10. **Уилкинс М. Л.** Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике.— М.: Мир, 1967.
11. **Боли Б., Уэйнер А. Д.** Теория температурных напряжений.— М.: Мир, 1964.
12. **Нейман Дж., Рихтмайер Р.** Метод численного расчета гидродинамических скачков // Механика: Сб. пер.— М., 1951.— № 1.

г. Калининград *Поступила 10/V 1990 г., в окончательном варианте — 11/IX 1990 г.*

УДК 621.039.61

В. П. Бушланов

ВЕРОЯТНОСТЬ ОБРАЗОВАНИЯ ПОКРЫТИЯ ИЗ ТЕРМИЧЕСКИ АКТИВНЫХ ЧАСТИЦ

Прочность покрытия можно увеличить, если напыление вести таким образом, чтобы наносимые частицы ложились на еще не остывшие (термически активные) частицы предыдущего слоя [1]. Вероятностные условия образования покрытия из термически активных частиц рассчитаны в [2] в приближении, что N ранее упавших частиц не соприкасаются друг с другом.

В данной работе проведено вычисление вероятности P_0 во всем интервале значений расхода порошка G (кг/с). Показано, что P_0 линейно выражается через пористость покрытия и зависит от единственного безразмерного параметра $E_0^2 = NR^2/\rho^2$ (R — радиус диска прилипшей частицы, ρ — радиус пятна напыления).

1. При плазменном напылении стремятся использовать частицы близких размеров. Радиусы R_0 сферических частиц, равных по объему напыляемым, лежат в пределах 10—100 мкм, а $\rho \sim 10^{-2}$ м, поэтому $R_0^2/\rho^2 \sim \sim 10^{-6} - 10^{-4}$. Будем считать, как и в [2], что покрытие формируется из дисков радиуса R и высотой h таких, что

$$4\pi R_0^3/3 = \pi R^2 h, \quad E^2 = R^2/\rho^2 \ll 1. \tag{1.1}$$

Пусть $p(x, y)$— плотность распределения вероятности попадания центра масс напыляемой частицы в точку подложки с координатами (x, y). Полная вероятность взаимодействия с предыдущими N частицами, не потерявшими термическую активность, имеет вид [2]

$$P(N) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int d\xi_1\, d\eta_1 \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int d\xi_N\, d\eta_N \prod_{i=1}^{N} p(\xi_i, \eta_i) \times \\ \times \iint\limits_{Q(\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_N, \eta_N)} p(x, y)\, dx\, dy. \tag{1.2}$$

Здесь $\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_N, \eta_N$ — координаты центров N дисков радиусами R, находящихся на подложке в термически активном состоянии; Q — область подложки, занятая N дисками.

Ниже предложен эффективный метод, который позволил конкретизировать вид области Q и вычислить (1.2). Введем кусочно-постоянные функции E_i и Σ: $E_i(x, y) = 1$, если $(x, y) \in C_R(\xi_i, \eta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, где $C_R(\xi_i, \eta_i)$— круг радиуса R с центром (ξ_i, η_i), и $E_i = 0$ вне этого круга, $\Sigma(x, y) = 1 - \prod\limits_{k=1}^{N}(1 - E_k)$. Видно, что $\Sigma = 1$ внутри Q и $\Sigma = 0$ вне Q. Перепишем (1.2) с помощью Σ:

$$P(N) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int d\xi_1\, d\eta_1 \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int d\xi_N\, d\eta_N \prod_{i=1}^{N} p(\xi_i, \eta_i) \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \Sigma p(x, y)\, dx\, dy. \tag{1.3}$$

Изменяя в (1.3) порядок интегрирования, получим

$$P(N) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int p(x, y)\,[1 - I(x, y)]^N\, dx\, dy; \tag{1.4}$$

$$(1.5)\qquad I(x,y)=\int\int_{-\infty}^{\infty} E_i p(\xi_i,\eta_i)\,d\xi_i\,d\eta_i=\int\int_{C_R(x,y)} p(\xi_i,\eta_i)\,d\xi_i\,d\eta_i.$$

