} \Big(1 + \frac{p_0'}{\lambda_0} \sqrt{\frac{a_{00}}{\rho_{00}}} \int\limits_{l_0}^{l} \frac{m_0 dl}{\rho_0^{1/2} a_0^{5/2} L} \Big)^{1/2} \tag{2.7}$$

$$p_*' = \frac{p_0'}{L} \sqrt{\frac{\rho_0 a_0}{\rho_{00} a_{00}}} \Big(1 + \frac{p_0'}{\lambda_0} \sqrt{\frac{a_{00}}{\rho_{00}}} \int\limits_{l_0}^{l} \frac{m_0 dl}{\rho_0^{1/2} a_0^{5/2} L} \Big)^{-1/2} \tag{2.8}$$

Здесь все интегралы берутся вдоль лучей (1.6), а

$$L = \exp\Big(\frac{1}{2} \int\limits_{l_0}^{l} \frac{\partial n_j}{\partial x_j} dl \Big) \tag{2.9}$$

Легко показать, что формулу (2.9) можно представить в виде [5]

$$L = \sqrt{f / f_0} \tag{2.10}$$

где f — площадь поперечного сечения так называемой элементарной лучевой трубки, образующими которой служат лучи (1.6). Если волна распространяется в однородной среде, то для движений с цилиндрической симметрией $L = \sqrt{r / r_0}$, для сферически симметричных движений $L = r/r_0$, где r — расстояние соответственно от оси или центра симметрии. Используя эти равенства, легко получить асимптотические законы затухания ударных волн в однородной среде, которые впервые были найдены Л. Д. Ландау [1]. Для цилиндрических волн имеем

$$\lambda_* = \lambda_0 \left[1 + \frac{2p_0'}{\lambda_0} m_0 \frac{\sqrt{r_0} (\sqrt{r} - \sqrt{r_0})}{\rho_0 a_0^2} \right]^{1/2}$$

$$p_*' = p_0' \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{2p_0'}{\lambda_0} m_0 \frac{\sqrt{r_0} (\sqrt{r} - \sqrt{r_0})}{\rho_0 a_0^2} \right]^{-1/2}$$

Для сферических волн получим аналогично

$$\lambda_* = \lambda_0 \Big(1 + \frac{p_0'}{\lambda_0} m_0 \frac{r_0}{\rho_0 a_0^2} \ln \frac{r}{r_0} \Big)^{1/2}$$

$$p'_* = p_0' \frac{r_0}{r} \Big(1 + \frac{p_0'}{\lambda_0} m_0 \frac{r_0}{\rho_0 a_0^2} \ln \frac{r}{r_0} \Big)^{-1/2}$$

§ 3. Распространение ударных волн в движущейся среде. Рассмотрим теперь ударную волну, распространяющуюся в неоднородной движущейся среде. В этом случае направление лучей не совпадает с направлением нормалей к ударному фронту, причем последнее мы будем совмещать с соответствующим направлением, вычисленным в акустическом приближении. Вносимая при этом ошибка будет мала из-за малости избыточного давления в зоне возмущенного течения.

Для вычисления скоростей движения волны в направлении нормали к ее фронту можно использовать формулы, полученные в предыдущем параграфе [1]. Точка A' перемещается в направлении нормали к фронту волны со скоростью $q_{0n}(l)$. Соответствующая скорость распространения точки B', находящейся вдоль луча на расстоянии l' от точки A', дается выражением

$$q_{0n}(l + l') + m_0 \frac{p'}{\rho_0 a_0} = q_{0n}(l) + \frac{dq_{0n}}{dt} \frac{l'}{q_0} + m_0 \frac{p'}{\rho_0 a_0}$$

$$\Big(p' = \frac{p_0'}{L} \sqrt{\frac{\rho_0 a_0}{\rho_{00} a_{00}}} \Big)$$

[1] В движущейся среде при вычислении скоростей распространения точек профиля волны, как было замечено К. Е. Губкиным, необходимо исходить не из величины лучевой скорости, а из ее проекции на нормаль к фронту волны.

