

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ (ОБЗОР)

А. С. Монин, А. М. Яглом

(Москва)

Известно, что течения жидкости распадаются на два резко различающихся класса: плавные и спокойные течения, меняющиеся во времени лишь в связи с изменением действующих сил или внешних условий, называются ламинарными, а течения, сопровождающиеся беспорядочными пульсациями всех гидродинамических полей как во времени, так и в пространстве — турбулентными. С наличием пульсаций связано и интенсивное перемешивание жидкости.

Различие между ламинарным и турбулентным режимами течения жидкостей имеет большое значение для многих технических задач. В частности, воздействие потока на твердые стенки вследствие трения при турбулентном режиме оказывается значительно большим, чем при ламинарном режиме, так как передача импульса в турбулентной среде происходит много интенсивнее.

Исследованию перехода ламинарных течений в турбулентные посвящено большое число научных статей и несколько монографий (см., например, Линь [1], Шлихтинг [2], Чандрасекар [3]).

В настоящем обзоре рассматриваются лишь важнейшие (и наиболее простые) случаи, причем основное внимание уделяется принципиальной стороне дела; за деталями математических расчетов и подробным описанием экспериментов, а также за сведениями, относящимися к более сложным потокам, читатель должен обратиться к указанным монографиям и к специальным статьям.

Для удобства изложения материал разбит на девять разделов:

1. Основные эмпирические данные о возникновении турбулентности в трубах и в пограничном слое.
2. Данные о турбулентном обтекании: отрыв пограничного слоя, кризис сопротивления и механизм турбулизации пограничного слоя.
3. Гидродинамическая неустойчивость.
4. Простейшие примеры абсолютно неустойчивых потоков жидкости.
5. Математическая формулировка вопроса об устойчивости относительно малых возмущений.
6. Устойчивость течения между двумя вращающимися цилиндрами.
7. Устойчивость слоя жидкости, подогреваемой снизу.
8. Устойчивость плоскопараллельных течений. Течения в трубах и в пограничном слое.
9. Устойчивость по отношению к конечным возмущениям. Возрастание возмущений и переход к турбулентности.

В данном обзоре критические значения величин обозначаются звездочками внизу.

1. Основные эмпирические данные о возникновении турбулентности в трубах и в пограничном слое. Первые результаты об условиях возникновения турбулентности были получены Хагеном [4] в 1839 г.; однако общий критерий, определяющий, будет ли течение ламинарным или турбулентным, был установлен лишь в 1883 г. Рейнольдсом [5] при помощи соображений о механическом подобии течений вязкой жидкости. Этот критерий заключается в том, что поток остается ламинарным, пока число Рейнольдса $Re = UL/v$ (где L и U — характерные масштабы длины и скорости рассматриваемого потока, а v — кинематический коэффициент вязкости) не превосходит некоторого критического значения Re_* , а при $Re > Re_*$ он становится турбулентным.

Известно, что число Re имеет смысл отношения характерных величин сил инерции и сил вязкости. Силы инерции осуществляют передачу энергии от крупномасштабных компонент движения к мелкомасштабным, т. е.

способствуют образованию резких неоднородностей течения; силы же вязкости, наоборот, приводят к сглаживанию мелкомасштабных неоднородностей. Поэтому при малых Re , когда силы вязкости доминируют над силами инерции, в потоке не может быть резких мелкомасштабных неоднородностей, т. е. гидродинамические поля изменяются весьма плавно и течение имеет ламинарный характер. При больших Re , наоборот, сглаживающее действие сил вязкости оказывается слабым, и в потоке возникают беспорядочные пульсации — резкие мелкомасштабные неоднородности, т. е. течение становится турбулентным. Этими соображениями и объясняется критерий Рейнольдса.

Для экспериментальной проверки указанного критерия и для измерения Re_* Рейнольдс провел серию опытов с течениями воды в стеклянных круглых трубах. В этих опытах на оси трубы у ее входа помещался источник красящего вещества; окрашенная вода при малых Re принимала форму тонкой четко очерченной струйки, что указывало на ламинарный режим течения. При возрастании Re в момент перехода через критическое значение форма окрашенной струйки резко изменялась: уже недалеко от входа в трубу струйка расширялась и на ней появлялись волны, затем возникали отдельные вихри и к концу трубы окрашенной оказывалась вся жидкость. Если в таком опыте осветить поток электрической искрой, то можно видеть, что окрашенная масса состоит из более или менее отчетливых завитков, указывающих на наличие завихренности.

При докритических числах, близких к Re_* , в ламинарном потоке наблюдаются переходные явления, заключающиеся в появлении кратковременных всплесков пульсаций высокой частоты, в форме своеобразных «турбулентных пробок», заполняющих все сечение трубы, но на небольших отрезках ее длины (появление таких «всплесков» Шиллер [6] связал с чередующимся образованием и разрушением крупных вихрей на внутренней стенке трубы у ее передней кромки).

Аналогичный характер имеет течение в начальном участке трубы и при $Re > Re_*$, причем с увеличением Re длина этого начального участка, на протяжении которого течение оказывается не полностью турбулентным, быстро уменьшается. Согласно измерениям Ротта [7], при таком промежуточном режиме средняя доля времени, в течение которого в данной точке трубы наблюдается турбулентный режим «коэффициент перемежаемости», монотонно возрастает с увеличением расстояния x от входа в трубу; имеющиеся экспериментальные данные (наиболее детальные из которых принадлежат Линдгрену [8]) позволяют объяснить это возрастание тем, что местная скорость на переднем крае турбулентной пробки превосходит местную скорость на ее заднем крае, и поэтому пробки растягиваются при своем передвижении по трубе (и некоторые из них иногда «догоняют» одна другую и сливаются, образуя одну большую пробку).

Опыты Рейнольдса производились с трубами различных диаметров d с плавным входом, соединяющимся с резервуаром, причем изменение числа $Re = Ud/\nu$ (где U — средняя скорость течения) достигалось также варьированием скорости течения и вязкости воды (путем изменения ее температуры). Значение Re_* в указанных опытах оказалось равным в среднем 12 830, с относительно небольшим разбросом по данным отдельных опытов.

Дальнейшие исследования показали, что критическое значение Re_* , соответствующее переходу от ламинарного течения к турбулентному, в различных опытах оказывается разным в зависимости от степени возмущенности ламинарного течения (или, как говорят, «начальной турбулентности», которая определяется главным образом условиями на входе в трубу). Абсолютно стационарного ламинарного течения в трубах осуществить не удается, и в потоке всегда существуют возмущения, характеризующиеся сравнительно редкими пульсациями скорости, происхож-

дение которых частично связано с вихрями, отрывающимися от передней кромки трубы. Интенсивность возмущений (которую можно охарактеризовать параметром u'/U , где u' — средняя квадратичная величина пульсации x -компоненты скорости) может быть довольно большой, но вследствие своей малой повторяемости эти возмущения не меняют ламинарного характера течения и не сказываются существенно на профиле скорости, величине сопротивления и других средних характеристиках потока.

При достаточно малых числах Рейнольдса возникшие возмущения, перемещаясь вниз по течению, затухают. Но при возрастании числа Рейнольдса в момент достижения его критического значения Re_* (зависящего от интенсивности возмущений, а также, возможно, от их масштаба и частоты) возмущения скачкообразно порождают турбулентность. Установлено, что значение Re_* , соответствующее переходу ламинарного течения в турбулентное, оказывается тем меньше, чем больше интенсивность возмущений. Так, например, в случае трубки с острыми краями, вставленной в сосуд с плоской стенкой, края трубки создают значительные возмущения, и Re_* оказывается равным уже примерно 2800. Уменьшая при помощи тех или иных приемов степень возмущенности течения у входа в трубу, можно задержать переход ламинарного течения в турбулентное до весьма больших чисел Рейнольдса (это явление называется *затягиванием ламинарного режима*). Так, Барнесу и Кокеру [9] удалось задержать возникновение турбулентности в трубах до значения $Re_* = 20\ 000$, а Экману [10] — даже почти до $Re_* = 50\ 000$.

Эти результаты показывают, что число Рейнольдса само по себе еще не является однозначным критерием возникновения турбулентности: для течения в трубе, по-видимому, вообще нельзя указать такого универсального критического значения Re_* , чтобы при $Re > Re_*$ режим течения обязательно был турбулентным. Чтобы установить значение Re , являющееся верхней границей для чисел Рейнольдса ламинарного течения, нужно иметь сведения о степени возмущенности ламинарного течения, и указанная верхняя граница чисел Re будет функцией от параметра u'/U (монотонно возрастающей при убывании этого параметра).

Без сведений о степени возмущенности ламинарного потока можно установить лишь более слабый критерий, указывающий условия, при которых возможен только ламинарный режим течения. Для этого нужно определить критическое число Рейнольдса Re_{*min} , соответствующее переходу от ламинарного режима к турбулентному при наибольшей возможной степени возмущенности ламинарного течения у входа в трубу. При $Re < Re_{*min}$ поток будет всегда оставаться ламинарным, т. е. любые возмущения, как бы интенсивны они ни были, будут затухать.

Опыты для измерения Re_{*min} были поставлены еще самим Рейнольдсом. В таких опытах необходимо вводить в трубу возможно более возмущенную жидкость, поэтому для обнаружения перехода от ламинарного режима к турбулентному способ окрашенных струек непригоден; переход к турбулентности здесь приходится определять иначе (например, по изменению закона сопротивления). В опытах Рейнольдса минимальное критическое значение числа $Re = Ud/\nu$ оказалось равным $Re_{*min} \approx 2300$; близкие значения (лежащие в пределах от 1900 до 2320) были получены и всеми последующими исследователями.

Сходные во многих отношениях результаты об условиях возникновения турбулентности получаются и при изучении течений в пограничных слоях, образующихся при обтекании тел вязкой жидкостью. Рассмотрим, например, пограничный слой, образующийся при обтекании плоской пластинки потоком с постоянной скоростью U , направленной параллельно пластинке. Число Рейнольдса пограничного слоя можно определить, например, формулой $Re_s = U\delta/\nu$, где δ — толщина пограничного слоя; можно также вместо этого использовать легче измеряемое число $Re_x = Ux/\nu$, где x — расстояние вдоль потока от переднего края пластинки.

Числа Re_δ и Re_x связаны функциональной зависимостью; так, при ламинарном течении $Re_\delta = 5 \sqrt{Re_x}$ (см., например, Шлихтинг [11]). Вниз по течению оба числа Re_δ и Re_x растут и в некоторой точке x_* они достигают критического значения, при котором течение изменяет характер и становится турбулентным. Таким образом, при $x < x_*$ (точнее говоря, при $Re_\delta < Re_{\delta*}$ и $Re_x < Re_{x*}$) течение в пограничном слое является ламинарным, а при $x > x_*$ (т. е. $Re_\delta > Re_{\delta*}$ и $Re_x > Re_{x*}$) турбулентным; непосредственно вблизи точки $x = x_*$ образуется «переходная область», где наблюдаются лишь отдельные «вспышки» турбулентности, возникающие в виде небольших «турбулентных пятен», увеличивающихся в размере по мере своего продвижения вниз по течению (см., например, Шлихтинг [2], § 14, а также Элдер [12]).

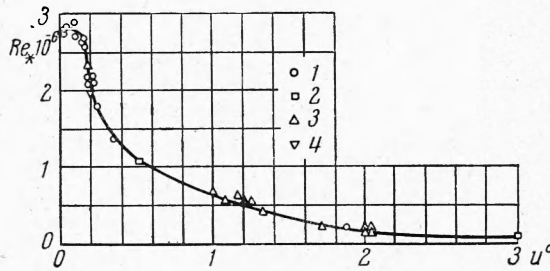
Появление турбулентных пятен приводит к тому, что в точках переходной области имеет место перемежающееся чередование во времени ламинарного и турбулентного режима, причем в начале этой области и частота появления и продолжительность существования турбулентного режима незначительны, а у ее конца ламинарный режим возникает уже лишь очень редко и на весьма короткие промежутки времени.

Первые измерения критического числа Рейнольдса пограничного слоя были выполнены в 1924 г. Бюргерсом [13] и Ван-дер-Хегге Цейненом [14]; несколько позже аналогичные измерения были произведены также Ханзенем [15]. Согласно данным этих авторов,

$$Re_{x*} = \left(\frac{Ux}{\nu}\right)_* \sim 3 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^5$$

Это, очевидно, соответствует значениям

$$Re_{\delta*} = \left(\frac{U\delta}{\nu}\right)_* \sim 2750 - 3500$$



Фиг. 1

имеющим тот же порядок величины, что и значения Re_* для течения в трубе.

В дальнейшем выяснилось, что, как и в случае течений в трубах, критическое число Рейнольдса пограничного слоя существенно зависит от степени возмущенности основного потока — в зависимости от величины отношения

$$u' = \frac{U'}{U} = \frac{\sqrt{1/3(u'^2 + v'^2 + w'^2)}}{U}$$

где u' , v' , w' — среднеквадратичные пульсации трех компонент скорости, число Re_{x*} может меняться в пределах от $1 \cdot 10^5$ и почти до $3 \cdot 10^6$ (см. заимствованную из обзорной статьи Драйдена [16] фиг. 1, где цифра 1 относится к данным измерений Шубауэра и Скрэмстеда, цифра 2 — к данным Драйдена, 3 — Холла и Хислопа и 4 — Бэйли и Райта). Заметим, однако, что фиг. 1 оставляет впечатление, что при убывании U'/U значение Re_{x*} не возрастает неограниченно (как это можно предположить в отношении течений в круглой трубе), а стремится к определенному пределу (порядка $3 \cdot 10^5$), выше которого пограничный слой будет турбулентным при сколь угодно малой степени возмущенности набегающего потока. Это свойство течения в пограничном слое еще будет рассмотрено подробнее ниже.

С турбулизирующим влиянием возмущений в обтекающем потоке связано также то, что критическое число Рейнольдса оказывается заметно меньшим при обтекании шероховатых пластинок, содержащих естест-

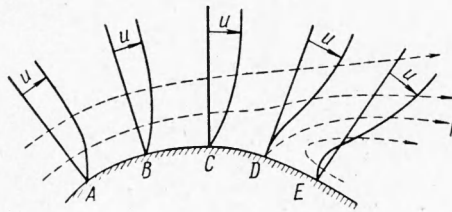
венные или искусственные неровности, создающие дополнительные возмущения. Согласно данным многочисленных измерений, даже одна единственная неровность может вызвать переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный, если только высота h_0 этой неровности имеет тот же порядок, что и «толщина вытеснения» $\delta^* \approx 0.3 \delta$ пограничного слоя в ее окрестности; еще более значительное влияние оказывает наличие множества неровностей, разбросанных по всей плоскости (см., например, Шлихтинг [2], гл. X или Драйден [16], § 5). Очень существенно меняет значение Re_{x*} также наличие хотя бы небольших продольных градиентов давления в обтекающем потоке. Однако из всего этого круга вопросов здесь будет рассмотрен только один специальный эффект, связанный с наличием отрицательного продольного градиента давления.

2. Данные о турбулентном обтекании: отрыв пограничного слоя, кризис сопротивления и механизм турбулизации пограничного слоя. Возникновение турбулентности при обтекании тел вязкой жидкостью может проявляться не только в виде турбулизации пограничного слоя, но и в виде образования турбулентного следа за телом в результате отрыва от его поверхности макроскопических вихрей.

Образование турбулентного следа обычно бывает связано с тормозящим действием отрицательного продольного градиента давления в обтекающем потоке. Рассмотрим, например, обтекание прямого круглого цилиндра потоком без циркуляции, перпендикулярным к оси цилиндра (фиг. 2, на которой изображена верхняя часть цилиндра вместе с линиями тока и профилями скорости над несколькими точками цилиндра). Вне пограничного слоя жидкость можно считать идеальной, а ее движение — безвихревым. Линии тока этого потенциального движения более всего сгущаются над верхней точкой цилиндра (точка C), где, следовательно, касательная скорость U достигает максимума. Согласно теореме Бернулли, давление над точкой C во внешнем потоке достигает минимума, так что на участке CE оно возрастает. Такие же изменения давления вдоль поверхности тела имеют место и в пограничном слое (так как поперек пограничного слоя давление почти не меняется); следовательно, на участке CE жидкость в пограничном слое движется в направлении возрастания давления, т. е. тормозится.

Наиболее сильно это торможение сказывается на самых медленных частицах жидкости, находящихся вблизи поверхности цилиндра. В некоторой точке D вниз по потоку от точки C эти частицы останавливаются, а за точкой D даже двигаются вспять по сравнению с более удаленными от поверхности цилиндра и поэтому еще не заторможенными частицами. Образующийся у поверхности тела за точкой D возвратный поток оттесняет внешнее течение от поверхности цилиндра, т. е. вызывает отрыв пограничного слоя от обтекаемой поверхности, с образованием в жидкости поверхности раздела DF . Ясно, что если только скорость U внешнего потока достаточно быстро убывает за точкой C , то такой отрыв пограничного слоя обязательно будет иметь место. Если даже пограничный слой до отрыва был ламинарным, то после отрыва он ведет себя, как свободная струя в затопленном пространстве, и быстро турбулизуется (при меньших Re , чем не отрывавшийся пограничный слой, так как наличие стенки действует на течение стабилизирующим образом).