2. Так как $p(x, y) < 1$, то из (1.5) $I(x, y) < \pi\rho^2E^2$. Из (1.1), (1.4) с высокой точностью находим

$$(2.1)\qquad P(N)=\int\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\exp\left(-IE_0^2/E^2\right)dx\,dy,\ E_0^2=E^2N.$$

Вычислим $P(N)$ для случая, когда вероятность попадания частицы в пятно напыления одинакова для всех (x, y). Из (1.4), (1.5), (2.1) имеем

$$(2.2)\qquad I=E^2,\ P(N)=1-(1-E^2)^N\cong 1-\exp\left(-E_0^2\right)=P_0\left(E_0^2\right).$$

Возьмем теперь из [2] $p(x, y) = p_0(x, y) = \exp -[(x^2+y^2)/\rho^2]/(\pi\rho^2)$. Из (1.4) получим

$$(2.3)\qquad P(N)=\sum_{j=1}^{N}P_j,\ P_j=(-1)^{j+1}J_jN!/(j!\,(N-j)!),\ J_j=$$

$$=\int\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,I^j(x,y)\,dx\,dy.$$

Вычислим точное значение P_1. Заметим, что P_1 совпадает с аналогичной величиной, полученной в [2] приближенно. Сделаем в (1.5) замену переменных интегрирования:

$$(2.4)\qquad \xi=\xi_i-x,\ \eta=\eta_i-y;\ x=r_1\cos\theta,\ y=r_1\sin\theta;$$

$$\xi=r\cos\theta,\ \eta=r\sin\theta;\ \varepsilon_1=r_1/\rho,\ \varepsilon=r/\rho.$$

Из (1.5), (2.4) находим

$$(2.5)\qquad I(x,y)=I_1(E,\varepsilon_1)=\exp\left(-\varepsilon_1^2\right)\int_0^{E} I_0(-2\varepsilon\varepsilon_1)\exp(-\varepsilon^2)\,d\varepsilon^2,$$

$$I_0(-2\varepsilon\varepsilon_1)=\int_0^{2\pi}\exp(-2\varepsilon\varepsilon_1\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Из (2.5) видно, что I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, поэтому

$$(2.6)\qquad I_0(-2\varepsilon\varepsilon_1)=\sum_{k=0}^{\infty}(\varepsilon\varepsilon_1)^{2k}/(k!)^2.$$

Из (2.3), (2.5), (2.6), используя формулу разложения $\exp(E^2)$ в ряд, имеем

$$(2.7)\qquad P_1/N=1-\exp(-E^2/2).$$

Из (2.7) с точностью до членов порядка $O(E^4)$ получим

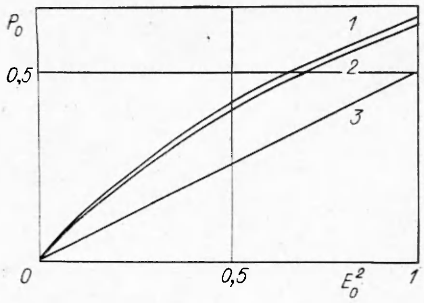
$$(2.8)\qquad P_1=E_0^2/2.$$

Частицы, вылетающие за пятно напыления, отскакивают от подложки, поэтому вместо $p_0(x, y)$ целесообразно взять $p(x, y)$, отличную от нуля только в пятне напыления, т. е. $p(x, y) = E^2p_0(x, y)/\langle p_0(x, y)\rangle = p_0(x, y)/(\pi\rho^2(1-1/e))$, если $(x, y)\in C_\rho(0, 0)$. При этом вместо G нужно взять βG (β — коэффициент использования порошка). В данном случае $\varepsilon_1\leqslant 1$ и из (2.1), (2.5) с точностью до членов порядка $O\left(E_0^2E^2\right)$ находим

$$(2.9)\qquad P(N)=1-\left(1-\exp\left(-E_0^2\right)\right)\exp\left(-E_0^2/(e-1)\right)/E_0^2.$$