Отсюда имеем уравнение, согласно которому меняется проекция l_n' величины l' на нормаль к ударному фронту

$$\frac{dl_n'}{dt} = \frac{l_n'}{q_{0n}}\frac{dq_{0n}}{dt} + m_0\frac{p'}{\rho_0 a_0} \qquad (3.1)$$

Решение его имеет вид

$$l_n' = \lambda + q_{0n}\int_{t_0}^{t}\frac{m_0 p'}{\rho_0 a_0 q_{0n}}dt \qquad \left(\lambda = \lambda_0\frac{q_{0n}}{q_{00n}}\right) \qquad (3.2)$$

Уравнение (3.1) можно рассматривать как дифференциальное уравнение луча в общей задаче о распространении слабых ударных волн в неоднородной движущейся среде в следующем за геометрической акустикой приближении.

Дальнейшие рассуждения не отличаются от приведенных в предыдущем параграфе. В результате имеем, переходя при вычислении интегралов от переменной t к переменной l

$$\lambda_* = \lambda_0\frac{q_{0n}}{q_{00n}}\left(1 + \frac{p_0' q_{00n}}{\lambda_0\sqrt{\rho_{00}a_{00}}}\int_{l_0}^{l}\frac{m_0 dl}{q_0 q_{0n}L\sqrt{\rho_0 a_0}}\right)^{1/2} \qquad (3.3)$$

$$p_*' = p_0'\frac{1}{L}\sqrt{\frac{\rho_0 a_0}{\rho_{00}a_{00}}}\left(1 + \frac{p_0' q_{00n}}{\lambda_0\sqrt{\rho_{00}a_{00}}}\int_{l_0}^{l}\frac{m_0 dl}{q_0 q_{0n}L\sqrt{\rho_0 a_0}}\right)^{-1/2} \qquad (3.4)$$

Если в невозмущенном состоянии частицы среды неподвижны ($v_{0i} = 0$), то формулы (3.3) и (3.4) переходят в формулы (2.7) и (2.8), приведенные в предыдущем параграфе [1].

Законы затухания ударных волн в неоднородных средах можно вывести еще следующим образом. Из изложенного выше следует, что решение, описывающее распространение коротких волн в неоднородной среде, можно представить в виде

$$l = \int_{t_0}^{t} q_0 dt + \frac{\alpha}{\alpha_0}\frac{\lambda_{0l}}{q_{00}}q_0 + \frac{\alpha}{\alpha_0}q_0\int_{t_0}^{t}\frac{m_0 p'}{\rho_0 a_0 q_{0n}}dt \qquad \left(\alpha = \frac{p_\times'}{\sqrt{\rho_{00}a_{00}}}\right) \qquad (3.5)$$

Здесь и ниже значение q_0 берется в точке A', p' — в точке B', $p_\times'$ — в произвольной точке профиля при $t = t_0$ и α_0 — на ударном фронте при $t = t_0$. Подчеркнем еще раз, что решение (3.5) нельзя получить простым суммированием чисто акустического эффекта, приводящего к изменению длины волны при движении через слои с различными невозмущенными параметрами, с эффектом искажения ее профиля, обусловленным влиянием избыточного давления.

Вдоль пути, по которому движется ударный фронт, выполняется соотношение

$$\frac{dl}{dt} = q_0 + \frac{\alpha}{\alpha_0}\frac{\lambda_{0l}}{q_{00}}\frac{dq_0}{dt} + \frac{\lambda_{0l}q_0}{\alpha_0 q_{00}}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\alpha}{\alpha_0}m_0\frac{p' q_0}{\rho_0 a_0 q_{0n}} +$$

$$+ \frac{q_0}{\alpha_0}\frac{d\alpha}{dt}\int_{t_0}^{t}\frac{m_0 p'}{\rho_0 a_0 q_{0n}}dt + \frac{\alpha}{\alpha_0}\frac{dq_0}{dt}\int_{t_0}^{t}\frac{m_0 p'}{\rho_0 a_0 q_{0n}}dt \qquad (3.6)$$

С другой стороны, скорость ударного фронта N дается равенством [11]

$$N = q_{0n}(l + l') + \frac{1}{2}m_0\frac{\alpha}{\alpha_0}\frac{p'}{\rho_0 a_0}$$

[1] ...й вывод формул (2.8) и (3.4) ранее был сообщен автору К. Е. Губкиным.