Поверхность раздела DF , являющаяся поверхностью тангенциального разрыва скорости, весьма неустойчива (см. ниже) и быстро свертывается



Фиг. 2

в один или несколько вихрей. В области FDE за поверхностью раздела около цилиндра образуется крупный вихрь; второй такой же вихрь образуется в нижней части цилиндра. Эти вихри попеременно отрываются от поверхности цилиндра, уносятся вниз по течению и постепенно рассеиваются; на их месте образуются новые вихри.

В результате за телом образуется *турбулентный след*, в котором движение является завихренным, в то время как вне этого следа и вне пограничного слоя движение является потенциальным. Жидкость вне пограничного слоя можно считать идеальной, откуда вытекает, что при установившемся движении здесь имеет место постоянство вихря скорости вдоль линий тока. Поэтому ясно, что область завихренного турбулентного движения вдали от поверхности тела может возникнуть лишь путем непосредственного перемещения жидкости из пограничного слоя в удаленные части пространства.

Ясно также, что линии тока не могут выходить из области турбулентного следа (но могут входить в след из области потенциального течения); другими словами, жидкость может втекать в турбулентный след из области потенциального течения, но не может вытекать из турбулентного следа. В то же время турбулентные пульсации скорости могут проникать из следа в область потенциального движения, но со значительным ослаблением.

Действительно, в случае потенциального движения несжимаемой жидкости течение будет описываться уравнением Лапласа $\Delta\varphi = 0$ относительно потенциала скорости φ . Пусть z обозначает координату поперек следа; тогда, выделив из турбулентных пульсаций периодическую по x, y компоненту, для которой потенциал φ описывается формулой

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0(z) \exp[i(k_1x + k_2y)]$$

убеждаемся, что $\varphi_0(z)$ удовлетворяет уравнению

$$d^2\varphi_0/dz^2 = k^2\varphi_0 \quad (k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2})$$

Волновое число k обратно пропорционально горизонтальному (в плоскости xy) масштабу рассматриваемых периодических пульсаций. Отбрасывая физически бессмысленное решение для φ_0 , возрастающее вместе с z , убеждаемся, что затухание амплитуды пульсаций при удалении от следа в области $z > 0$ описывается множителем $\exp(-kz)$, так что пульсации затухают тем быстрее, чем меньше их масштаб. Следовательно, достаточно далеко в глубь потенциального движения проникают лишь сравнительно плавные крупномасштабные пульсации, для которых диссипация энергии в тепло не играет большой роли; поэтому почти вся осуществляющаяся в потоке диссипация энергии происходит внутри вихревого турбулентного следа (это рассуждение принадлежит Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицу [17]).

Наличие значительной диссипации энергии во всем объеме турбулентного следа, а также образование поверхности раздела при отрыве пограничного слоя приводят к тому, что тела, при обтекании которых возникает отрыв пограничного слоя, оказывают большое сопротивление набегающему потоку. При этом сопротивление, вообще говоря, будет тем меньше, чем уже турбулентный след, т. е. чем дальше на поверхности тела расположена точка отрыва. При достаточно больших числах Рейнольдса, при которых, однако, пограничный слой до точки отрыва остается ламинарным, коэффициент сопротивления $C_w = 2W/\rho U^2 S$ (где W — полная сила сопротивления, ρ — плотность жидкости, S — площадь обтекаемого тела или его сечения) оказывается не зависящим от Re , так как от Re не зависит положение точки отрыва (абсцисса точки отрыва находится из уравнения $du/dy = 0$ при $y = 0$, в которое, как можно показать, число Рейнольдса не входит).

Однако при достижении чисел Рейнольдса, при которых пограничный слой турбулизируется до точки отрыва ламинарного пограничного слоя, точка отрыва пограничного слоя перемещается вниз по течению, турбулентный след заметно сужается, и сопротивление тела резко (в несколько раз) уменьшается. Это явление, называемое *кризисом сопротивления*, объясняется тем, что перенос импульса внутри пограничного слоя при его турбулизации резко возрастает, следовательно, увлечение частиц пограничного слоя внешним потоком усиливается, и частицы в пограничном слое продвигаются в направлении роста давления дальше, чем в случае ламинарного пограничного слоя.

Кризис сопротивления при обтекании шара впервые наблюдался Эйфелем [18] в 1912 г. Переход от больших сопротивлений к малым происходит в этом случае при значениях числа Рейнольдса $Re = Ud/\nu$, близких к $5.0 \cdot 10^5$; коэффициент сопротивления C_W при этом падает примерно от 0.5 при $Re = 10^5$ до 0.15 при $Re = 10^6$ (причем при тщательном проведении эксперимента удается даже зафиксировать минимальное значение C_W , меньшее 0.1).

Аналогично ведет себя и коэффициент C_W для круглого цилиндра (зависимость коэффициентов сопротивления для шара и круглого цилиндра от числа Рейнольдса $Re = Ud/\nu$ изображена на фиг. 3). Из сказанного выше ясно, что кризис сопротивления наступает тем раньше, чем выше степень возмущенности набегающего потока, т. е. чем меньше критическое число Рейнольдса для перехода к турбулентному режиму в пограничном слое.

Это наглядно подтверждается известным опытом Прандтля [19], который добивался перехода через кризис сопротивления при обтекании шара, надевая на шар проволочное кольцо, т. е. создавая в потоке дополнительные возмущения, турбулизирующие пограничный слой.

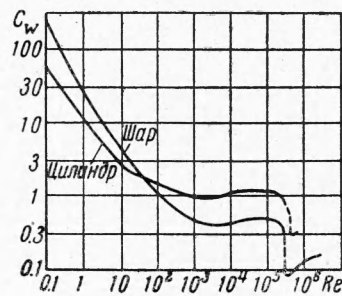
Необходимым условием для отрыва пограничного слоя является рост давления по направлению течения на каком-то участке поверхности тела. Это условие выполняется не только при обтекании выпуклых поверхностей, но и в других случаях, как, например, при течении в расширяющейся конической трубе (диффузоре) или в резко изогнутой трубе. В этих случаях также может возникнуть отрыв пограничного слоя.

Явление отрыва пограничного слоя под действием отрицательного продольного градиента давления может, в известной мере, объяснить также и влияние возмущений в набегающем потоке на значение Re_{*} . В самом деле, можно предполагать, что это влияние в значительной степени связано как раз с тем, что такие возмущения создают пульсации продольного градиента давления, приводящие к турбулизирующему пограничному слою образованию на непродолжительное время в отдельных его местах неустойчивых S-образных профилей скорости (типа профиля в точке E на фиг. 2) и отрывов пограничного слоя. Основываясь на этой гипотезе, Тейлор [20] в 1936 г. попытался теоретически найти характер зависимости критического числа Рейнольдса Re_{*} пограничного слоя от интенсивности начальной турбулентности набегающего потока (в 1940 г. Вигхарт [21] дал более короткий вывод результатов Тейлора).

В своей работе Тейлор исходил из приближенной теории Кармана—Польгаузена ламинарного пограничного слоя при наличии продольного градиента давления $\partial p / \partial x$, согласно которой форма профиля скорости в различных сечениях пограничного слоя зависит от единственного безразмерного параметра

$$\Lambda = -(\delta^2 / \nu U \rho) (\partial p / \partial x)$$

В пограничном слое на плоской пластинке $\partial p / \partial x = 0$, но могут существовать пульсации давления, и Тейлор предположил, что характер движения в фиксированном сечении здесь определяется параметром $\Lambda = -(\delta^2 / \nu U \rho) \langle (\partial p' / \partial x)^2 \rangle^{1/2}$ (где p' — пульсация давления, а угловые скобки означают средние значения соответствующей величины), т. е. точка перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный



Фиг. 3

определяется тем, что параметр Λ достигает некоторой «критической» величины. Но в силу уравнений движения величины

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad u' \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial u'^2}{\partial x}$$

должны иметь один и тот же порядок здесь (u' — пульсация продольной скорости в набегающем потоке). Далее можно положить

$$\left\langle \left(\frac{\partial u'^2}{\partial x} \right)^2 \right\rangle^{1/2} = \frac{U'^2}{\lambda} \quad (U'^2 = \langle u'^2 \rangle)$$

Масштаб λ можно связать с внешним (интегральным) масштабом турбулентности, L (определяющим порядок наибольшего расстояния, на котором еще проявляется связь между мгновенными значениями пульсаций скорости) при помощи следующего рассуждения: средняя удельная диссипация энергии $\varepsilon \sim \nu \langle (\partial u' / \partial x)^2 \rangle$, с одной стороны, пропорциональна $\nu U'^2 / \lambda^2$, а, с другой стороны, при больших $U'L / \nu$ эта величина, как известно, пропорциональна также и U'^3 / L . Отсюда следует, что

$$\lambda \sim L \left(\frac{U'L}{\nu} \right)^{-1/2}, \quad -\frac{1}{\rho} \left\langle \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle^{1/2} \sim \frac{U'^2}{\lambda} \sim \left(\frac{U'^5}{L\nu} \right)^{1/2}$$

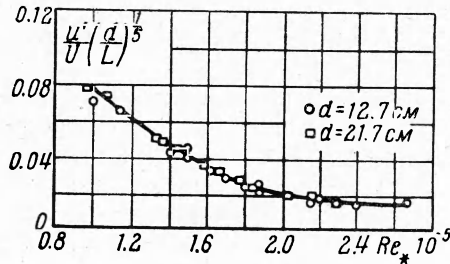
Учитывая еще, что толщина δ ламинарного пограничного слоя на плоской пластинке удовлетворяет соотношению $\delta \sim (\nu x / U)^{1/2}$, окончательно получаем

$$\Lambda = -\frac{\delta^2}{\nu U \rho} \left\langle \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle^{1/2} \sim \left(\frac{U'}{U} \right)^{1/2} \left(\frac{x}{L} \right)^{1/2} \left(\frac{Ux}{\nu} \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

так что если считать, что $Re_{x*} = \Phi(\Lambda_*)$, то

$$Re_{x*} = \left(\frac{Ux}{\nu} \right)_* = F \left[\frac{U'}{U} \left(\frac{x}{L} \right)^{1/2} \right] \quad (2.2)$$

В качестве длины L , входящей в эту формулу, можно принять характерный размер устройства, порождающего турбулентность (например, если турбулентность создается помещенной в поток решеткой, то L приблизительно совпадает с расстоянием между прутьями решетки).



Фиг. 4

Результат (2.2), согласно которому Re_* зависит только от величины $(U'/U) \cdot (x/L)^{1/2}$, выведен здесь для случая обтекания плоской пластинки, но его можно обобщить и на случай обтекания других тел, заменяя координату x расстоянием ξ от передней кромки обтекаемого тела до точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный, отсчитываемым вдоль контура тела, или же характерным размером тела d , и используя вместо $Re_x = Ux/\nu$ число $Re_\xi = U\xi/\nu$

или $Re = Ud/\nu$. При этом оказалось, что этот результат, несмотря на всю нестрогость его вывода, находится в весьма хорошем соответствии с экспериментальными данными (см., например, фиг. 4, на которой приведены эмпирические данные Драйдена и др. [22], измерявших значения Re_* для пограничного слоя на шарах различного радиуса при различных значениях интенсивности и масштаба начальной турбулентности свободного потока).

3. Гидродинамическая неустойчивость. При теоретическом анализе вопроса о возникновении турбулентности следует исходить из того, что функции, описывающие поля скорости и давления в любом потоке жидкости, как ламинарном, так и турбулентном, являются решениями уравнений гидродинамики при надлежащих начальных и краевых условиях. Установившееся ламинарное течение, в частности, описывается стационарными решениями этих уравнений; в случае же турбулентного течения каждой индивидуальной реализации потока соответствует некоторое, вообще говоря, весьма сложное нестационарное решение уравнений гидродинамики. Невозможность осуществления ламинарного течения при достаточно больших числах Рейнольдса, несмотря на то, что уравнения гидродинамики имеют стационарное решение при любом Re , ясно показывает, что не всякому решению соответствует движение жидкости, реально су-

существующее в природе. Естественно связать это обстоятельство с хорошо известным положением, согласно которому реальные движения должны не только удовлетворять уравнениям динамики, но и быть *устойчивыми* в том смысле, что неизбежно возникающие в реальных условиях малые возмущения этих движений должны затухать со временем, не меняя общей картины движения. Если же, наоборот, возникающие возмущения будут разрастаться со временем, то это приведет к существенному искажению исходного движения, и, следовательно, такое движение не сможет существовать сколько-нибудь длительное время.

Исходя отсюда, можно ожидать, что значение Re_* соответствует как раз потере устойчивости: при $Re < Re_*$ ламинарное течение устойчиво, но при $Re > Re_*$ оно становится неустойчивым и под влиянием всегда имеющихся малых возмущений превращается в турбулентное движение. Но в таком случае, исследуя математически вопрос об устойчивости решения уравнений гидродинамики, соответствующего ламинарному течению, можно (по крайней мере, в принципе) теоретически определить соответствующее критическое число Рейнольдса.

Турбулентность характеризуется наличием весьма сложных колебаний поля скорости и других характеристик течения. Механизм возникновения этих колебаний можно уяснить с общемеханической точки зрения, рассматривая текущую жидкость как динамическую систему с очень большим числом степеней свободы, в которой в результате притока энергии извне возникают автоколебания.

Применение понятия о степенях свободы к потоку жидкости требует прежде всего введения каких-то «обобщенных координат», однозначно характеризующих конфигурацию течения. При определении таких обобщенных координат можно исходить из разложения движения на элементарные компоненты, сумма энергий которых равняется энергии потока в целом, и состояние каждой из которых характеризуется небольшим числом параметров. Параметры всех таких элементарных компонент движения и будут тогда обобщенными координатами потока жидкости, а число таких координат, могущих меняться при заданных внешних условиях, будет совпадать с полным числом степеней свободы потока.

С математической точки зрения разложение движения на элементарные компоненты сводится к разложению поля скорости по ортогональной системе функций; каждая из этих функций будет описывать поле скорости соответствующей элементарной компоненты движения, а коэффициенты разложения будут обобщенными координатами потока. Выбор той или иной ортогональной системы функций диктуется формой границ потока. Для потоков, занимающих в пространстве ограниченный объем, ортогональная система функций всегда оказывается счетной, так что такие потоки имеют счетное множество обобщенных координат¹.

При установившемся ламинарном течении значения обобщенных координат однозначно определяются заданными внешними условиями, так что число степеней свободы ламинарного потока равно нулю. Число степеней свободы турбулентного потока, занимающего в пространстве ограниченный объем, весьма велико, но практически является конечным. Действительно, при разложении поля скорости в ряд по ортогональным функциям различные слагаемые описывают элементарные движения разных масштабов, и неограниченное увеличение номера слагаемого соответствует неогра-

¹ Представление о потоке жидкости, занимающем неограниченный объем пространства, всегда является идеализацией. При этой идеализации вместо разложения поля скорости в ряд по ортогональной системе функций приходится прибегать к разложению в интеграл Фурье — Стильтьеса и допускать в ряде случаев существование непрерывной компоненты спектра. Поэтому неограниченный поток жидкости может, вообще говоря, обладать континуумом обобщенных координат. Однако в ограниченных областях пространства и времени колебания с континуальным набором волновых чисел, разумеется, опять же могут быть аппроксимированы счетным числом гармонических колебаний.

ниченному уменьшению масштаба соответствующего элементарного движения. Однако из-за наличия вязкости колебания слишком малых масштабов существовать не могут. Поэтому при стационарных внешних условиях коэффициенты разложения поля скорости по ортогональным функциям, имеющие достаточно большие номера, не зависят от времени, что и означает, что число степеней свободы потока является конечным. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц [17] указали, что число степеней свободы турбулентного потока, занимающего в пространстве ограниченный объем, пропорционально $Re^{3/4}$, где Re — число Рейнольдса потока в целом. Отсюда видно, что с ростом числа Рейнольдса число степеней свободы быстро растет, и для развитой турбулентности при больших числах Рейнольдса оно достигает громадных значений.

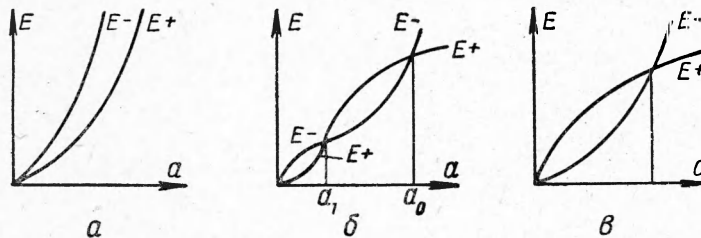
Чтобы охарактеризовать в заданный момент времени не только конфигурацию системы, но и состояние ее движения, нужно, кроме значений ее обобщенных координат, указать также значения соответствующих обобщенных скоростей. Набор значений всех обобщенных координат и обобщенных скоростей определяет некоторую точку в фазовом пространстве системы, полностью характеризующую ее мгновенное состояние. Процесс изменения состояния системы изображается в фазовом пространстве определенной линией — фазовой траекторией системы. Указание фазовой траектории является удобным способом описания эволюции системы.