3. Определим интервал изменения E_0^2 при обычных условиях напыления [1]. Пусть t_a — время термической активности напыленной частицы, тогда

$$(3.1)\qquad \beta Gt_a=4\pi R_0^3\gamma N/3,$$



где γ — плотность; N — число частиц, прилипших к подложке за время t_a. Согласно (2.1), $E_0^2 \sim 10^{-2}$. Когда $P(N) \sim$ ~ 1, на подложке должен лежать слой напыленного вещества толщиной h, поэтому $\beta G t_a \sim \pi\rho^2 h\gamma$ и $E_0^2 \sim 1$. Из сказанного следует, что при напылении параметр E_0^2 изменяется от величин, много меньших единицы (которым соответствуют маленькие значения $P(N)$), до величин порядка единицы (которым отвечают $P(N) \sim 1$).

Представляется интересным вычислить E_0^2 через значения h и t_a, приведенные в [1], а именно, полагая в [1]

$$h = 2R_0 - t_a(1 - \mu)v,\ t_a = h^2/(4\alpha^2 a_1). \tag{3.2}$$

Здесь v — скорость капли в момент удара; μ — коэффициент, характеризующий жесткость частицы и зависящий от скорости соударения и материала частиц; a_1 — коэффициент температуропроводности материала частиц; $\alpha_1 \leqslant 1$ — безразмерный параметр. Из (2.1), (3.1), (3.2) следует

$$E_0^2 = \frac{\beta G}{\pi\gamma\rho^2}\left[-\frac{1}{2(1-\mu)v} + \sqrt{\frac{1}{(1-\mu)^2 v^2} + \frac{R_0}{2\alpha^2 a_1 (1-\mu) v}}\right]. \tag{3.3}$$

4. Вычислена вероятность $P_0(E_0^2)$ взаимодействия напыляемых частиц в период их тепловой активности в виде (2.9) для реальной функции $p(x, y)$ с точностью до членов порядка $O(E_0^2 E^2)$; P_0 зависит от единственного параметра E_0^2, который для плазменного напыления изменяется от нуля до единицы. Так как $\partial P_0/\partial E_0^2 > 0$, то для повышения вероятности P_0 необходимо увеличивать E_0^2. В качестве примера того, от каких параметров напыления может зависеть E_0^2, получена зависимость (3.3) на основе выражений (3.2), взятых из [1].

На рисунке приведены зависимости $P_0(E_0^2)$: линия *1* — (2.9), *2* — (2.2), *3* — (2.8). Кривые *1* и *2* близки, несмотря на существенно различные функции плотностей вероятностей. На основании графиков *1* и *2*, а также (2.1) можно предположить, что зависимости $P_0(E_0^2)$ не будут слишком отличаться друг от друга для различных реальных функций плотностей вероятностей, как это имеет место на рисунке. Отметим также, что если бы даже величина P_1 в [2] была вычислена точно, как это сделано в данной работе, тем не менее она бы значительно отличалась от реальных величин P_0 (см. рисунок). Это, конечно, связано с тем, что для $P_0 \sim$ ~ 1 в [2] несправедливо предположение о несоприкосновении N термически активных частиц.