Отсюда для производной dl/dt имеем выражение

$$\frac{dl}{dt} = q_0 + \frac{\alpha}{\alpha_0}\frac{\lambda_{0l}}{q_{00}}\frac{dq_0}{dt} + \frac{\alpha}{\alpha_0}\frac{dq_0}{dt}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{m_0\,p'}{\rho_0 a_0 q_{0n}}\,dt + \frac{1}{2}\,m_0\frac{\alpha}{\alpha_0}\frac{p' q_0}{\rho_0 a_0 q_{0n}} \tag{3.7}$$

Приравнивая соотношения (3.6) и (3.7), получим уравнение, которое определяет закон изменения величины α на ударном фронте

$$\frac{\lambda_{0l}}{q_{00}}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{1}{2}\,m_0\,\alpha\,\frac{p'}{\rho_0 a_0 q_{0n}} + \frac{d\alpha}{dt}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{m_0\,p'}{\rho_0 a_0 q_{0n}}\,dt = 0 \tag{3.8}$$

Интегрируя уравнение (3.8), находим

$$\alpha = \alpha_0\left(1 + \frac{q_{00}}{\lambda_{0l}}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{m_0\,p'}{\rho_0 a_0 q_{0n}}\,dt\right)^{-1/2} \tag{3.9}$$

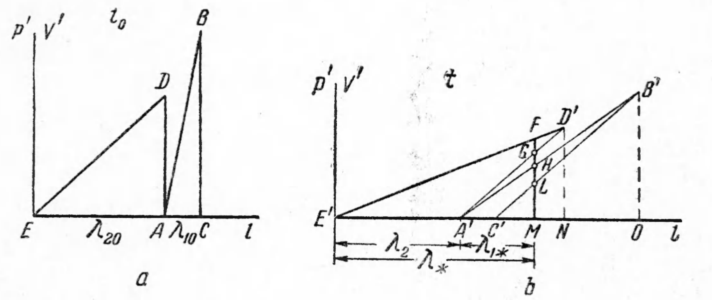
Переходя в последнем равенстве от переменной t к переменной l и вспоминая выражения для α, α_0 и λ_{0l}, легко убедиться, что оно совпадает с равенством (3.4).

Отметим в заключение, что при движении ударной волны в неоднородной атмосфере должно выполняться условие [6]

$$R, H \gg \lambda_* = \lambda_0\,\frac{q_{0n}}{q_{00n}}\left(1 + \frac{p_0' q_{00n}}{\lambda_0\sqrt{\rho_{00} a_{00}}}\int\limits_{l_0}^{l}\frac{m_0\,dl}{q_0 q_{0n} L\sqrt{\rho_0 a_0}}\right)^{1/2} \tag{3.10}$$

которое может ограничивать пределы применимости решения (3.3) и (3.4) при $l \to \infty$. В случае, когда $H \gg \lambda_*$ вдоль всего пути, проходимого волной, формулы (3.3) и (3.4) имеют асимптотический характер.

§ 4. Взаимодействие двух ударных волн, догоняющих одна другую. Рассмотрим две волны с треугольным профилем давления (фиг. 2*a*). Будем считать, что конфигурация лучей для этих волн одна и та же. Так будет, например, в случае, если обе волны порождаются одним и тем же



Фиг. 2

источником. Рассматриваемая задача ничем по существу не отличается от задачи распространения одиночного звукового импульса. Зоны возмущенного течения, следующие за обоими ударными фронтами, описываются по-прежнему римановским решением, в котором параметры газа связаны между собой зависимостями (1.7) и (1.9). Поэтому для нахождения законов затухания первой и второй ударных волн можно применить изложенные выше соображения.