Рассмотрим эволюцию потока жидкости при фиксированных стационарных внешних условиях (в частности, при постоянном притоке энергии извне), но при различных начальных условиях. Каждому из этих начальных условий соответствует некоторая фазовая траектория, выходящая из соответствующей начальной фазовой точки, и представляет интерес выяснить поведение указанных фазовых траекторий для больших промежутков времени. Из статистической механики известно, что динамические системы с большим числом степеней свободы при стационарных внешних условиях имеют тенденцию стремиться к некоторому предельному равновесному режиму, при котором в среднем по времени внешний приток энергии уравнивается диссипацией полной энергии системы, и эта энергия имеет определенное значение и определенным образом распределяется по степеням свободы. Можно высказать гипотезу, что для широкого класса потоков жидкости существуют два возможных предельных режима — ламинарный и турбулентный, так что каждая фазовая траектория потока жидкости с течением времени либо асимптотически приближается к точке, соответствующей ламинарному течению, либо накручивается на некоторый «предельный цикл», соответствующий установившемуся турбулентному режиму. Критерий возникновения турбулентности должен позволить по начальной точке фазовой траектории предсказать, какой из этих двух предельных режимов будет иметь место.

Возможность разложения движения жидкости на элементарные компоненты означает, что поток жидкости можно рассматривать как совокупность взаимодействующих друг с другом элементарных нелинейных осцилляторов. В каждом из этих осцилляторов за счет поступления энергии извне могут возникать автоколебания. Возможность возникновения колебаний определяется соотношением между получаемой осциллятором энергией E^+ и теряемой им энергией E^- при различных амплитудах колебаний a (см. фиг. 5). Если при всех амплитудах $E^- > E^+$ (фиг. 5, а), то колебания, очевидно, будут затухать при любой их начальной амплитуде: система будет устойчивой по отношению к любому возмущению. Если $E^- > E^+$ при $a < a_1$ и $a > a_0$, но $E^- < E^+$ при $a_1 < a < a_0$ (фиг. 5, б), то колебания с начальной амплитудой $a < a_1$ будут затухать, но при начальной амплитуде $a > a_1$ они будут возрастать, пока их амплитуда не достигнет равновесного значения a_0 : система будет устойчивой по отношению к малым возмущениям, но неустойчивой по отношению к возмущениям достаточно большой амплитуды (такая система называется

системой с жестким самовозбуждением). Наконец, если $E^- < E^+$ при сколь угодно малых амплитудах (фиг. 5, в), то система будет неустойчивой по отношению к бесконечно малым возмущениям, т. е. абсолютно неустойчивой (такая система называется также системой с мягким самовозбуждением).

4. Простейшие примеры абсолютно неустойчивых потоков жидкости. Приведенные выше экспериментальные данные о зависимости Re_* для



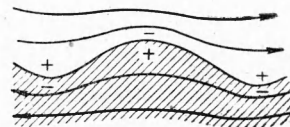
Фиг. 5

течений в трубах и пограничных слоях от интенсивности начальных возмущений и о затягивании ламинарного режима определенно показывают, что при числе Re , немного превосходящем Re_{*min} , указанные течения представляют собой автоколебательные системы с жестким самовозбуждением; некоторое представление о возможном механизме возбуждения колебаний в этих системах дает изложенная в § 2 теория Тэйлора. Легко указать также примеры движений жидкости, неустойчивых уже и по отношению к бесконечно малым возмущениям, т. е. в терминах теории колебаний, представляющих собой системы с мягким возбуждением.

Простой пример абсолютно неустойчивого потока жидкости представляет собой течение около поверхности тангенциального разрыва скорости, о котором уже упоминалось выше. Рассмотрим идеальную жидкость с нулевой вязкостью, два слоя которой скользят один по другому с противоположными скоростями U и $-U$, образуя поверхность разрыва скорости.

Допустим, что в результате некоторого возмущения на поверхности разрыва образовалась волна малой амплитуды (фиг. 6). В таком случае над гребнями волны линии тока будут сгущаться, т. е. скорость повысится, а в ложбинах линии тока станут реже, и скорость уменьшится. Вследствие теоремы Бернулли над гребнями волн давление будет понижено, а в ложбинах — повышено (на фиг. 6 это обозначено знаками плюс и минус), т. е. возникнут поперечные градиенты давления, которые будут стремиться увеличить амплитуду волны (более аккуратный вывод этого результата можно найти в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [17], § 30). В дальнейшем это увеличение амплитуды приведет к тому, что волна распадется на отдельные вихри, положив начало турбулизованной зоне. При наличии вязкости скольжение одного слоя жидкости по другому, разумеется, будет невозможным, и вместо поверхности разрыва между двумя течениями должен быть узкий переходной слой, в котором профиль скорости, вообще говоря, имеет S-образную форму. Вопрос об устойчивости такого слоя более сложен; однако и здесь удастся показать (и теоретически и экспериментально), что такой слой весьма мало устойчив.

Другим простейшим примером абсолютной неустойчивости является равновесие в поле тяжести жидкости с переменной по оси z плотностью в случае возрастания плотности с высотой. Легко понять, что при любом законе изменения плотности $\rho = \rho(z)$ несжимаемой жидкости с высотой



Фиг. 6

уравнения движения будут допускать решение, соответствующее состоянию покоя; при этом только при наличии поля тяжести давление должно меняться с высотой по закону

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g, \quad \text{или} \quad p(z) = g \int_z^{\infty} \rho(z) dz + \text{const} \quad (4.1)$$

Пусть теперь вследствие какого-то возмущения некоторый элемент жидкости переместится с уровня z на новый уровень $z' = z + h$. Если плотность ρ убывает с высотой, то при $h > 0$ этот элемент будет под действием силы тяжести стремиться опуститься вниз, а при $h < 0$ под действием архимедовой силы он будет стремиться подняться вверх, так что равновесие будет устойчивым; однако если плотность возрастает с высотой, то при любом знаке h он будет стремиться еще дальше удалиться от своего первоначального положения, и состояние равновесия будет абсолютно неустойчивым. Заметим еще, что в случае идеальной жидкости (не обладающей трением) уравнения движения будут при любом $\rho = \rho(z)$ допускать также стационарное решение с произвольным вертикальным профилем x -компоненты скорости $U = U(z)$ (и нулевыми компонентами скорости по двум другим осям), причем в силу тех же соображений и это течение будет абсолютно неустойчиво при $d\rho/dz > 0$. В случае же $d\rho/dz < 0$ вопрос об устойчивости такого течения является заметно более сложным; заранее можно лишь сказать, что в силу соображений подобия критерий устойчивости здесь должен выражаться через значение так называемого числа Ричардсона — безразмерного параметра

$$\text{Ri} = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} / \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 \quad (4.2)$$

Случай расслоенной по оси z жидкости представляет большой интерес для метеорологических задач, в которых такое расслоение вызывается наличием определенного профиля температуры $T = T(z)$. В этом случае, однако, нельзя считать жидкость несжимаемой, а следует привлечь для исследования ее уравнение состояния и элементарные термодинамические тождества (см., например, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц [17], § 4). При этом оказывается, что элемент жидкости, переместившийся с уровня z на уровень $z + h$, здесь будет при $h > 0$ более легким, чем окружающий его воздух, а при $h < 0$ более тяжелым, чем окружающий его воздух, тогда и только тогда, когда

$$\frac{dT}{dz} < -\frac{gT}{c_p V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (4.3)$$

где под T понимается абсолютная температура, V — удельный объем, c_p — теплоемкость при постоянном давлении. Условие (4.3) и будет условием абсолютной неустойчивости состояния покоя при наличии профиля $T(z)$ поля температуры. В случае, когда среду можно считать идеальным газом

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{p} = \frac{V}{T} \quad (R = c_p - c_v \text{ — газовая постоянная})$$

Критерий неустойчивости здесь будет иметь вид

$$\frac{dT}{dz} < -\frac{g}{c_p} = -G_a \quad \left(G_a = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{g}{R}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \right) \quad (4.4)$$

(в таком виде это условие можно найти во всех курсах динамической метеорологии). Величина G_a в метеорологии называется адиабатическим градиентом температуры (для воздуха этот градиент равен примерно $1^\circ \text{C}/100 \text{ м}$); термическое расслоение воздуха, при котором dT/dz больше, равно или меньше G_a , называется соответственно устойчивой, безразличной или неустойчивой стратификацией. При наличии произвольного профиля скорости ветра $U = U(z)$ течение в случае неустойчивой стратификации все равно будет неустойчивым; в случае же устойчивой стратификации устойчивость или неустойчивость движения должна как-то определяться значением числа Ричардсона

$$\text{Ri} = -\frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} - G_a \right) / \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 \quad (4.5)$$

5. Математическая формулировка вопроса об устойчивости относительно малых возмущений. Условия возникновения турбулентности далеко не всегда удается выяснить простыми средствами, как это имело место в изложенных выше примерах. В общем случае эффективным средством исследования устойчивости является так называемый *метод малых возмущений*, идею которого сейчас изложим в применении к движениям несжимаемой жидкости постоянной плотности ρ .

Метод малых возмущений состоит в том, что поля скорости $u_i(x, t)$ и давления $p(x, t)$, удовлетворяющие уравнениям гидродинамики, пишутся в виде $u_i = U_i + u_i'$, $p = P + p'$, где $U_i(x, t)$ и $P(x, t)$ представляют собой частное решение тех же уравнений, устойчивость которого исследуется, а u_i' , p' — малое возмущение. Учитывая, что поля U_i и P сами удовлетворяют уравнениям гидродинамики, и пренебрегая квадратичными выражениями относительно возмущений, удается для u_i' и p' получить линейные уравнения вида

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + U_\alpha \frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha} + u_\alpha' \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i' \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\alpha} = 0$$

Здесь, как обычно, по дважды встречающимся индексам предполагается суммирование от 1 до 3. Применяв операцию взятия дивергенции к первым трем уравнениям (5.1), можно выразить p' через u_i' ; таким образом, решение системы (5.1) будет определяться заданием одних лишь начальных значений $u_i(x, 0)$ функций $u_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$. При этом можно (по крайней мере в принципе) попытаться установить условия, при которых не все решения соответствующей задачи Коши будут затухать во времени; эти условия и будут условиями абсолютной неустойчивости¹ решения U_i, P . Разумеется, если даже соответствующие условия и не будут выполняться, так что решение U_i, P будет абсолютно устойчиво (относительно малых возмущений), остается еще возможность, что относительно конечных возмущений u_i', p' (описываемых существенно нелинейными уравнениями) это решение все же будет неустойчиво, т. е. что течение, описываемое этим решением, будет представлять собой систему с жестким возбуждением; чтобы опровергнуть и эту возможность, требуются существенно иные методы исследования.

В случае, когда решение $U_i = U_i(x)$, $P = P(x)$ описывает стационарное ламинарное течение жидкости, коэффициенты системы уравнений (5.1), очевидно, не будут зависеть от времени. В таком случае эта система будет допускать частные решения вида

$$u'(\mathbf{x}, t) = e^{-i\omega t} \mathbf{f}_\omega(\mathbf{x}), \quad p'(\mathbf{x}, t) = e^{-i\omega t} \Phi_\omega(\mathbf{x})$$

зависимость которых от времени задается экспоненциальным множителем $\exp(-i\omega t)$ с, вообще говоря, комплексными «частотами» ω . Соответствующие «амплитуды» $\mathbf{f}_\omega(\mathbf{x})$, $\Phi_\omega(\mathbf{x})$ при этом будут определяться из некоторой задачи на собственные значения для линейной системы уравнений с частными производными.

Весьма часто оказывается, что соответствующие собственные функции $\mathbf{f}_\omega(\mathbf{x})$ образуют полную систему функций в пространстве всех векторных

¹ Отметим, что терминология здесь не является вполне установившейся. Весьма часто под условиями абсолютной неустойчивости понимают условия, при которых уравнения (5.1) будут иметь возрастающие по абсолютной величине решения, т. е. случаи наличия только затухающих и ограниченных решений также причисляют к устойчивым. Здесь и в дальнейшем, однако, будет более удобно считать неустойчивыми также и течения, для которых существуют ограниченные (но не затухающие) возмущения.

функций $f(x)$, удовлетворяющих уравнению неразрывности $\operatorname{div} f = 0$ и соответствующим краевым условиям, так что любые начальные значения $u(x, 0)$ можно разложить в ряд по этим функциям¹. В таком случае общее решение задачи Коши для уравнений (5.1) будет, очевидно, представляться в виде суперпозиции элементарных решений, экспоненциально зависящих от времени, и общая задача об устойчивости здесь может быть сведена к изучению соответствующей задачи на собственные значения: для устойчивости соответствующего ламинарного течения по отношению к малым возмущениям надо только, чтобы у всех возможных «частот» ω мнимая часть была отрицательной.

Различные частоты ω будут, вообще говоря, зависеть от пространственных «масштабов» возмущений $u'(x, t)$ и от числа Re , причем при $Re \rightarrow 0$ мнимые части всех частот ω будут стремиться к отрицательным значениям (так как состояние покоя всегда устойчиво). Однако при возрастании Re мнимые части некоторых частот могут возрасти и в конце концов становятся положительными.

Критическое число Re , соответствующее границе устойчивости ламинарного течения по отношению к возмущениям определенного масштаба, будет определяться из уравнения $\max_j \operatorname{Im} \omega_j = 0$, где $\operatorname{Im} \omega$ означает мнимую часть числа ω , а ω_j — всевозможные частоты, отвечающие выбранному масштабу возмущений.

Наименьшее из таких критических значений Re для возмущений различных масштабов будет критическим числом Re_* потока в целом, т. е. при $Re \geq Re_*$ рассматриваемое ламинарное течение будет абсолютно неустойчивым, а при $Re < Re_*$ — не будет.

Заметим еще только, что введенное здесь число Re_* , характеризующее абсолютную неустойчивость, очевидно, должно быть не меньше, чем критическое число Рейнольдса, характеризующее устойчивость потока относительно возмущений конечной амплитуды, так что, следуя обозначениям, использованным на стр. 5, его можно было бы обозначить как $Re_{* \max}$. С другой стороны, однако, наличие неустойчивости при $Re > Re_{* \max}$ означает только, что при таких числах Рейнольдса соответствующее ламинарное течение не может существовать, но совсем не означает еще, что оно обязательно перейдет в турбулентное течение; вообще говоря, вполне возможно, что при нарушении устойчивости данное ламинарное течение превратится в новое ламинарное течение, являющееся уже устойчивым, а переход к турбулентности осуществится лишь при нарушении устойчивости и этого нового ламинарного течения при числах Рейнольдса, значительно превосходящих $Re_{* \max}$ (см. примеры в § 6—7).

В заключение подчеркнем еще раз, что возможность разложения произвольного решения системы (5.1) в ряд по специальным решениям вида $e^{x(-i\omega t)} f_\omega(x)$ будет иметь место часто, но все же не всегда — это обстоятельство часто забывается при рассмотрении задач теории гидродинамической устойчивости.

В тех случаях, когда система функций $f_\omega(x)$ по каким-то причинам оказывается неполной, исследование одной лишь соответствующей задачи на собственные значения оказывается недостаточным и для полного выяснения вопроса об устойчивости приходится исследовать поведение общего решения соответствующей задачи Коши. Такое исследование, вообще говоря, оказывается весьма сложным; однако в частном случае идеальной жидкости оно тем не менее позволило уже получить ряд вполне окончательных результатов (см. работы Дикого [24, 25] и Кейза [26, 27], о которых подробнее будет говориться ниже).

¹ С математической точки зрения возникающие здесь задачи на собственные значения являются задачами о собственных значениях некоторого линейного несамосопряженного оператора в функциональном пространстве. Для установления полноты системы собственных (и родственных им «присоединенных») функций такого оператора можно, например, воспользоваться известной теоремой М. В. Келдыша [23].