Покажем, как (2.9) может быть использовано для выбора оптимальных условий процесса нанесения покрытия, когда напыление ведется на термически активные частицы. Из определения $P(N)$ имеем

$$P(N) = 1 - \varepsilon_N. \tag{4.1}$$

Здесь ε_N — относительная площадь пятна напыления, не занятая N дисками, или, другими словами, поверхностная пористость на подложке в случае напыления на нее N дисков. Для того чтобы напыление велось на термически активные частицы, необходимо $N > S$, где S находится из уравнения (4.1) при $N = S$, а ε_S — реальная поверхностная пористость покрытия на подложке. Так как $P(N)$ — монотонно возрастающая функция аргумента N, то, для того чтобы $N > S$, необходимо

$$P(N) = 1 - \varepsilon_N = P_0(E_0^2) > P(S) = 1 - \varepsilon_S. \tag{4.2}$$

Подставляя (2.9) в (4.2), получим условие оптимальности процесса нанесения покрытия:

$$(4.3)\qquad 1-\left(1-\exp\left(-E_0^2\right)\right)\exp\left(-E_0^2/(e-1)\right)/E_0^2 > 1-\varepsilon_S.$$

Вместо (4.3) можно пользоваться графиком *1* (см. рисунок). Для этого задаем ε_S, вычисляем вероятность $P_0\left(E_0^2\right) = 1 - \varepsilon_S$, для которой на оси абсцисс находим E_{0*}^2. Чтобы выполнилось условие оптимальности, необходимо $E_0^2 > E_{0*}^2$. Если, например, E_0^2 вычислять из (3.3), то регулировать оптимальность процесса напыления можно параметрами β, G, γ, ρ, μ, v, R_0, α, a_1.

Отметим тот факт, что левая часть неравенства (4.2) является теоретической зависимостью пористости ε_N от единственного безразмерного параметра E_0^2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кудинов В. В., Иванов В. М.** Нанесение плазмой тугоплавких покрытий.— М.: Машиностроение, 1981.
2. **Кудинов В. В., Белащенко В. Е.** Влияние параметров процесса на условия формирования покрытия и распределение его толщины при напылении // Физика и химия обраб. материалов.— 1977.— № 6.

г. Томск *Поступила 15/V 1990 г., в окончательном варианте — 18/X 1990 г.*

УДК 532.529 : 532.545

А. Н. Латкин

ВЛИЯНИЕ ПОЛЯ ТЯЖЕСТИ НА РАССЛОЕНИЕ СУСПЕНЗИЙ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПОТОКАХ

В потоках суспензий наблюдаются эффекты структурирования, которые сильно влияют на гидравлические свойства этих потоков. В [1] подведен итог многочисленным экспериментам, подтверждающим наличие радиальной миграции сферических частиц. Эти эксперименты свидетельствуют о том, что в течении Пуазейля равноплотных суспензий частицы смещаются в центр канала. При восходящем движении жидкости с более тяжелыми и нисходящем движении с более легкими частицами последние скапливаются в центральной области течения с образованием в ней плотноупакованного ядра. Если суспензия тяжелых частиц движется вниз или суспензия легких — вверх, то наблюдается противоположная картина — частицы скапливаются вблизи стенок. Аналогичная ситуация имеет место в восходящих потоках смеси жидкости с мелкими пузырьками, когда в пристенной области наблюдается повышенное газосодержание [2, 3]. Такое структурирование в вертикальных потоках вызвано действием в поперечном направлении на частицы инерционной подъемной силы [4]. Модель, позволяющая описать появление неоднородных профилей концентрации в равноплотных суспензиях, приведена в [5]. В ней предполагается, что стационарное распределение концентрации достигается в результате того, что поток частиц в поперечном направлении, обусловленный подъемной силой, уравновешивается противоположно направленным диффузионным потоком, для описания которого вводится действующая на частицы термодинамическая сила. Она находится из условия равенства создаваемого ею конвективного потока частиц диффузионному потоку. В данной работе этот подход применен к вертикальным потокам неравноплотных суспензий в поле силы тяжести.

Рассматривается монодисперсная суспензия мелких сферических частиц радиуса a и плотности d_1, помещенных в жидкость плотности d_0. Для определенности считаем, что вследствие малости частиц реальный вклад в диффузию вносит лишь изотропное броуновское движение.

Продольные компоненты уравнения сохранения импульса для движущейся вертикально в трубе в поле силы тяжести суспензии и ее диспер-