Пусть λ_{10}, λ_{20}, p_{10}', p_{20}', v_{10}' и v_{20}' означают соответственно длины первой и второй волн, избыточное давление и возмущенные скорости частиц на ударных фронтах этих волн в начальный момент времени t_0. Будем считать, что избыточное давление в точке C при $t = t_0$ равно нулю. В соответствии с ранее полученными результатами найдем параметры волны на луче l в момент t, когда произошло слияние фронтов первой и второй волн.

Из условия равенства площадей треугольников $C'LM$ и $B'HL$, $A'GH$ и $D'FG$ и из подобия треугольников $E'D'N$ и $E'FM$ (фиг. 2b) следует

$$\lambda_* v_*' = \lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2', \qquad \frac{v_*'}{v_2'} = \frac{\lambda_*}{l_{2n}'} \tag{4.1}$$

Здесь λ_* и v_*' — общая длина волны и скорость частиц на ударном фронте в момент догона t, l_{2n}'—расстояние $E'N$, λ_1 и λ_2, v_1' и v_2'—соответственно длины первой и второй волн и возмущенные скорости частиц на их фронтах в момент времени t в приближении геометрической акустики. Согласно (1.7), (1.9) и (1.12) имеем

$$v_1' = \frac{v_{10}'}{L}\sqrt{\frac{a_{00}\rho_{00}}{a_0\rho_0}}, \quad v_2' = \frac{v_{20}'}{L}\sqrt{\frac{a_{00}\rho_{00}}{a_0\rho_0}}, \quad \lambda_1 = \lambda_{10}\frac{q_{0n}}{q_{00n}}, \quad \lambda_2 = \lambda_{20}\frac{q_{0n}}{q_{00n}} \tag{4.2}$$

где L определяется из (1.9).

Обозначим через λ_{1*} длину, которую имела бы первая волна в момент t, если бы вторая волна вообще отсутствовала, а через v_{1*}' — скорость частиц на ее фронте. Очевидно

$$\lambda_* = \lambda_{1*} + \lambda_2 \tag{4.3}$$

Величины v_{1*}', λ_{1*}, λ_* и l_{2n}' определяются соотношениями (1.7), (3.2), (3.3), (3.4) и (4.3). Используя обозначения

$$\frac{v_{20}'}{v_{10}'} = k, \qquad \frac{\lambda_{20}}{\lambda_{10}} = m \tag{4.4}$$

$$\sigma = \frac{v_{10} q_{00n}\sqrt{a_{00}\rho_{00}}}{\lambda_{10}} \int_{l_0}^{l} \frac{m_0\, dl}{q_0 q_{0n} L \sqrt{\rho_0 a_0}} \tag{4.5}$$

их можно записать в виде

$$\begin{gathered} v_{1*}' = \frac{v_{10}'}{L}\sqrt{\frac{\rho_{00}a_{00}}{\rho_0 a_0}}(1+\sigma)^{-1/2}, \qquad \lambda_{1*} = \lambda_{10}\frac{q_{0n}}{q_{00n}}\sqrt{1+\sigma} \\ \lambda_* = \lambda_{10}\frac{q_{0n}}{q_{00n}}[\sqrt{1+\sigma}+m], \qquad l_{1n}' = \lambda_{10}\frac{q_{0n}}{q_{00n}}[1+k\sigma] \end{gathered} \tag{4.6}$$

Приравнивая выражения v_*'/v_2', которые вычисляются по равенствам (4.1), и учитывая (4.3)—(4.6), после небольших преобразований получаем следующее уравнение для определения параметра σ

$$k^2\sigma^2 - 2\sigma\left(1+\frac{k}{m}\right) - \left(4+\frac{2}{mk}-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{m^2}\right) = 0$$

Отсюда

$$\sigma = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{mk} + \frac{2}{k}\sqrt{1+\frac{1}{mk}} \tag{4.7}$$

(второй корень не имеет физического смысла).