6. Устойчивость течения между двумя вращающимися цилиндрами. Одним из важных примеров абсолютной неустойчивости, допускающей полный математический анализ, является плоское стационарное течение жидкости между двумя вращающимися цилиндрами. Пусть R_1 и Ω_1 — радиус и угловая скорость вращения внутреннего, а R_2 и Ω_2 — внешнего цилиндра. В цилиндрических координатах r, φ, z с осью z по оси цилиндров поле скорости стационарного течения определяется формулами ([17], § 18)

$$U_r = U_z = 0, \quad U_\varphi = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{R_1^2 R_2^2 (\Omega_1 - \Omega_2)}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \quad (6.1)$$

Пренебрегая сперва действием вязкости, можно определить критерий неустойчивости из следующих элементарных соображений. При стационарном ламинарном течении действующая на элементы жидкости центробежная сила уравновешивается градиентом давления. Если теперь элемент массы m сместится под действием возмущения из положения с координатой r_0 в положение с координатой $r > r_0$, то в силу сохранения его момента количества движения $m r_0 U_\varphi(r_0)$ в новом положении на него будет действовать центробежная сила $m(r_0^2/r^3) U_\varphi^2(r_0)$. Ясно, что равновесие будет неустойчивым, если эта сила окажется больше ее равновесного значения на расстоянии r от оси; отсюда сразу вытекает, что условие неустойчивости (которое для рассматриваемого здесь течения невязкой жидкости было установлено еще Рэлеем [23] в 1916 г.) будет здесь иметь вид

$$[r_0 U_\varphi(r_0)]^2 - [r U_\varphi(r)]^2 > 0; \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial r} (r U_\varphi)^2 < 0 \quad (6.2)$$

При помощи формулы (6.1) критерий неустойчивости Рэля приводит к виду $(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) U_\varphi < 0$. Если цилиндры вращаются в разные стороны, то U_φ где-то между цилиндрами меняет знак; следовательно, в этом случае течение, наверное, будет неустойчивым. При одинаковом направлении вращения цилиндров можно положить $\Omega_1 > 0, \Omega_2 > 0$, и тогда всюду будет $U_\varphi > 0$; при этом рэлеевский критерий неустойчивости принимает вид

$$\Omega_2 / \Omega_1 < (R_1 / R_2)^2 \quad (6.3)$$

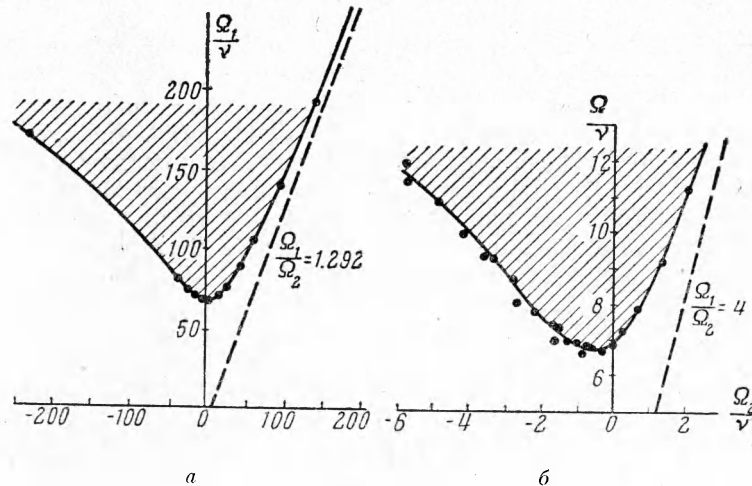
Более полный анализ (учитывающий также влияние вязкости) может быть осуществлен при помощи метода малых колебаний, впервые примененного к данной задаче в 1923 г. Тэйлором [29].

Предположим, что поле возмущений $u'(x, t)$ имеет вид $\exp[i(kz - \omega t)] f(r)$, где k — заданное вещественное число (которое, очевидно, всегда можно считать положительным), определяющее масштаб возмущения в направлении оси z , а ω — комплексная «частота», которую надо определить. В таком случае система уравнений (5.1) вместе с граничными условиями при $r = R_1$ и $r = R_2$ сведется к сложной задаче на собственные значения для функций $f(r)$ от r , содержащей (при заданных R_1, R_2 и ν) параметры k, Ω_1 и Ω_2 .

Эта система будет иметь набор собственных значений $\omega_j(k, \Omega_1, \Omega_2)$, $j = 1, 2, 3, \dots$ и совокупность пар (Ω_1, Ω_2) таких, что среди чисел $\omega_j(k, \Omega_1, \Omega_2)$ хоть при одном k имеется хотя бы одно ω_j с неотрицательной мнимой частью, будет, очевидно, относиться к области неустойчивости рассматриваемого течения. Если бы, кроме того, можно было доказать, что совокупность функций $\exp(ikz) f_{k\omega_j}(r)$, где $f_{k\omega_j}(r)$ — собственные функции рассматриваемой системы, полна в пространстве векторных функций от $x = (r, z, \varphi)$, удовлетворяющих условию соленоидальности (т. е. уравнению несжимаемости) и обращающихся в нуль при $r = R_1$ и при $r = R_2$, то отсюда сразу следовало бы также, что эта совокупность пар

(Ω_1, Ω_2) исчерпывает всю область неустойчивости. Ясно, однако, что такая полнота на самом деле не имеет места, так как рассматриваемые функции все не зависят от φ ; как можно показать, для получения полной системы функций от x следует рассмотреть более общие возмущения вида $\exp [i(kz + n\varphi - \omega t)] f(r)$ с произвольным целым n .

Возмущения такого вида с $n \neq 0$ (которым отвечали бы уже собственные значения $\omega_j(k, n, \Omega_1, \Omega_2)$ и собственные функции $f_{kn\omega_j}(r)$) до сих пор, по-видимому, никем не рассматривались; обычно исследователи просто отождествляли область пар (Ω_1, Ω_2), которым отвечают неустойчивые возмущения вида $\exp [i(kz - \omega t)] f(r)$, со всей областью неустойчивости, неявно предполагая тем самым, что при всех значениях Ω_2 / Ω_1 неотрицательная мнимая часть у $\omega_j(k, n, \Omega_1, \Omega_2)$ раньше всего появляется при $n = 0$. Так как данные экспериментов прекрасно подтверждают совпаде-



Фиг. 7

ние области неустойчивости, определяемой из рассмотрения возмущений вида $\exp [i(kz - \omega t)] f(r)$, со всей областью неустойчивости течения между вращающимися цилиндрами (см. фиг. 7), то они подтверждают тем самым и это последнее предположение.

Нетрудно видеть, что при достаточно малых Ω_1 и Ω_2 все собственные значения $\omega_j(k, \Omega_1, \Omega_2)$ и $\omega_j(k, n, \Omega_1, \Omega_2)$ будут иметь отрицательную мнимую часть (так как состояние покоя всегда устойчиво); если увеличивать угловые скорости Ω_1 и Ω_2 , не меняя отношения Ω_2 / Ω_1 (что в данном случае соответствует увеличению числа Рейнольдса без нарушения геометрического подобия), то при некоторых Ω_2 / Ω_1 нулевая мнимая часть ни у одного $\omega_j(k, \Omega_1, \Omega_2)$ так и не появится, т. е. движение все время останется устойчивым (относительно осесимметричных возмущений), в то время как при других значениях Ω_2 / Ω_1 при некотором $\text{Re}_* = \Omega_2 R_2^2 / \nu$ впервые появится значение k_* такое, что какое-то $\omega_j(k_*, \Omega_1, \Omega_2)$ будет уже иметь нулевую мнимую часть.

Любопытно, что в этой задаче при всех Ω_2 / Ω_1 потеря устойчивости имеет место в связи с появлением собственного значения ω_j такого, что не только $\text{Im } \omega_j = 0$, но и вообще $\omega_j = 0$; иначе говоря, потеря устойчивости проявляется здесь в виде появления нового стационарного движения с полем скорости $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$, где $\mathbf{u}' = \exp(ikz) f(r)$ (такое движение имеет характер ряда вихрей, расположенных в меридиональных плоскостях). При дальнейшем возрастании числа Re появляется уже целый интервал значений k , для которых имеются собственные значения ω_j с $\text{Im } \omega_j \geq 0$; опыт показывает, однако, что при этом возмущенное движение все еще имеет характер совокупности стационарных периодических

вихрей, период которых теперь уже не может быть определен из линейной теории. При дальнейшем значительном возрастании Re и это периодическое движение становится неустойчивым, и в конце концов возникает турбулентность.

Конкретный подсчет собственных значений $\omega_j(k, \Omega_1, \Omega_2)$ оказывается весьма сложной задачей, и Тэйлором он был осуществлен лишь в предположении, что зазор между цилиндрами является весьма узким, так что $R_2 - R_1 \ll (R_1 + R_2)/2$.

Общие методы численного решения соответствующей задачи о собственных значениях для случая произвольных R_1 и R_2 были разработаны лишь совсем недавно (см. Чандрасекар [30, 3], Кирхгеснер [34]). Характер получаемых результатов во всех случаях оказывается одинаковым; для примера на фиг. 7, а воспроизведено расположение области плоскости (Ω_1, Ω_2) , в которой возможны неустойчивые возмущения, не зависящие от φ , при $R_2/R_1 = 1.13$ (по данным Тэйлора), а на фиг. 7, б — расположение той же области при $R_2/R_1 = 2$ (по данным Чандрасекара). В обоих случаях в области $\Omega_2/\Omega_1 > (R_1/R_2)^2$ неустойчивости не возникает ни при каких Re , так что вязкость здесь может иметь лишь стабилизирующее значение. В области же $\Omega_2/\Omega_1 < (R_1/R_2)^2$, согласно данным фиг. 7, при достаточно большом Re обязательно возникает абсолютная неустойчивость. В незаштрихованной на фиг. 7 области движение оказывается устойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям, но, как показывает опыт, при достаточно больших Re оно все же неустойчиво по отношению к возмущениям конечной величины, причем в этом случае потеря устойчивости приводит к спонтанному образованию развитой турбулентности. Граница области устойчивости, рассчитанная Тэйлором, прекрасно совпала с опытными данными, найденными и им самим, и рядом других исследователей, и это явилось первым большим успехом гидродинамической теории возмущений (фиг. 7, а, на которой точками указаны эмпирические значения ряда пар (Ω_1, Ω_2) , при которых впервые возникает потеря устойчивости); расчеты, относящиеся к случаю $R_2/R_1 = 2$, также прекрасно подтверждаются имеющимися опытными данными Доннели и Фульцца [32] (точки на фиг. 7, б).

7. Устойчивость слоя жидкости, подогреваемой снизу. При наличии в жидкости вертикального градиента температуры, направленного сверху вниз, архимедовы силы, очевидно, действуют на поток дестабилизирующим образом, аналогичным действию сил инерции при криволинейном движении жидкости таком, что скорость вращения жидкости убывает при удалении от центра кривизны. Подобным же образом градиент температуры, направленный снизу вверх, действует на течение стабилизирующим образом, т. е. так же, как действует при криволинейном движении возрастание скорости при удалении от центра кривизны. Поэтому неудивительно, что задача об устойчивости тонкого слоя жидкости между двумя бесконечными плоскостями, имеющими разные температуры, оказывается математически весьма близкой к задаче об устойчивости течения несжимаемой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами¹. При решении указанной задачи, очевидно, надо исходить из известной системы уравнений свободной конвекции (Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц [17], § 56); если принять, что жидкость ограничена плоскостями $x_3 = 0$ и $x_3 = h$, поддерживаемыми при постоянных температурах T_0 и T_1 , то к этим уравнениям надо еще добавить граничные условия

$$u_i = 0, \quad T = T_0 \quad \text{при } x_3 = 0 \quad \text{и} \quad u_i = 0, \quad T = T_1 \quad \text{при } x_3 = h$$

¹ В 1928 г. Джефрис [23] показал, что первая из этих задач фактически эквивалентна частному случаю второй (ср. Линь [1], § 7.3). См. также недавнюю работу Гертлера [34], в основе которой лежит аналогия между учетом центробежных сил и архимедовых сил при исследовании устойчивости сравнительно широкого класса гидродинамических течений.

Стационарным состоянием, устойчивость которого здесь исследуется, будет состояние покоя, при котором¹

$$\begin{aligned} u_i &= 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad T = T(x_3) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{h} x_3, \\ p &= p(x_3) = p_0 - g\rho x_3 \quad (g - \text{ускорение силы тяжести}) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Полагая $T = T(x_3) + T'$, $p = p(x_3) + p'$ и линеаризуя уравнения свободной конвекции относительно возмущений u_i , $i = 1, 2, 3$, T' и p' , получим систему пяти уравнений с пятью неизвестными, из которой нетрудно исключить все переменные, кроме u_3 .

Эту переменную будем искать в безразмерных переменных в виде произведения

$$u_3(x, t) = \exp[i(k_1 x_1/h + k_2 x_2/h - \sigma \chi t/h^2)] f(x_3)$$

где χ — коэффициент температуропроводности жидкости. Таким путем придем к задаче на собственные значения, содержащей два параметра

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2, \quad \text{Ra} = \frac{g\beta(T_0 - T_1)h^3}{\nu\chi} \quad \left(\begin{array}{l} (\text{Ra} - \text{число Рэлея, } \beta - \text{коэффициент} \\ \text{теплового расширения}) \end{array} \right) \quad (7.2)$$

Следовательно, при фиксированных k и Ra будем иметь набор собственных чисел $\omega_j(k, \text{Ra})$. Оказывается, что при отрицательных или малых положительных значениях Ra (т. е. в случае, когда нижняя плоскость имеет более низкую температуру или же когда нижняя плоскость подогрета по сравнению с верхней, но не слишком сильно) все числа $\omega_j(k, \text{Ra})$ при всех значениях k будут иметь отрицательную мнимую часть; начиная же с некоторого «критического значения» Ra_* (т. е. с некоторой критической разности температур $T_0 - T_1$, зависящей также и от расстояния h между плоскостями), появляется значение $k = k_*$, при котором одно из собственных значений $\omega_j(k_*, \text{Ra}_*)$ уже имеет нулевую мнимую часть. При этом, так же как и в задаче об устойчивости движения жидкости между вращающимися цилиндрами, первое собственное значение $\omega_j(k, \text{Ra})$ с $\text{Im } \omega_j = 0$ оказывается нулевым, так что нарушение устойчивости состояния покоя при достижении критической разности температур $T_0 - T_1$ приводит к возникновению стационарного конвективного движения, периодического по x_1 и x_2 .

Все эти обстоятельства были выяснены еще Рэлеем [36] в 1916 г., разобравшим математически заметно более простую (но физически мало естественную) задачу о конвекции в слое между двумя свободными поверхностями; для случая же конвекции в слое между твердыми плоскостями подсчет собственных значений, выполненный Джеффрисом [37] и Пэлью и Саусвеллом [38] (см. также Линь [1] и Чандрасекар [3]), показывает, что $\text{Ra}_* = 1708$ и $k_* = 3.13$.

Заметим еще, что значение k_* определяет лишь периодичность возникающего течения в плоскости (x_1, x_2) , но не его форму; что же касается до этой последней, то согласно данным многочисленных экспериментов (описанных, например, в книге Чандрасекара [3]), возникающее течение обычно распадается на совокупность «ячеек» (так называемые «ячейки Бенара») в виде шестигранных призм, в середине которых жидкость движется вверх, а по краям вниз (или наоборот).

Аналогично обстоит дело в случае, когда верхняя поверхность жидкости является свободной поверхностью фиксированной температуры; в этом

¹ В соответствии с предположениями приближенной теории свободной конвекции мы считаем изменения плотности ρ с высотой столь малыми, что их можно не учитывать в уравнениях для возмущений. Поэтому излагаемые здесь результаты применимы лишь в случае сравнительно тонких слоев с небольшими h . Заметим, впрочем, что в случае слишком тонких слоев жидкости (при h порядка нескольких миллиметров) эти результаты опять же оказываются неприменимыми из-за нарушения условия линейности стационарного профиля температуры (см. Сэттон. [35]).

случае надо только изменить граничные условия при $x_3 = h$, что приводит к новой задаче на собственные значения, решение которой показывает, что здесь нарушение устойчивости происходит при $Ra_* = 1100$ (см. Пэлю и Саусвелл [38], Чандрасекар [3]). Оба значения Ra_* , найденные теоретически, прекрасно подтверждаются на опыте (см., например, Чандрасекар [3], Сэттон [35]); при дальнейшем же повышении $T_0 - T_1$ (т. е. повышении числа Ra) стационарная «ячеистая» конвекция сперва сохраняет свой характер, а затем и она становится неустойчивой, и при $Ra \sim 50000$ возникает неупорядоченное турбулентное движение.

8. Устойчивость плоскопараллельных течений. Течения в трубах и в пограничном слое. Выше рассматривались два примера применения метода возмущений к исследованию гидродинамической устойчивости. Однако с точки зрения экспериментатора или инженера оба эти примера являются довольно специальными; значительно более удобными для экспериментальной проверки и важными для приложений являются случаи течений в круглой трубе и обтекания плоской пластинки, которым именно поэтому и было уделено основное внимание в начале обзора. И если, тем не менее, в качестве иллюстрации метода возмущений прежде всего были рассмотрены течение между вращающимися цилиндрами и свободная конвекция в слое между двумя плоскостями постоянной температуры, то это объясняется тем, что в указанных двух случаях (по-видимому, из-за наличия дополнительных сил — центробежной в первом случае и архимедовой во втором) метод возмущений приводит к сравнительно простым задачам на собственные значения, позволяющим получить вполне законченные результаты. Что же касается до течений в трубах и в пограничном слое, то здесь применение метода возмущений наталкивается на очень значительные трудности, которые до сих пор никак еще нельзя считать полностью преодоленными.

В связи со сложностью математического анализа в случае течений в трубах и в пограничном слое имеющиеся исследования почти исключительно касаются простейших плоскопараллельных двумерных течений, которые в какой-то степени можно считать моделями упомянутых выше реальных течений. Поэтому здесь также начнем с рассмотрения вопроса об устойчивости плоскопараллельных течений и лишь затем укажем, в какой мере получаемые при этом результаты могут быть перенесены на течения в трубах и в пограничном слое. Заметим еще, что в силу уравнений гидродинамики стационарное плоскопараллельное течение жидкости с отличной от нуля вязкостью, при котором отлична от нуля лишь одна компонента $u_{x_1} = U$ поля скорости, зависящая только от координаты $x_2 = y$, возможно лишь при условии, что профиль $U(y)$ зависит от y квадратично, т. е. что течение представляет собой комбинацию течения Куэтта с линейным профилем скорости и течения Пуазейля с параболическим профилем. Учитывая, однако, что плоскопараллельные течения нас интересуют как возможные модели более сложных реальных течений, будем здесь рассматривать также и более сложные профили $U(y)$ в надежде на то, что получаемые при этом результаты можно будет затем применить и к потокам, не являющимся строго плоскопараллельными.

Итак, будем считать, что ось $x_1 = x$ направлена вдоль потока, ось $x_2 = y$ перпендикулярна к потоку и скорость основного течения задается произвольной функцией $U(y)$. Существенно отметить, что при нахождении критерия неустойчивости такого плоскопараллельного течения можно ограничиться рассмотрением лишь двумерных возмущений $u' = \{u'(x, y, t), v'(x, y, t)\}$, так как более общие трехмерные возмущения теряют устойчивость позже (при больших числах Рейнольдса), чем двумерные возмущения. Это утверждение, доказанное в 1933 г. Сквайром [39] (см. также Линь [1], § 3.1), можно пояснить, представив возмущение в виде суперпозиции элементарных компонент, имеющих вид плоских волн. Двумерным возмущениям будут соответствовать волны, распро-

страивающиеся вдоль основного потока, а трехмерным — волны, направление распространения которых не совпадает с направлением основного течения. Но нетрудно показать, что на волновую компоненту возмущения с заданным волновым вектором \mathbf{k} влияет только компонента скорости основного течения по направлению указанного волнового вектора, равная $U k_1/k$, где k_1 — компонента по оси x вектора \mathbf{k} , а $k = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{1/2}$ — его модуль. Таким образом, для волновых возмущений, распространяющихся под некоторым углом к основному течению, эффективное число Рейнольдса оказывается меньше, чем для возмущений, распространяющихся вдоль основного потока, и, следовательно, критическое число Рейнольдса для двумерных возмущений будет докритическим для трехмерных возмущений.

Уравнения (5.1) в применении к двумерным возмущениям плоскопараллельного течения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \Delta u' \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \Delta v' \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

Краевые условия для этих уравнений заключаются в обращении в нуль обеих компонент скорости u' и v' на ограничивающих поток стенках (или, в случае неограниченного потока, на бесконечности, т. е. при $y \rightarrow \infty$ или при $y \rightarrow -\infty$, или при $y \rightarrow \pm \infty$, в зависимости от характера неограниченности). Пользуясь уравнением неразрывности, перейдем в уравнениях (8.1) от компонент скорости u' и v' к функции тока ψ , полагая

$$u' = -\partial\psi/\partial y, \quad v' = \partial\psi/\partial x$$

Тогда для функции тока получается уравнение в частных производных

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta\psi - \frac{d^2U}{dy^2} \frac{\partial\psi}{\partial x} = \nu \Delta^2\psi \quad (8.2)$$

Для нахождения критерия неустойчивости необходимо найти решение $\psi(x, y, t)$ этого уравнения при указанных выше краевых условиях и при заданном начальном значении $\psi(x, y, 0) = \psi_0(x, y)$, где $\psi_0(x, y)$ — произвольная функция, отличная от нуля в ограниченной области пространства (и, конечно, удовлетворяющая краевым условиям и условию малости возмущения: $|\nabla\psi_0| \ll U$). Характер изменения со временем величины $\max_{x, y} |\psi(x, y, t)|$ будет зависеть от числа Рейнольдса основного течения: при достаточно малых Re эта величина всегда будет затухать, а при достаточно больших Re может оказаться иногда и возрастающей со временем. Граница между указанными областями значений Re (если она существует) и будет критическим числом Рейнольдса.

Решение сформулированной задачи является весьма сложным делом. Так как, однако, коэффициенты уравнения (8.2) не зависят от t и от x , это уравнение может иметь частные решения вида

$$\psi(x, y, t) = e^{ik(x-ct)} \varphi(y) \quad (8.3)$$

Если таких решений окажется достаточно много, так что решение $\psi(x, y, t)$ задачи с начальными условиями всегда можно будет разложить по «плоским волнам» (8.3) со всевозможными (вещественными) волновыми числами k , то и общая задача нахождения значения Re_* очень упростится. В самом деле, подставляя формулу (8.3) в уравнение (8.2), получим следующее обыкновенное уравнение для определения функции $\varphi(y)$:

$$(U - c)(\varphi'' - k^2\varphi) - U''\varphi = -\frac{i\nu}{k} (\varphi^{IV} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi) \quad (8.4)$$

(штрихи здесь означают производные по y). Уравнение (8.4) часто называют *уравнением Орра—Зоммерфельда*. Краевые условия для этого уравнения заключаются в обращении в нуль значений φ и φ' на границах потока. Однородное уравнение (8.4) с указанными однородными краевыми условиями будет иметь нетривиальные решения лишь при некоторых специальных значениях параметра c . Эти *собственные значения* задачи будут, вообще говоря, комплексными числами $c = c_1 + ic_2$, зависящими от волнового числа k и от вязкости ν (т. е. от числа Рейнольдса Re). Действительная часть c_1 будет иметь смысл скорости распространения волны, а мнимая часть c_2 будет определять изменение амплитуды волны со временем, которое описывается множителем $\exp(kc_2 t)$; при $c_2 < 0$ амплитуда будет затухать, при $c_2 = 0$ — оставаться постоянной (волна в этом случае называется *нейтральной*), а при $c_2 > 0$ — расти со временем. Таким образом, значение Re_* здесь определяется как то Re , при котором впервые $c_2(k, Re) = 0$ хотя бы при одном k .

Итак, в рассматриваемом случае для нахождения критерия неустойчивости надо определить только величину c_2 как функцию от k и Re . Заметим, что при значении $Re = Re_*$, при котором $c_2(k, Re)$ впервые обращается в нуль, вещественная часть c_1 собственного числа $c(k, Re)$ с $\text{Im} c = c_2 = 0$ не будет, вообще говоря, равна нулю. Это значит, что собственному числу c отвечает распространяющаяся вдоль оси x волна (8.3).

При значениях Re , немного превосходящих Re_* , найдется уже целый небольшой интервал значений k , при которых c_2 будет положительным (а c_1 — отличным от нуля).

Волны со значениями k из этого интервала образуют волновой пакет, который будет усиливаться со временем, перемещаясь одновременно вниз по течению (значение kc_2 будет наибольшим, где-то около центра указанного интервала значений k , поэтому вблизи этого центра $dkc_2/dk = 0$, и групповая скорость $dkc/dk \approx dkc_1/dk$ волнового пакета будет вещественной, т. е. будет представлять собой истинную скорость перемещения пакета (ср. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц [17], § 29).

В этом отношении рассматриваемая здесь неустойчивость, очевидно, отличается от неустойчивости течений, рассмотренных в § 6 и 7, в которых неустойчивые возмущения были неподвижными и в каждой фиксированной точке возрастали до конечной величины.

Подстановка в уравнение (8.4) какого-либо конкретного профиля скорости $U(y)$ приводит к весьма сложной задаче на собственные значения, решение которой требует выполнения громоздких расчетов. Для упрощения этих расчетов естественно начать с того, что попытаться воспользоваться экспериментальными данными, согласно которым критическое число Рейнольдса во всех плоскопараллельных потоках весьма велико, и, следовательно, при числах Рейнольдса, близких к критическому, слагаемые в правой части уравнения Орра — Зоммерфельда (8.4), описывающие действие сил вязкости на малое возмущение, малы по сравнению со слагаемыми в левой части. Поэтому можно попробовать пренебречь правой частью уравнения (8.4) и рассмотреть укороченное уравнение

$$(U - c)(\varphi'' - k^2\varphi) - U''\varphi = 0 \quad (8.5)$$

Это уравнение — второго порядка; поэтому теперь уже не следует требовать выполнения четырех краевых условий, а надо потребовать, как обычно для течений идеальной жидкости, чтобы на ограничивающих поток стенках обращалась в нуль лишь нормальная компонента скорости. Вспоминая определение функции тока ψ и формулу (8.3), заключаем, что на стенках должно быть $\varphi = 0$.

Однако полное пренебрежение вязкостью и использование укороченного уравнения (8.5) наталкиваются на ряд трудностей, связанных с тем, что при вещественных собственных значениях c (отвечающих нейтраль-

ным волнам, представляющим наибольший интерес для нахождения критерия неустойчивости) может найтись такое значение y (скажем, $y = y_0$), при котором соответствующее значение скорости основного потока $U(y_0) = U_0$ окажется равным c , так что точка y_0 будет особой точкой уравнения (8.5). Более того, еще Рэлей [40,41], а затем при более общих условиях Толмин [42] доказали, что при плоскопараллельном течении идеальной жидкости скорость c распространения нейтральных волн всегда оказывается меньше максимальной скорости основного потока, так что внутри течения обязательно образуется особая точка y_0 (ср. также Линь [1], § 8.2).

Если $U'(y_0) \neq 0$, то в окрестности этой точки можно положить $U(y) - c \approx U'(y_0)(y - y_0)$, и при $y \rightarrow y_0$ функция φ'' будет стремиться к бесконечности как $U''(y_0)\varphi(y_0) / U'(y_0)(y - y_0)$.

Поэтому x -компонента скорости нейтрального возмущения в окрестности особой точки будет иметь вид

$$u' \sim \varphi' \sim \frac{U''(y_0)\varphi(y_0)}{U'(y_0)} \log(y - y_0)$$

Таким образом, в случае нейтральной волны одно из двух линейно независимых решений укороченного уравнения (8.5) оказывается разрывным и многозначным, и возникает вопрос, какую ветвь получаемой многозначной функции следует выбирать. Кроме того, имеется еще одно затруднение, заключающееся в том, что при наличии у уравнения (8.5) комплексного собственного значения c комплексно-сопряженное число c^* также будет собственным значением, откуда следует, что наряду с затухающей волной в решение для функции тока всегда будет входить и возрастающая волна.

Вследствие перечисленных трудностей при изучении собственных функций уравнения (8.5), имеющих физический смысл, приходится все равно учитывать вязкость, т. е. рассматривать все четыре линейно независимых решения полного уравнения Орра — Зоммерфельда (8.4) и нужное решение укороченного уравнения (8.5) отбирать при помощи исследования асимптотического поведения решений этого уравнения четвертого порядка при $\nu \rightarrow 0$ (т. е. при $\text{Re} \rightarrow \infty$). В случаях, когда речь идет о нейтральных волнах (с вещественным c), вязкость приходится учитывать лишь в окрестности особой точки $y = y_0$, где, таким образом, вводится дополнительный «внутренний пограничный слой».

Перечислим теперь основные результаты, полученные при исследовании устойчивости плоскопараллельных течений невязкой жидкости. Еще в 1880 г. Рэлей [40] очень просто доказал, что если $U''(y)$ в пределах потока нигде не обращается в нуль, то укороченное уравнение (8.5) не может иметь собственных значений c с $\text{Im } c > 0$, а следовательно, и вообще комплексных собственных значений (см., например, Линь [1], § 4.3 или Шлихтинг [11], гл. XIV). В течение многих лет всеми принималось, что эта теорема Рэрея дает полное доказательство устойчивости (в смысле отсутствия возрастающих возмущений) плоскопараллельных течений невязкой жидкости, профиль скорости которых не имеет точки перегиба (заметим, что для идеальной жидкости с $\nu = 0$ любой профиль $U(y)$, очевидно, является допустимым с точки зрения уравнений движения, в отличие от положения, имеющегося в случае вязкой жидкости).

На самом деле, однако, дело обстоит не так просто, так как система собственных функций уравнения (8.5) вовсе не является полной (теорема М. В. Келдыша [23], которая упоминалась на стр. 16, оказывается неприменимой к этому уравнению из-за наличия здесь особенности у коэффициента при старшей производной).

Действительно, можно показать, что краевая задача для укороченного уравнения (8.5), как правило, при каждом фиксированном k будет иметь

лишь конечное число собственных функций, откуда сразу вытекает, что решение задачи Коши для уравнения (8.2) с нулевой правой частью далеко не при всяком выборе начального значения функции тока $\psi_0(x, y)$ может быть представлено в виде суперпозиции плоских волн вида (8.3). Поэтому из отсутствия у уравнения (8.5) собственных значений с положительной (или неотрицательной) мнимой частью еще нельзя сразу заключить, что все возмущения соответствующего ламинарного течения невязкой жидкости обязательно не будут возрастать (или будут затухать).

Лишь недавно Кейз [26] и Дикий [25] независимо один от другого тщательно проанализировали поведение при $t \rightarrow \infty$ общего решения задачи с начальными условиями для укороченного уравнения (8.2) (при $\nu = 0$) и показали, что возрастающие решения этого последнего уравнения действительно существуют лишь тогда, когда уравнение (8.5) имеет собственные значения s , у которых $\text{Im } s > 0$ (или кратные собственные значения s , у которых $\text{Im } s = 0$); тем самым они впервые строго оправдали вывод, который обычно делается из теоремы Рэлея. Что же касается до профилей $U(y)$ с точкой перегиба, то для них при некоторых дополнительных условиях, выполняющихся в большинстве практически интересных случаев, в силу одного результата Толмина [43] (см. также Линь [1]) уравнение (8.5) всегда будет иметь собственные значения s , у которых $\text{Im } s > 0$; отсюда немедленно вытекает, что течения невязкой жидкости с таким профилем скорости будут неустойчивыми. Таким образом, при отсутствии вязкости наличие точки перегиба у профиля скорости обычно является необходимым и достаточным условием для неустойчивости течения.

Заметим еще, что трудности, возникающие при исследовании неустойчивости плоскопараллельных течений идеальной жидкости, в случае жидкости с переменной по «высоте» (т. е. координате y) плотностью сохраняются даже и при наличии отличной от нуля вязкости, так как здесь соответствующее уравнение Орра — Зоммерфельда даже и при $\nu \neq 0$ будет иметь особенность в точке, в которой $U(y) = c$ (см., например, Л. А. Дикий [24]). Поэтому механическое перенесение на этот случай правил выбора ветви многозначных решений, разработанных для случая течений жидкости постоянной плотности, произведенное в работе Шлихтинга [44], нельзя считать имеющим какое-либо основание.

Вообще непосредственное сведение задачи об определении критерия неустойчивости к задаче на собственные значения здесь оказывается несостоятельным из-за неполноты соответствующей системы собственных функций, так что в случае течений жидкости переменной по высоте плотности и при $\nu = 0$ и при $\nu \neq 0$ приходится привлекать общий анализ асимптотического поведения решения произвольной задачи Коши. Возникающая при этом задача анализа является весьма трудной, и некоторые успехи здесь были достигнуты лишь в самые последние годы и притом лишь в предположении, что $\nu = 0$ (т. е. для идеальной жидкости).

А именно, Л. А. Дикий [24] и Кейз [27] независимо друг от друга исследовали асимптотическое поведение решения задачи Коши для функции тока возмущения в случае двумерного потока неоднородной тяжелой жидкости с экспоненциально убывающей плотностью, заполняющего неограниченное полупространство и имеющего линейный профиль скорости, и показали, что, как и в случае плоскопараллельных течений идеальной однородной жидкости, неустойчивость (в смысле наличия возрастающих возмущений) здесь может возникнуть лишь при существовании волновых возмущений вида (8.3) с возрастающими амплитудами (таких, что $\text{Im } s > 0$).

В силу результатов исследования волновых возмущений в таком потоке, произведенного еще в 1915 г. Дж. Тэйлором (но опубликованного лишь в 1931 г.; см. Тэйлор [45]), дополненного недавно более строгим математическим анализом поведения нулей бесчеловечных функций, независимо выполненным Л. А. Диким [46] и Дайсоном [47], отсюда вытекает, что рассматриваемый поток неоднородной жидкости будет устойчивым при всех значениях $\text{Ri} > 0$ (в противоречии с утверждениями, содержащимися в известных монографиях Прандтля [48], Шлихтинга [2, 11]).

Позже аналогичный же метод исследования был применен Майлсом [49] к общему случаю плоскопараллельного потока невязкой неоднородной тяжелой жидкости с любым профилем плотности $\rho(y)$ (таким, что $\rho'(y) < 0$ при всех y , так что плотность монотонно убывает по высоте) и любым профилем скорости $U(y)$; при этом им было доказано, что и здесь из существования неустойчивых возмущений вытекает также существование неустойчивых волн с функцией тока вида (8.3). Отсюда, в частности, следует, что рассматриваемый поток, наоборот, будет устойчивым, если во всех его точках $\text{Ri} > 1/4$. Этот последний результат был доказан также значительно более просто (при

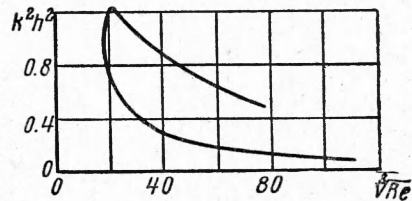
помощи некоторых интегральных неравенств, ачалогичных использовавшихся в свое время Рэлеем) и в более общих условиях Ховардом [20]. Кроме того, Кэйз [21] проанализировал также и поведение решения задачи Коши для возмущения находящегося в равновесии слоя жидкости с возрастающей по высоте плотностью; при этом он, естественно, нашел решения, неограниченно возрастающие с течением времени (ср. выше стр. 14).