Определим возрастание амплитуды давления p_*' на фронте ударной волны в момент догона t.

Учитывая, что в рассматриваемом приближении $p_*'/p_{1*}' = v_*'/v_{1*}'$, из (4.1) и (4.2) имеем

$$\frac{p_*'}{p_{1*}'} = \frac{1+mk}{1+m/\sqrt{1+\sigma}} \tag{4.8}$$

Подставляя вместо σ его выражение (4.7), получим

$$\frac{p_*'}{p_{1*}'} = \frac{1+mk}{1+mk/(1+\sqrt{k^2+k/m})}$$

или

$$\frac{p_*'}{p_{1*}'} = \sqrt{1+km}\,\frac{1+\sqrt{(k/m)(1+km)}}{\sqrt{k/m}+\sqrt{1+km}} \tag{4.9}$$

При $m = k$ (случай, когда начальные профили первой и второй волн подобны)

$$\frac{p_*'}{p_{1*}'} = \sqrt{1+k^2} \tag{4.10}$$

Если $m=k=1$ (начальные профили волн одинаковы), то $p_*'/p_{1*}' = \sqrt{2}$. Используя формулы для v_*', v_{1*}', λ_* и λ_{1*}, соответствующие моменту догона i, легко получить асимптотическое выражение для коэффициента возрастания амплитуды волны p_*'/p_{1_*}. Из (4.6) и (4.8) имеем

$$\frac{p_{*\to}'}{p_{1*\to}'} = \sqrt{\frac{p_*'\lambda_*}{p_{*1}'\lambda_{1*}}} = \sqrt{1+mk}$$

Индексом $\to$ отмечена асимптотическая величина. Учитывая, что $mk = I_{20}/I_{10}$, где I — импульс волны, получим

$$\frac{p_*'{}_\to}{p_{1*}'{}_\to} = \sqrt{\frac{I_{10}+I_{20}}{I_{10}}} \tag{4.11}$$

Напомним, что формула (4.11) имеет место лишь в случае, если в течение всего времени движения волны вдоль луча l выполняется условие (3.10).

Формулы (4.10) и (4.11) для случая однородной неподвижной среды иным путем были получены М. А. Цикулиным [9].

Интересно, что формулы (4.9) и (4.11) справедливы как для однородной, так и для неоднородной движущейся среды для волн произвольной формы. Моменты же догона (или координаты вдоль луча, в которых происходит слияние фронтов) будут в этих случаях разными и будут определяться формулой (4.5).

Автор признателен С. А. Христиановичу за беседы по различным вопросам теории коротких волн и обсуждение результатов настоящей работы.

Поступила 16 III 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, 1945, т. IX, вып. 4.
2. Христианович С. А. Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва. ПММ, 1956, т. XX, вып. 5.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. ГИТТЛ, М., 1954.
4. Whitham G. B. The propagation of spherical blast. Proc. Roy. Soc., 1950, Ser. A, vol. 203, № 1075.
5. Keller J. B. Geometrical Acoustics. I. The Theory of Weak Shock Waves. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, № 8.
6. Губкин К. Е. Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
7. Otterman I. Finite-Amplitude Propagation Effect on Shock-Wave Travel Times from Explosions at High Altitudes. J. Acoust. Soc. Amer., 1959, vol. 31, № 4.
8. Полянский О. Ю. О затухании ударных волн в движущейся среде с переменными плотностью и температурой. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
9. Цикулин М. А. О догоне одного треугольного профиля давления другим в асимптотике ударных волн. ПМТФ, 1960, № 2.
10. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 5.
11. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. ИИЛ, М., 1950.
12. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. II, ГИТТЛ, М.— Л., 1951.
13. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.