Вернемся теперь снова к более сложному случаю течений вязкой жидкости; плотность при этом, как обычно, будет считаться постоянной. В этом случае нет оснований для сомнений в том, что любое решение уравнения (8.2) может быть представлено в виде суперпозиции «плоских волн» (8.3), так что здесь вполне можно ограничиться изучением задачи на собственные значения для уравнения Орра — Зоммерфельда (8.4). Первые попытки такого изучения, предпринятые около 1910 г. рядом авторов (В. Орр, А. Зоммерфельд, Р. Мизес, Л. Хопф и др.) в применении к плоскому течению Куэтта, привели к выводу, что это течение является устойчивым при всех числах Рейнольдса. Этот вывод казался, с одной стороны, довольно естественным (так как при $U''(y) = 0$ и $U'(y) \neq 0$ уравнение (8.5), очевидно, вовсе не имеет собственных значений, откуда всегда делался вывод, строго доказанный лишь в работах [26] и [25], что при отсутствии вязкости течение Куэтта устойчиво; действие же вязкости естественно, предполагалось стабилизирующим); но, с другой стороны, он явно противоречил эмпирическим фактам о турбулизации всех известных течений при достаточно больших числах Рейнольдса. В начале 20-х годов Прандтль [52] и Титъенс [53] рассмотрели вопрос об устойчивости течений с профилем скорости, составленным из отрезков прямых, и пришли к совсем уж неожиданному выводу, что при наличии вязкости такие течения будут неустойчивыми при любых (в том числе и сколь угодно малых) числах Рейнольдса. В 1924 г. появилась большая работа Гейзенберга [54], посвященная исследованию при помощи метода малых колебаний устойчивости плоского течения Пуазейля; в этой работе был получен казавшийся в то время парадоксальным (но оказавшийся тем не менее правильным) результат о том, что течение Пуазейля, которое при отсутствии вязкости будет устойчивым по отношению к малым возмущениям, в случае вязкой жидкости при достаточно больших числах Рейнольдса становится неустойчивым. Результат Гейзенберга, однако, долго вызывал серьезные сомнения, и доказательства устойчивости плоского течения Пуазейля продолжали публиковаться еще много лет (повидимому, последнее такое «доказательство» было дано Пекерисом в 1948 г.).

В 1929 г. Толмин [55] исследовал методом малых возмущений течение в пограничном слое, которое он рассматривал как плоскопараллельное и имеющее профиль скорости, составленный из отрезков прямых и парабол; при этом он впервые получил форму «кривой нейтральных возмущений» на плоскости (k, Re), отделяющей область устойчивых возмущений от неустойчивых возмущений. В дальнейшем Толмин [55] и Шлихтинг [56] перенесли эти результаты также и на случай произвольных профилей скорости. В 1944—1945 гг. вся теория устойчивости плоскопараллельных потоков была критически пересмотрена Линем [57], пересчитавшим заново основные примеры и уточнившим основные численные результаты Толмина и Шлихтинга. Тем не менее, сложность используемых при этом методов анализа асимптотического поведения решений уравнения (8.4) приводит к тому, что еще до сих пор полученные результаты в некоторых отношениях нельзя считать окончательными.

Выше отмечалось, что, строго говоря, плоскопараллельный поток вязкой жидкости может быть лишь комбинацией течений Куэтта и Пуазейля. В настоящее время мало кто сомневается в том, что плоское течение Куэтта является устойчивым по отношению к любым бесконечно малым возмущениям, хотя все имеющиеся доказательства этого факта, повидимому, все же не являются вполне строгими.

Более удовлетворительным представляется положение дел в отношении плоского течения Пуазейля: после того, как тщательные расчеты Линя, основанные на асимптотических разложениях специального типа, применимых при больших Re , подтвердили основной вывод Гейзенберга о неустойчивости этого течения и позволили найти форму кривой нейтральных возмущений $Im\,c(k, Re) = 0$, эти результаты были еще раз проверены Томасом [58] при помощи численного решения соответствующей задачи на собственные значения; в дальнейшем Шэнь [59] рассчитал по методу Линя для этой задачи также и форму кривых $Im\,c(k, Re) = const$, определяющих совокупность возмущений с заданной быстротой возрастания. Форма «нейтральной кривой» $Im\,c(k, Re) = 0$ (где $Re = Uh/\nu$, U — максимальная скорость невозмущенного течения, h — полуширина канала, т. е. половина расстояния между граничными плоскостями), полученная Линем, показана на фиг. 8;



Фиг. 8

критическое число Рейнольдса (ответающее самой левой точке этой кривой) здесь оказалось равным примерно 5300, причем ему отвечает $k \approx 1/h$ (по данным Томаса $Re_* \approx 5780$ при $k \approx \approx 1.02/h$). При $Re \rightarrow \infty$ обе ветви нейтральной кривой (и верхняя и нижняя) стремятся к нулю; таким образом, при увеличении Re возмущения с фиксированным (но не слишком большим) k сначала оказываются в области устойчивости (т. е. затухают), затем попадают в область неустойчивости, а затем опять в область устойчивости. Отсюда понятно, почему в пределе при $Re \rightarrow \infty$ (т. е. $\nu \rightarrow 0$) течение оказывается устойчивым относительно любых возмущений.

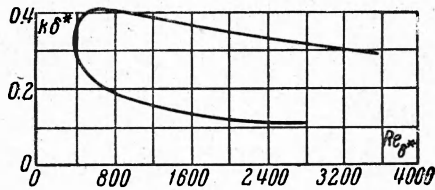
Результаты, полученные для плоскопараллельных течений, разумеется, не могут быть непосредственно применены к течению Пуазейля в трубе, имеющему совсем другую форму. Однако можно попытаться применить теорию возмущений и к этому последнему течению; в этом случае приходим к математической задаче, напоминающей ту, к которой сводится исследование устойчивости плоского течения Куэтта (ср. Претч [60]). Исследования устойчивости течения в трубе по отношению к возмущениям того или иного частного вида, проводившиеся разными авторами (см., например, Коркос и Селларс [61], где можно найти также дальнейшие ссылки), не обнаружили потери устойчивости, и в настоящее время большинство специалистов предполагают, что течение Пуазейля в трубе (так же, как и плоское течение Куэтта) устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям при всех числах Рейнольдса; однако строгое доказательство этого факта пока также отсутствует¹.

Что же касается течения в пограничном слое, то здесь можно с большим основанием рассчитывать на возможность применения теории устойчивости плоскопараллельных течений, так как толщина пограничного слоя возрастает сравнительно медленно, и вертикальная скорость здесь значительно меньше горизонтальной. Поэтому Толмин и Шлихтинг в своих расчетах много внимания уделили устойчивости плоскопараллельного течения с профилем скорости, совпадающим или близким к кривой Блазиуса, определяющей профиль скорости в ламинарном пограничном слое (см., например, Шлихтинг [11]).

¹ Заметим, что в связи с наличием особой точки при $r = 0$ общее решение задачи с начальными условиями здесь опять не может быть разложено по простейшим «волновым решениям», так что общее исследование устойчивости не сводится к задаче на собственные значения (ср. Коркос и Селларс [61]). Поэтому вопрос об устойчивости здесь не выяснен даже для простейших осесимметричных возмущений (не зависящих от угла φ), для которых отсутствие возрастающих волновых возмущений было доказано в работе [61].

В результате они сумели построить кривую $\text{Im } c(k, \text{Re}) = 0$, т. е. определить границу области неустойчивости в плоскости (k, Re) , имеющую по их данным примерно ту же форму, что и кривая $\text{Im } c(k, \text{Re}) = 0$ на фиг. 8. Критическое число Рейнольдса $\text{Re}_{\delta^*} = (U\delta^*/\nu)_*$, где δ^* — так называемая толщина вытеснения пограничного слоя (см. [11]), по Толмину оказалось равным 420, а по Шлихтингу — 575; это означает, что число $\text{Re}_{x_*} = (Ux/\nu)_* = 0.6 \cdot 10^5$ по Толмину и $\text{Re}_{x_*} = 1.1 \cdot 10^5$ по Шлихтингу.

Тот факт, что эти значения Re_{x_*} несколько ниже указанных в § 1, может, естественно, объясняться тем, что потеря устойчивости вовсе не должна сопровождаться мгновенным переходом к турбулентному режиму; в точке потери устойчивости лишь возникают нарастающие колебания, которые усиливаются, сносясь вниз по течению, и при каком-то большем x вызывают переход к развитой турбулентности. С другой стороны, однако, полученные значения Re_{x_*} сами по себе никак не могут рассматри-



Фиг. 9

ваться и как подтверждающие теорию Толмина — Шлихтинга, и поэтому неудивительно, что еще в 1938 г. Тейлор [62] высказывал сомнение в законности применения этой теории к реальному течению в пограничном слое, не являющемуся на самом деле плоскопараллельным.

Однако непосредственная экспериментальная проверка теории Тол-

мина — Шлихтинга, произведенная в 1947 г. Шубауэром и Скрэмстедом [63], как раз на примере течения в пограничном слое подтвердила в основных чертах все ее выводы и тем самым показала, что сомнения в правильности этой теории не являются основательными; после этого Линь [57] и Шэнь [59] еще раз повторили расчеты Толмина и Шлихтинга и получили снова значение $\text{Re}_{\delta^*} = 420$, но несколько отличающуюся от прежних форму границы области неустойчивости, показанную на фиг. 9.

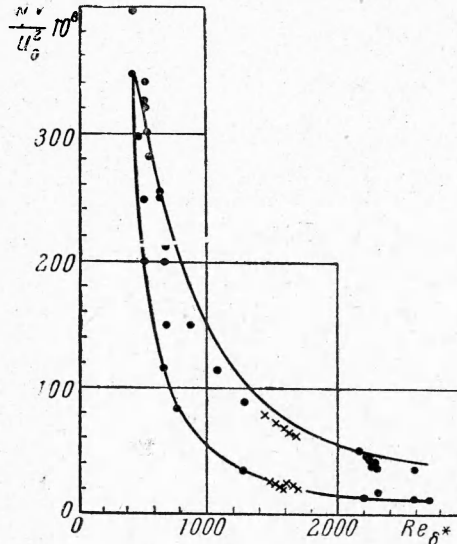
Упомянутые выше опыты Шубауэра и Скрэмстеда производились в аэродинамической трубе Национального бюро стандартов США в Вашингтоне, обладающей особенно малой начальной турбулентностью; параметр U'/U в этой трубе при соблюдении некоторых специальных мер предосторожности может быть доведен до значений порядка 0.0003—0.0002. Это обстоятельство оказалось очень важным, так как некоторые имеющиеся в настоящее время результаты показывают, что при значениях U'/U , превышающих 0.002 (т. е., в частности, при значениях, имевшихся во всех старых опытах) переход к турбулентности, по-видимому, вызывается влиянием конечных возмущений во внешнем потоке в соответствии с описанной в § 2 схемой Тэйлора, и лишь при $U'/U < 0.002$ основную роль играют малые возмущения синусоидальной формы, амплитуда которых при некоторых условиях возрастает вниз по течению в полном соответствии с выводами теории возмущений.

Подобные правильные колебания были обнаружены Шубауэром и Скрэмстедом при помощи тщательных термоанемометрических наблюдений еще в 1940 г.; в дальнейшем для более аккуратной проверки выводов теории эти авторы использовали также помещенную в пограничный слой тонкую металлическую ленту, приводимую в колебание при помощи электромагнита и создающую искусственные возмущения фиксированной частоты ω . При этом им удалось обнаружить нейтральные (не возрастающие и не затухающие) колебания, соответствующие точкам граничной кривой на диаграмме устойчивости.

Для сопоставления этих данных с выводами теории удобно рассмотреть вместо возмущений вида (8.3) с фиксированным волновым числом k возмущения вида $\psi = \exp[i(kx - \omega t)]$ $\psi(y)$ с фиксированной (вещественной) частотой ω и переменным (вообще говоря, комплексным) k , т. е. ис-

следовать вопрос об изменении вдоль пластинки (т. е. с ростом x) возмущений заданной частоты ω , создаваемых в фиксированной точке потока. При этом можно рассчитать кривую $\text{Im } k(\omega, \text{Re}) = 0$ и получить таким образом форму области неустойчивости на плоскости (ω, Re) .

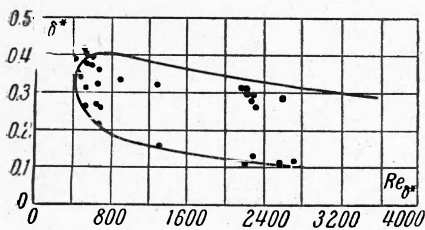
Результаты такого подсчета (по данным Шэня [59]) приведены на фиг. 10 вместе с эмпирическими точками Шубауэра и Скрэмстеда для частот нейтральных возмущений; совпадение теории с опытом здесь оказывается удовлетворительным. Впоследствии опыт Шубауэра и Скрэмстеда был повторен также Бэрнсом, Чайлдсом, Николом и Россом [64], использовавшими вместо термоанемометра помещенную в поток посеребренную пластинку; пульсации этой пластинки, создаваемые y -компонентой скорости потока, вызывали пульсации отражения направленного на нее пучка света, которые легко поддавались измерению. Результаты, полученные этими авторами, указаны на фиг. 10 крестиками; они также хорошо совпадают с выводами теории¹. На фиг. 11 приведены эмпирические данные Шубауэра и Скрэмстеда, касающиеся на этот раз волновых чисел нейтральных возмущений; они также не плохо укладываются на теоретическую кривую фиг. 9. Дальнейшие данные, касающиеся сравнения эмпирических данных Шубауэра и Скрэмстеда с выводами теории, можно найти в книгах Линя [1] и Шлихтинга [2, 11] и в обзорной статье Драйдена [65].



Фиг. 10

Аналогично проводятся также расчеты нейтральной кривой в случае более сложных профилей скорости в пограничном слое, соответствующих обтеканию искривленных поверхностей и течениям с градиентом давления во внешнем потоке.

Любопытно, что форма полученной кривой при этом существенно зависит от того, имеет ли профиль скорости точку перегиба (т. е. обращается ли $U''(y)$ в нуль при некотором $y > 0$) или нет. В последнем случае граница области устойчивости имеет тот же характер, что и на фиг. 8 и 9, т. е. при $\text{Re} \rightarrow \infty$ она стягивается к оси абсцисс, так что любые возмущения фиксированной длины волны или частоты при возрастании Re в конце концов становятся устойчивыми. В первом же случае верхняя граница области устойчивости имеет конечную асимптоту (фиг. 12), т. е. здесь



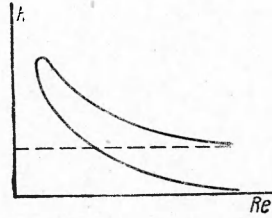
Фиг. 11

существуют возмущения, неустойчивые при сколь угодно больших числах Рейнольдса. Это обстоятельство, очевидно, непосредственно связано

¹ В работе [64] отмечается, что полученные экспериментальные результаты со старой нейтральной кривой Шлихтинга [56] согласуются даже немного лучше, чем с кривой, рассчитанной Линем и Шэнем. Однако результаты эти все относятся к той части нейтральной кривой, относительно которой результаты Шлихтинга и результаты Линя и Шэня очень мало расходятся; поэтому их никак нельзя считать решающими при сравнении соответствующих теоретических кривых.

с определяющей ролью наличия точки перегиба профиля скорости для неустойчивости течений идеальной жидкости.

9. Устойчивость по отношению к конечным возмущениям. Возрастные возмущения и переход к турбулентности. Рассмотренная выше теория возмущений позволяет во многих случаях теоретически определить условия потери устойчивости ламинарных течений и тем самым выяснить некоторые важные обстоятельства, связанные с переходом к турбулентности. Совершенно ясно, однако, что сама по себе потеря устойчивости еще не является таким переходом и что линейная теория, о которой шла речь в § 5—8, в лучшем случае может описать лишь самое начало процесса возникновения турбулентности, но не дать полную картину этого процесса.



Фиг. 12

Кроме того, в случае некоторых важных течений, таких как, например, течение Куэтта между двумя плоскостями или течение Пуазейля в трубе, теория возмущений в принципе не может помочь объяснению наблюдаемого на опыте возникновения турбулентности, так как эти течения, по-видимому, оказываются всегда устойчивыми относительно бесконечно малых возмущений; в других же случаях, как, например, в случае течения Пуазейля между двумя плоскостями (близком к реальному течению в плоском канале), теория устойчивости хоть и приводит к выводу о возможности потери устойчивости, но дает значительно более высокие значения Re_* , чем те, при которых на самом деле происходит турбулизация потока. Наконец, принципиальное различие между движениями, возникающими после потери устойчивости течения между вращающимися цилиндрами или состояниями покоя подогретой снизу жидкости, с одной стороны, и плоского течения Пуазейля или течения в пограничном слое, с другой стороны, также никак не может быть объяснено линейной теорией возмущений. Все эти обстоятельства заставляют придавать большое значение разработке более полной нелинейной теории возникновения турбулентности, находящейся пока что еще только в самой начальной стадии своего развития.

Простейший подход, позволяющий исследовать вопрос об устойчивости потока по отношению к возмущениям конечной амплитуды, связан с применением так называемого «энергетического метода», использовавшегося еще Рейнольдсом [5] и являющегося, таким образом, даже более старым, чем метод теории возмущений. Сущность энергетического метода состоит в подсчете баланса энергии течения, содержащего возмущения, для выяснения условий, при которых энергия возмущений будет возрастать (или, наоборот, убывать) во времени.

Рассмотрим в качестве примера простейший случай параллельного течения между двумя плоскостями, в котором невозмущенная скорость направлена вдоль оси x и зависит только от y . Используя безразмерные координаты x, y (измеренные в единицах расстояния h между плоскостями), безразмерные скорости (измеренные в единицах типичной скорости U основного потока) и безразмерное время t (измеренное в единицах h/U) можно записать уравнение баланса энергии возмущений в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{u^2 + v^2}{2} dx dy = - \iint uv \frac{dU}{dy} dx dy - \frac{1}{Re} \iint \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (9.1)$$

где $U(y)$ — скорость основного потока, u, v — компоненты скорости возмущений и интегралы распространены на весь объем потока. Здесь первый член справа описывает обмен энергией между основным течением и полем возмущений и во многих случаях является положительным (пе-

ренос энергии обычно происходит от главного течения к возмущениям), а второй член описывает вызванную вязкостью диссипацию энергии возмущений и всегда является отрицательным. Относительная величина двух членов в правой части (9.1) и определяет, будет ли энергия возмущения убывать или возрастать.

В рассматриваемом здесь двумерном случае в силу уравнения неразрывности $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$ можно ввести функцию тока ψ , положив $u = -\partial\psi/\partial y$, $v = \partial\psi/\partial x$. Тогда условие неустойчивости $dE/dt \geq 0$ можно будет записать в виде

$$\frac{1}{\text{Re}} \leq \iint \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dU}{dy} dx dy / \iint (\Delta\psi)^2 dx dy = F[\psi] \quad (9.2)$$

Максимум функционала $F[\psi]$ на множестве всевозможных функций ψ , удовлетворяющих заданным граничным условиям, будет, таким образом, иметь смысл $1/\text{Re}_{*\min}$, так как при числах Рейнольдса, меньших обратной величины этого максимума, энергия возмущения, наверное, будет убывать. Ясно, однако, что получаемые таким образом значения $\text{Re}_{*\min}$ вполне могут оказаться заниженными, так как от поля скорости возмущения здесь требуется только, чтобы оно удовлетворяло уравнению неразрывности и краевым условиям, но не учитывается, что сумма этого поля и поля скорости основного движения должна удовлетворять системе динамических уравнений. И действительно, попытки определения критерия неустойчивости энергетическим методом на основе подсчета значений $F[\psi]$ для некоторых специальных ψ или решения соответствующей вариационной задачи, предпринимавшиеся Лоренцом [66], Орром [67], Гамелем [68], Карманом [69] и другими исследователями, все привели к чрезмерно малым значениям $\text{Re}_{*\min}$ (примерно на порядок меньшим реально наблюдающихся значений критического числа Рейнольдса)¹. Анализируя это обстоятельство, Г. И. Петров [71] пришел к выводу, что экстремали ψ , обращающие $F[\psi]$ в максимум, по-видимому, во всех случаях не описывают никакого динамически возможного движения. Таким образом, энергетический метод и не может дать точного значения $\text{Re}_{*\min}$, а приводит лишь к очень грубым оценкам, не представляющим значительного интереса.

Более перспективным (но и гораздо более трудным) представляется подход к исследованию поведения конечных возмущений, основанный на рассмотрении полной системы нелинейных уравнений гидродинамики. При этом интерес представляет и исследование возмущений в потоке с числом Рейнольдса, меньшим определяемого из линейной теории возмущений числа Re_* (т. е. задача об определении критического числа Рейнольдса по отношению к конечным возмущениям), и исследование возмущений при $\text{Re} > \text{Re}_*$ (т. е. задача об изучении дальнейшей эволюции неустойчивых согласно линейной теории бесконечно малых возмущений). В настоящее время, однако, в отношении обеих указанных здесь задач имеется еще очень мало результатов, причем почти все они относятся лишь к случаю чисел Re , мало отличающихся от Re_* (по поводу более точной оценки области допустимых значений $|\text{Re} - \text{Re}_*|$ см. работу Стюарта [72]).

Наиболее общие закономерности поведения конечных возмущений при Re , близком к Re_* , были указаны Л. Д. Ландау [73] (см. также Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц [17], § 27). Будем сначала считать, что $\text{Re} > \text{Re}_*$, но $\text{Re} - \text{Re}_*$ мало. Так как при $\text{Re} = \text{Re}_*$ впервые появляется малое возмущение с частотой ω , имеющей нулевую мнимую часть, то при малом

¹ В качестве примера укажем, например, что в недавней работе Серрина [70] (являющейся одной из последних работ, использующих энергетический метод) для сравнительно широкого класса течений было показано лишь, что $\text{Re}_{*\min}$ не может быть меньше, чем 5.71!

положительном $\text{Re} - \text{Re}_*$ будет существовать инфинитезимальное возмущение с полем скорости вида

$$u(x, t) = A(t) f(x) \quad (A(t) = e^{\gamma t - i\omega_1 t}, \gamma > 0) \quad (9.3)$$

Здесь $\gamma \rightarrow 0$ при $\text{Re} \rightarrow \text{Re}_*$ (так что $\gamma \ll |\omega_1|$ при достаточно малом $\text{Re} - \text{Re}_*$). Ясно, что $|A|^2$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma |A|^2 \quad (9.4)$$

Однако, так обстоит дело лишь согласно линейной теории возмущений; возрастание же $|A|^2$ приводит к тому, что эта теория, в конце концов, перестает действовать и должна быть заменена более полной теорией, учитывающей нелинейные по возмущениям члены уравнений гидродинамики. Правую часть уравнения (9.4) при этом можно рассматривать как первый член разложения $d|A|^2/dt$ в ряд по степеням A и A^* (где звездочкой обозначена комплексно-сопряженная величина).

В следующем приближении (действующем при больших t) необходимо учесть еще и следующие по порядку члены этого ряда. Следующие члены — это члены третьего порядка; однако надо учесть, что движение (9.3) сопровождается быстрыми (по сравнению с характерным временем $1/\gamma$ возрастания амплитуды) периодическими колебаниями, описываемыми множителем $e^{-i\omega_1 t}$ в выражении для $A(t)$. Эти периодические колебания нам не интересны; поэтому для их исключения имеет смысл осреднить выражение $d|A|^2/dt$ по периоду времени, большому по сравнению с $2\pi/\omega_1$ (но малому по сравнению с $1/\gamma$). Так как члены третьего порядка по A и A^* , очевидно, все будут содержать периодический множитель, то они выпадут при таком осреднении; среди членов же четвертого порядка после осреднения сохранится лишь слагаемое, пропорциональное $|A|^4$. Таким образом, сохраняя слагаемые не выше четвертого порядка, будем иметь уравнение

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma |A|^2 - \delta |A|^4 \quad (9.5)$$

где δ может быть и больше и меньше нуля (так как период осреднения много меньше $1/\gamma$, то величины $|A|^2$ и $|A|^4$ при осреднении практически не меняются, так что (9.5) будет точным уравнением для амплитуды осредненного возмущения). Общее решение этого уравнения может быть записано в виде

$$|A(t)|^2 = \frac{C e^{2\gamma t}}{1 + (\delta/2\gamma) C e^{2\gamma t}} \quad (|A(0)|^2 = \frac{C}{1 + C\delta/2\gamma}) \quad (9.6)$$

Если $\delta > 0$ и $|A(0)|$ достаточно мало, то амплитуда $|A(t)|$ сначала возрастает экспоненциально (в соответствии с линейной теорией), но затем скорость этого возрастания убывает, и при $t \rightarrow \infty$ амплитуда стремится к конечному значению $(2\gamma/\delta)^{1/2}$ (не зависящему от $|A(0)|$). Это предельное значение пропорционально $\sqrt{\gamma}$, но так как γ — функция от числа Рейнольдса, которая обращается в нуль при $\text{Re} = \text{Re}_*$ и может быть разложена в ряд по степеням $\text{Re} - \text{Re}_*$ (последнее может быть выведено из теории возмущений), то $\gamma \sim \text{Re} - \text{Re}_*$ и $|A|_{\max} \sim (\text{Re} - \text{Re}_*)^{1/2}$ при малых $\text{Re} - \text{Re}_*$.

Если же $\delta < 0$, то решение (9.6) при конечных значениях t достигает столь больших значений, что далее уже приходится отказаться от использования уравнения (9.5), полученного при помощи разложения по степеням $|A|$. В этом случае, однако, уравнение (9.5) может быть использовано для исследования поведения конечных возмущений при $\text{Re} < \text{Re}_*$.

В самом деле, при $Re < Re_*$ коэффициент γ , очевидно, будет отрицательным, т. е. малое возмущение вида (9.3) будет затухать; так как следующий член $-\delta |A|^4$ уравнения (9.5) положителен при $\delta < 0$, то при достаточно большом $|A|^2$ производная $d|A|^2/dt$ (осредненная по соответствующему выбранному периоду времени) может стать положительной, т. е. по отношению к конечному возмущению движение будет неустойчивым уже при $Re < Re_*$.

При не слишком больших амплитудах, при которых можно пользоваться уравнением (9.5), амплитуда $|A|$ будет возрастать, если $|A| > (2|\gamma|/|\delta|)^{1/2}$. Учитывая еще, что $|\gamma| \sim Re_* - Re$, найдем, что относительно возмущений заданной амплитуды $|A|$ поток будет неустойчив при $Re > Re_{*A} = Re_* - \alpha |A|^2$, $\alpha > 0$. Отсюда ясно, что в этом случае Re_{*min} будет меньше значения Re_* , даваемого линейной теорией; точный подсчет Re_{*min} , однако, не может быть сделан на основе приближенного уравнения (9.5), так как он требует определения числа Re_{*A} для сколь угодно больших значений $|A|$.

Перейдем теперь снова к случаю $\delta > 0$, $Re > Re_*$, рассматривавшемуся выше. Мы видим, что здесь разрастание возмущения (9.3) при Re , немного превосходящем Re_* , можно описать как мягкое самовозбуждение элементарного осциллятора, приводящее в конце концов к появлению установившегося периодического колебания с определенной конечной амплитудой (a_0 на фиг. 5, б). При этом существенно, что уравнение (9.5) определяет только амплитуду этого колебания; фаза же его не определяется однозначно внешними условиями, а зависит от случайных начальных значений возмущения, т. е. фактически может быть произвольной. Таким образом, предельный режим установившихся колебаний рассматриваемого осциллятора характеризуется наличием одной степени свободы (в отличие от стационарного ламинарного течения, однозначно определяемого граничными условиями и поэтому вовсе не обладающего степенями свободы).

При дальнейшем возрастании Re это установившееся периодическое движение само может стать неустойчивым по отношению к малому возмущению $u_2(x, t)$. Исследование такой неустойчивости потока $U(x) + u_1(x, t)$ в принципе можно произвести при помощи обычного метода возмущений, отыскивая частные решения линейного уравнения относительно $u_2(x, t)$ вида $u_2 = \exp(-i\omega t) f(x, t)$ (где f — периодическая функция t периода $2\pi/\omega_1$) и определив частоту $\omega = \omega_2$, у которой при возрастании Re прежде всего (при $Re = Re_{*2}$) появляется положительная мнимая часть. Тогда при Re , немного большем Re_{*2} , колебание с этой частотой будет возрастать до некоторого конечного предела, т. е. возникнет квазипериодическое колебание с двумя периодами $2\pi/\omega_1$ и $2\pi/\omega_2$, обладающее уже двумя степенями свободы (фазами колебаний). При дальнейшем возрастании Re все новые и новые осцилляторы приходят в колебательный режим, причем интервалы между соответствующими «критическими» числами Рейнольдса все уменьшаются, а возникающие колебания становятся все более высокочастотными и мелкомасштабными. В результате при достаточно большом Re движение оказывается имеющим очень много степеней свободы и очень сложным и запутанным. Этому движению соответствует «предельный цикл» фазовых траекторий, в котором некоторые обобщенные координаты потока принимают фиксированные значения, а изменяются со временем (по формулам вида $\varphi(t) = \omega t + \alpha$) лишь координаты, отвечающие фазам соответствующих осцилляторов.

Траектория, образующая предельный цикл, занимает в фазовом пространстве область, соответствующую всевозможным наборам начальных фаз колебаний осцилляторов и с течением времени проходит практически через все точки этой области. Действительно, в моменты времени $t_n = 2\pi n/\omega_1$, $n = 1, 2, \dots$, в которые фаза $\varphi_1 = \omega_1 t + \alpha_1$ имеет значение α_1 (значения фазы, отличающиеся целым кратным 2π , очевидно, можно не различать), фаза $\varphi_2 = \omega_2 t + \alpha_2$ любого другого колебания будет принимать значения $2\pi n \omega_2/\omega_1 + \alpha_2$, которые в силу того, что отдельные частоты ω_1 и ω_2 будут, вообще говоря, несоизмеримыми, после приведения к интервалу $[0, 2\pi]$ могут при подходящем n стать сколь угодно близкими к любому наперед заданному числу из этого интервала. Иначе говоря, развитое турбулентное движение обладает определенной «эргодичностью», проявляющейся в том, что в течение долгого времени жидкость проходит через состояния, сколь угодно близкие к любым другим состояниям, возникающим при любых других начальных условиях.

Приведенные общие соображения Л. Д. Ландау [73, 17] представляют весьма убедительными и наглядными; однако надо иметь в виду, что пока еще они ни в одном конкретном случае не были подтверждены непосредственными расчетами и что описываемый ими механизм возникновения развитой турбулентности заведомо не является универсальным. Так, например, в случае течения Пуазейля в трубе число $Re_* = Re_{*max}$, определяемое из линейной теории возмущений, по-види-

тому, равно бесконечности, и турбулентное движение здесь возникает в результате неустойчивости по отношению к конечным возмущениям¹, причем оно с самого начала, вероятно, обладает очень большим числом степеней свободы. При возникновении турбулентности в пограничном слое на плоской пластинке существенную роль, по-видимому, играет то обстоятельство, что возникающие при некотором числе Рейнольдса возмущения здесь переносятся основным потоком в области течения с большим числом Рейнольдса.

В последние годы изучению особенностей возникновения турбулентности в пограничном слое был посвящен ряд работ (см., например, Шлихтинг [2], § 14, Элдер [12], Клебанов, Тидстром и Саргент [75], где можно найти также ссылки на дальнейшую литературу); однако полученные при этом результаты (никак не укладывающиеся в рамки развитых выше соображений) пока еще не могут претендовать на законченность, и поэтому мы на них не будем останавливаться. Значительно более напоминает описанный здесь механизм возникновения турбулентности появление «турбулентного следа» при обтекании конечных тел (ср. выше стр. 8); в этом случае имеющиеся эмпирические данные, по-видимому, могут быть объяснены предположением, что в потоке, обтекающем тело, $\delta > 0$, а критические числа Рейнольдса для неустойчивости различного порядка весьма близки. К сожалению, расчет критического числа Рейнольдса для обтекания конечного тела даже в рамках линейной теории представляет собой очень сложную задачу, не поддающуюся точному математическому решению; поэтому количественное сопоставление развитой выше теории с имеющимися эмпирическими данными о турбуликации следа пока еще не представляется возможным.

Более изученными, как известно, являются случаи течения между двумя вращающимися цилиндрами, свободной конвекции между двумя плоскостями и течения Пуазейля между двумя плоскостями, для которых линейная теория дает точные значения Re_* (или Ra_*). В первых двух из перечисленных трех случаев движение, возникающее при $Re = Re_*$ (или $Ra = Ra_*$), является стационарным (т. е. $\omega_1 = 0$); тем не менее, развитые выше соображения могут быть применены и к этим потокам, так как возмущающее движение здесь зато оказывается периодическим относительно некоторых пространственных координат (координаты z в первом случае и координат x и y во втором), и вместо осреднения по времени можно воспользоваться осреднением по соответствующей прямой или плоскости.

Другое осложнение в этих случаях возникает в связи с тем, что неустойчивые возмущения здесь относятся к непрерывному спектру (они зависят от меняющегося непрерывно волнового числа k); однако и это обстоятельство в конце концов не оказывается принципиальным, так как эмпирические данные явно показывают, что при малых положительных значениях $Re - Re_*$ (или $Ra - Ra_*$) «выживают» только конечные возмущения с одним определенным волновым числом.

Далее, существуют определенные соображения, показывающие, что при $Re < Re_*$ (или $Ra < Ra_*$) здесь не может существовать стационарных конечных возмущений с $d|A|^2/dt = 0$ (ср. работу В. С. Сорокина [76], относящуюся к задаче о свободной конвекции); в то же время анализ нелинейных уравнений соответствующей задачи показывает, что при $Re = Re_*$ (или $Ra = Ra_*$) происходит «разветвление» стационарных решений этих уравнений и наряду с обычными ламинарными решениями появляются дополнительные стационарные решения, отличающиеся от обычных периодическими по пространству членами, амплитуда которых при малых значениях $Re - Re_*$ (или $Ra - Ra_*$) пропорциональна $(Re - Re_*)^{1/2}$

¹ Заметим, впрочем, что в работе Тацуми [74] была предпринята попытка объяснить возникновение турбулентного течения в круглой трубе на основе линейной теории возмущений, прилагаемой к области течения у входа в трубу, где еще не успел образоваться параболический профиль Хагена — Пуазейля.

[или $(Ra - Ra_*)^{1/2}$]; ср. относящиеся к задаче о конвекции работы В. С. Сорокина [76], Л. П. Горькова [77] и Малкуса и Верониса [78].

Все эти обстоятельства дают основание предположить, что в случаях течения между вращающимися цилиндрами при $Re > Re_*$ и свободной конвекции между двумя плоскостями при $Ra > Ra_*$ мы сталкиваемся как раз с мягким самовозбуждением колебаний (только пространственных, а не временных) по схеме Ландау с $\delta > 0$; имеющиеся эмпирические данные (см. выше § 6 и 7) показывают также, что возникающее здесь стационарное движение является устойчивым для весьма большого интервала значений Re (или Ra), так что критические числа Re (или Ra) первого и второго порядков здесь оказываются очень широко раздвинутыми по отношению один к другому.

Дальнейшее изучение этого вопроса содержится в работе Стюарта [79] и в неопубликованной пока работе Стюарта и Уатсона (содержание которой кратко описано в [72]).

В первой из этих работ было рассмотрено движение между двумя цилиндрами радиусов R_1 и R_2 (при условии, что $d = R_2 - R_1 \ll (R_1 + R_2)/2$), внутренний из которых вращается с угловой скоростью Ω_1 , а внешний неподвижен, при так называемом числе Тэйлора $Ta = \Omega_1^2 R_1 d^3 / \nu^2$, немного превосходящем критическое значение $Ta_* = 1708$, соответствующее точке потери устойчивости. Предположив, что в момент $t = 0$ в указанном потоке возникло неустойчивое согласно линейной теории возмущение, Стюарт рассмотрел дальнейшую эволюцию этого возмущения, предположив, что его форма мало изменяется со временем (ср. формулу (9.3)). В таком случае, исходя из уравнения баланса энергии (являющегося следствием уравнений движения), ему удалось показать, что амплитуда $A(t)$ возникшего возмущения будет описываться уравнением вида (9.5), где коэффициенты γ и δ явно выражаются через число Тэйлора Ta , число Рейнольдса $Re = \Omega_1 R_1 d / \nu$, волновое число $k = k_*$ и собственную функцию соответствующей линейной задачи на собственные значения, подсчитанную Чандрасекаром [80]. При этом оказывается, что здесь действительно $\delta > 0$, и, значит, существует конечное значение $|A|_{\max}$, оказывающееся равным

$$\frac{253}{Re} \left(\frac{Ta - Ta_*}{Ta} \right)^{1/2}$$

Зная $|A|_{\max}$ и форму возникающего возмущения (приблизительно даваемую линейной теорией), Стюарт смог рассчитать также и момент сил трения, действующих на поверхность цилиндров, который вплоть до чисел Ta , почти в десять раз превышающих Ta_* , оказался весьма близким к данным непосредственных измерений Тэйлора [81]. Согласно сообщению в [72] Стюарт и Уатсон выполнили аналогичный анализ и в применении к задаче о свободной конвекции и получили, что здесь также при $Ra > Ra_*$ возникшее неустойчивое возмущение будет возрастать в соответствии с уравнением (9.5) с $\delta > 0$, приближаясь при $t \rightarrow \infty$ к стационарному решению соответствующей системы нелинейных уравнений, отличному от простого состояния покоя.

Более сложным является вопрос о построении нелинейной теории возмущений в случае течения Пуазейля между двумя плоскостями. Первая попытка в этом направлении была предпринята Мексиним и Стюартом [82], получившими при ряде упрощающих предположений, что для плоского течения Пуазейля критическое число Рейнольдса убывает при возрастании амплитуды $|A|$ начального возмущения, как это должно быть при $\delta < 0$. С другой стороны, в более поздней работе Стюарта [79] для получения уравнения вида (9.5) было использовано уравнение баланса энергии (9.4), и здесь уже при некоторых других упрощающих предположениях было показано, что $\delta > 0$.

В этой связи Стюарт [72] и Уатсон [83] предприняли недавно более полный анализ поведения конечных возмущений в плоском течении Пу-

азейля при Re , близком к Re_* ; в результате они снова получили уравнение вида (9.5) для амплитуды возмущений, причем коэффициент δ на этот раз оказался суммой трех слагаемых (имеющих вполне определенный физический смысл), не все из которых были правильно учтены и в работе Мексина и Стюарта [82], и в работе Стюарта [79]. Оказалось также, что для всех этих слагаемых могут быть даны явные выражения, содержащие некоторые функции, определяемые по собственной функции и собственному значению задачи на собственные значения линейной теории возмущений, описывающим нарушение устойчивости при $Re = Re_*$, при помощи решения двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка.

Однако численный подсчет этих функций и нахождение по ним точного значения коэффициента δ , позволяющее окончательно решить вопрос о его знаке, представляют собой очень сложную задачу численного анализа, решение которой пока еще никем не было получено; поэтому и на вопрос о поведении конечных возмущений в плоском течении Пуазейля пока нельзя дать никакого окончательного ответа.

Из настоящего обзора видно, что в теории гидродинамической устойчивости (и в той ее части, которая касается лишь бесконечно малых возмущений, и, особенно, в части, учитывающей конечные возмущения) до сих пор еще имеется довольно много нерешенных вопросов. Однако основной вывод о связи возникновения турбулентности с неустойчивостью ламинарных течений в настоящее время можно считать имеющим достаточно надежное обоснование.

Поступила 19 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Lin C. C. The theory of hydrodynamic stability. Cambridge, 1955. (Русск. пер.: Ц. Ц. Линь. Теория гидродинамической устойчивости. М., ИИЛ, 1958.)
2. Schlichting H. Entstehung der Turbulenz, Handbuch der Physik, Bd. 8, Berlin, 1959. (Русск. пер.: Г. Шлихтинг. Возникновение турбулентности. М., ИИЛ, 1962.)
3. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford, Clarendon Press, 1961.
4. Hagen G. Über die Bewegung des Wassers in engen zylindrischen Röhren. Pogg. Ann., 1839, Bd. 46, 423.
5. Reynolds O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels. Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1883, vol. 174, 935; On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1894, vol. 186, 123. (Русск. пер. второй статьи см. в сб. Проблемы турбулентности. М., 1936.)
6. Schiller L. Neue quantitative Versuche zur Turbulenzentstehung. Z. angew. Math. Mech., 1934, Bd. 14, 36.
7. Rotta J. Experimenteller Beitrag zur Entstehung turbulenter Strömung im Rohr. Ing. Arch., 1956, Bd. 24, 258.
8. Lindgren E. R. The transition process and other phenomena in viscous flow. Ark. Fysik, 1957, Bd. 12, 1; Liquid flow in tubes, I—II. Ark. Fysik, 1959, Bd. 15, 8, 37.
9. Barnes H. T., Coker E. G. The flow of water through pipes. Proc. Roy. Soc. London, 1905, vol. 74, 341.
10. Ekman V. W. On the change from steady to turbulent motion of liquids. Ark. Mat. Astron. Fys., 1911, Bd. 6, No. 12.
11. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., ИИЛ, 1956.
12. Elder J. W. An experimental investigation of turbulence spots and breakdown to turbulence. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, 235.
13. Burgers J. M. The motion of a fluid in the boundary layer along a plane smooth surface. Proc. of the First Intern. Congr. for Appl. Mech., Delft, 1924, 113.
14. Van der Hegge Zijnen B. G. Measurements of the velocity distribution in the boundary layer along a plane surface. Thesis, Delft, 1924.
15. Hansen M. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer eigentauchten Platte. Z. angew. Math. Mech., 1928, Bd. 8, 185.
16. Dryden H. L. Transition from laminar to turbulent flow; «Turbulent flow and heat transfer» (ed. by C. C. Lin). Princeton, 1959.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., ГИИТЛ, 1954.

18. Eiffel G. Sur la résistance des spheres dans l'air en mouvement. Comptes Rendus, 1912, t. 155, 1597.
19. Prandtl L. Über den Luftwiderstand von Kugeln. Göttinger Nachr, 1914, 177.
20. Taylor G. I. Statistical theory of turbulence. V. Effect of turbulence on boundary layer. Proc. Roy. Soc., 1936, A, vol. 156, 307.
21. Wieghardt K. Über die Wirkung der Turbulenz auf den Umschlagpunkt. Z. angew. Math. Mech., 1940, Bd. 20, 58.
22. Dryden H. L., Schubauer G. B., Mock W. C. and Skramstad H. K. Measurements of intensity and scale of wind-tunnel turbulence and their relation to the critical Reynolds number of spheres. NASA Rept., No 581, 1937.
23. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. ДАН СССР, 1951, т. 77, № 1.
24. Дикий Л. А. Об устойчивости плоскопараллельных потоков неоднородной жидкости. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2, стр. 249.
25. Дикий Л. А. Устойчивость плоскопараллельных потоков идеальной жидкости. ДАН СССР, 1960, т. 135, № 5, стр. 1068.
26. Case K. M. Stability of inviscid plane Couette flow. Phys. of Fluids, 1960, vol. 3, 143.
27. Case K. M. Stability of an idealised atmosphere. I. Discussion of results. Phys. of Fluids, 1960, vol. 3, 149.
28. Rayleigh. On the dynamics of revolving fluids, Sci. Papers. Cambridge University Press, 1916, vol. 6, 447.
29. Taylor G. I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Phil. Trans., Roy. Soc. London, A, 1923, vol. 223, 289.
30. Chandrasekhar S. The stability of viscous flow between rotating cylinders. Proc. Roy. Soc., A, 1958, vol. 246, 301.
31. Kirchgässner K. Die Instabilität der Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern gegenüber Taylor-Wirbeln für beliebige Spaltbreiten. Z. angew. Math. und Phys., 1961, Bd. 12, 14.
32. Donnelly R. J., Fultz D. Experiments of the stability of viscous flow between rotating cylinders. II. Visual observations, Proc. Roy. Soc., A, 1960, vol. 258, 101.
33. Jeffreys II. Some cases of instability in fluid motion. Proc. Roy. Soc., A, 1928, vol. 118, 195.
34. Görtler H. Über eine Analogie zwischen der Instabilitäten laminaren Grenzschichtströmungen an konkaven Wänden und an erwärmten Wänden. Ing. Arch., 1959, Bd. 28, 71.
35. Sutton O. G. On the stability of a fluid heated from below. Proc. Roy. Soc., A, 1950, vol. 240, 297.
36. Rayleigh. On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side, Sci. Papers, Cambridge University Press, 1916, vol. 6, 432.
37. Jeffreys II. The stability of a layer of fluid heated below, Phil. Mag. (7), 1926, vol. 2, 833.
38. Pellew A., Southwell R. V. On maintained convective motion in a fluid heated from below. Proc. Roy. Soc., A, 1940, vol. 176, 312.
39. Squire H. B. On the stability of the three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls. Proc. Roy. Soc., A, 1933, vol. 142, 621.
40. Rayleigh. On the stability, or instability, of certain fluid motions, I—III, Sci. Papers, Cambridge University Press, 1880, vol. 1, 474; 1887, vol. 3, 2; 1895, vol. 4, 203.
41. Rayleigh. On the stability of the laminar motion of an inviscid fluid, Sci. Papers, Cambridge University Press, 1913, vol. 6, 197.
42. Tollmien W. Göttinger Monographie über Grenzschichten, B, 1946, 3.
43. Tollmien W. Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1935 Bd. 1, 79.
44. Schlichting H. Turbulenz bei Wärmeschichtung. Z. angew. Math. Mech., 1935, Bd. 15, 313.
45. Taylor G. I. Effect of variation in density on the stability of superposed streams of fluid. Proc. Roy. Soc., A, 1931, vol. 132, 499.
46. Дикий Л. А. О корнях функции Уиттекера и функции Макдональда комплексного индекса. Изв. АН СССР, сер. матем., 1960, т. 24, стр. 943.
47. Dyson F. J. Stability of an idealised atmosphere. II. Zeros of the confluent hypergeometric function. Phys. of Fluids, 1960, vol. 3, 155.
48. Prandtl L. Führer durch die Strömungslehre. Berlin, 1941. (Русс. пер.: Л. Прандтль. Гидроаэромеханика. М., 1951.)
49. Miles J. W. On the stability of heterogeneous shear flows. J. Fluid Mech., 1961, vol. 10, 496.
50. Howard L. N. Note on a paper of John W. Miles. J. Fluid Mech., 1961, vol. 10, 509.
51. Case K. M., Taylor instability of an inverted atmosphere. Phys. of Fluids, 1960, vol. 3, 366.
52. Prandtl L. Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz. Z. angew. Math. Mech., 1921, Bd. 1, 434; Phys., Z., 1922, Bd. 23, 19.

53. Tietjens O. Beiträge zur Entstehung der Turbulenz. Z. angew. Math. Mech., 1925, Bd. 5, 200.
54. Heisenberg W. Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen. Ann. Phys., 1924, Bd. 74, 577.
55. Tollmien W. Über die Entstehung der Turbulenz, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1929, 21; Beitrag zur Theorie der Turbulenz, Proc. 3rd. Int. Congr. Appl. Mech., Stockholm, 1930, vol. 1, 105; Asymptotische Integration der Störungsdifferentialgleichung ebener laminarer Strömungen bei hohen Reynoldszahlen, Z. angew. Math. Mech., 1947, Bd. 25/27, 33, 70.
56. Schlichting H. Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1933, 181; Berechnung der Anfachung kleiner Störungen bei der Plattenströmung. Z. angew. Math. Mech., 1933, Bd. 13, 171; Amplitudenverteilung und Energiebilanz der kleinen Störungen bei der Plattengrenzschicht, Nachr. Gess. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1935, Bd. 1, 47.
57. Lin C. C. On the stability of two-dimensional parallel flows. Parts I, II, III, Quart. Appl. Math., 1945, vol. 3, 117, 218, 277.
58. Thomas L. H. The stability of plane Poiseuille flow, Phys. Rev., 1953, vol. 91, 780.
59. Shen S. F. Calculated amplified oscillations in plane Poiseuille and Blasius flows. J. Aero. Sci., 1954, vol. 21, 62.
60. Pretsch J. Über die Stabilität einer Laminarströmung in einem geraden Rohr mit kreisförmigen Querschnitt, Z. angew. Math. Mech., 1941, Bd. 21, 204.
61. Corcos G. M., Sellars J. R. On the stability of fully developed flow in a pipe. J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, 97.
62. Taylor G. I. Some recent developments in the study of turbulence. Proc. 5th Int. Congr. Appl. Mech., Cambridge, USA, 1938, 294.
63. Schubauer G. B., Skramstad H. K. Laminar boundary layer oscillations and transition on a flat plate. J. Aero. Sci., 1947, vol. 14, 69.
64. Burns J. G., Childs W. H. J., Nicol A. A., Ross M. A. S. Development and use of a vane device for boundary-layer measurements. J. Fluid Mech., 1959, vol. 6, 97.
65. Драйден X. Л. Современное развитие механики пограничного слоя, Сб. Проблемы механики (под ред. Р. Мизеса и Т. Кармана). М., ИИЛ, 1955.
66. Lorentz H. A. Über die Entstehung turbulenter Flüssigkeitsbewegungen und über den Einfluss dieser Bewegungen bei der Strömung durch Rohren. Abh. theor. Phys. Lpz., 1907, Bd. 1, 43.
67. Orr W. The stability or instability of the steady motions of a liquid. Proc. Roy. Irish. Acad., A, 1906—1907, vol. 27, 9, 69.
68. Hamel G. Zum Turbulenzproblem. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1911, 261.
69. Kármán Th. Über die Stabilität der Laminarströmung und die Theorie der Turbulenz. Proc. Int. Congr. Appl. Mech., Delft, 1924, 97.
70. Serrin J. On the stability of viscous fluid motions. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1959, vol. 3, 1.
71. Петров Г. И. О распространении колебаний в вязкой жидкости и возникновении турбулентности. Тр. ЦАГИ, 1938, вып. 345.
72. Stuart J. T. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part I. The basic behaviour in plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, 353.
73. Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности. ДАН СССР, 1944, т. 44, № 8, стр. 339.
74. Tatum T. Stability of the laminar inlet-flow prior to the formation of Poiseuille regime, I, II. J. Phys. Soc. Japan, 1952, vol. 7, 489, 495.
75. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M. The three-dimensional nature of boundary-layer instability. J. Fluid Mech., 1962, vol. 12, 1.
76. Сорокин В. С. О стационарных движениях жидкости, подогреваемой снизу. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 2, стр. 197.
77. Горьков Л. П. Стационарная конвекция в плоском слое жидкости вблизи критического режима теплопередачи. ЖЭТФ, 1957, т. 33, № 2 (8), стр. 402.
78. Malkus W. V. R., Veronis G. Finite amplitude cellular convection. J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, 225.
79. Stuart J. T. On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability. J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, 1.
80. Chandrasekhar S. The stability of viscous flow between rotating cylinders in the presence of a magnetic field. Proc. Roy. Soc., A, 1953, vol. 216, 293.
81. Taylor G. I. Fluid friction between rotation cylinders. I. Torque measurements. Proc. Roy. Soc., A, 1936, vol. 157, 546.
82. Meksyn D., Stuart J. T. Stability of viscous motion between parallel planes for finite disturbances. Proc. Roy. Soc., A 1951, vol. 208, 517.
83. Watson J. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part 2. The development of solution for plane Poiseuille and for plane Couette flow. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, 371.