

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О ПРОГРЕВЕ
ПАДАЮЩИМ ИЗВНЕ ИЗЛУЧЕНИЕМ ВЕЩЕСТВА

Б. Н. Четверушкин

(Москва)

Излагается метод решения спектральных задач радиационной газовой динамики в случае, когда отсутствует зависимость по крайней мере от одной декартовой координаты. Приводится вывод соответствующего осредненного уравнения переноса; рассматривается область его применимости. Этим методом проведено численное решение спектральной задачи о прогреве падающим извне излучением вещества. Сравнение с аналогичным решением для «серой» материи позволило проиллюстрировать роль спектральных эффектов [1].

1. Осредненное уравнение переноса. Рассмотрим уравнение переноса излучения для плоского слоя

$$\mu \frac{dI_\nu}{dr} + \kappa_\nu' I_\nu = \frac{\kappa_\nu'}{2} I_{\nu p} \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$I_\nu(r_0, \mu, t) = I^+(\mu, t, \nu) \quad (\mu \geq 0), \quad I_\nu(r_N, \mu, t) = I^-(\mu, t, \nu) \quad (\mu < 0)$$

Здесь μ — косинус угла между направлением полета фотона частоты ν и осью r ; κ_ν' — коэффициент поглощения с учетом вынужденного испускания; $I_{\nu p}$ — равновесная интенсивность излучения черного тела [2].

Поток энергии излучения W запишется в виде

$$W = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \mu I_\nu d\nu \quad (1.2)$$

Предположим, что коэффициент поглощения задан в виде

$$\kappa_\nu' = f_1(\nu) f_2(T, \rho) \quad (1.3)$$

где f_1 и f_2 могут быть произвольными функциями. Проводя в (1.2) замену переменных $\nu = \nu$, $z = \mu / f_1(\nu)$ и меняя порядок интегрирования, получим¹

$$W = \int_0^\infty d\nu \int_{-a}^a z f_1^2(\nu) I_\nu dz = \int_{-a_+}^{a_+} z I dz \quad (1.4)$$

где

$$a = 1 / f_1(\nu), \quad a_+ = \max_\nu 1 / f_1(\nu)$$

$$I = \int_\omega f_1^2(\nu) I_\nu d\nu$$

Здесь интегрирование производится по множеству ω , состоящему лишь из тех частот, для которых имеет место $a \geq |z|$.

¹ Равенство (1.4) будет справедливо для любой функции $f_1(\nu, T, \rho)$.

Умножая уравнение (1.1) с соответствующими граничными условиями на $f_1^2(\nu)$ и интегрируя по множеству ω , получаем уравнение для функции I

$$z dI/dr + f_2(T, \rho) I = f_2 F(T, |z|) / 2 \quad (1.5)$$

с граничными условиями

$$I^+(t, z) = \int_{\omega} f_1^2(\nu) I^+(\mu, t, \nu) d\nu \quad (z \geq 0) \quad (1.6)$$

$$I^-(t, z) = \int_{\omega} f_1^2(\nu) I^-(\mu, t, \nu) d\nu \quad (z < 0)$$

Здесь $F(T, |z|)$ — монотонно убывающая функция $|z|$ и определяется по формуле

$$F(T, |z|) = \int_{\omega} f_1^2(\nu) I_{\nu p} d\nu \quad (1.7)$$

Поток W определяется из решения уравнения (1.5) [1]

$$W = \int_{-a_+}^{a_+} z I dz \quad (1.8)$$

В случае, когда $f_1(\nu, T, \rho)$ — слабо меняющаяся на расстояниях порядка длины свободного пробега функция T, ρ , членом, содержащим производную f_1 по r , получаемся при умножении уравнения (1.1) на f_1^2 , можно пренебречь. Соответствующее осредненное уравнение для I запишется в виде (1.5). Граничные условия и правые части этого уравнения будут определяться из (1.6), (1.7) с $f_1 = f_1(\nu, T, \rho)$. Равенство (1.8) при этом перейдет в приближенное.

Пусть $f_1(\nu, T, \rho)$ — произвольная функция ν, T, ρ . Проинтегрировав формальным образом написанное осредненное уравнение (1.5) по z в пределах $-a_+' \leq z \leq a_+'$, где $a_+' = \max 1 / f_1(\nu, T, \rho)$, максимум берется по ν, T, ρ , получим

$$\frac{dW'}{dr} + f_2 U = f_2 B(T, \rho) \quad (1.9)$$

$$W' = \int_{-a_+'}^{a_+'} z I dz, \quad U = \int_{-a_+'}^{a_+'} I dz, \quad B(T, \rho) = \int_0^{\infty} f_1(\nu, T, \rho) I_{\nu p} d\nu \quad (1.10)$$

Из (1.9) и (1.10) следует, что в предельном случае оптически тонкого нагретого слоя dW'/dr будет совпадать с дивергенцией точного потока излучения dW/dr при произвольной функции $f_1(\nu, T, \rho)$.

Если вещество находится в состоянии равновесия с излучением, то $f_1(\nu, T, \rho)$ вне зависимости от своего вида должна быть слабо меняющейся функцией на расстояниях порядка длины свободного пробега.

Таким образом в «предельных оптических состояниях» вещества (оптически тонкий нагретый слой и случай наличия равновесия между веществом и излучением) формальным образом полученное уравнение (1.5) для произвольной f_1 даст результаты, совпадающие с точными. Отметим, что широко используемое в расчетах диффузионное приближение для решения уравнения переноса в предельных оптических состояниях дает результаты, совпадающие с точными. В случае «произвольного оптического состояния» оно всегда дает качественно правильный результат. По аналогии с диффузионным приближением следует ожидать, что для произвольного оптического состояния вещества с произвольным видом функции $f_1(\nu, T, \rho)$ осредненное уравнение (1.5) всегда дает качественно правильный результат.

Уравнение (1.5) обладает меньшей размерностью, чем уравнение (1.4). Кроме того, оно записано в форме, удобной для применения квазидиффузионного метода. Этот метод позволяет вычисление потока W значительно упростить [3-5]. Отметим, что осредненное уравнение, аналогичное (1.5), может быть получено и для двумерных задач.

Кроме того, предложенное осреднение автоматически может быть перенесено на случай отсутствия локального термодинамического равновесия в веществе. Для получения соответствующего осредненного уравнения достаточно положить коэффициент поглощения и правую часть уравнения переноса заданными в виде

$$\kappa = \kappa_1(v) \kappa_2(r, t), \quad I' = I'(v, r, t)$$

где κ, I' — неявные функции r, t . Вывод осредненного уравнения аналогичен выводу уравнения (1.5).

2. Расчет спектральной задачи о прогреве падающим извне излучением вещества. Рассмотрим задачу о прогреве бесконечного плоского слоя вещества, падающим извне излучением. Такие задачи возникают при рассмотрении падения лазерного излучения на вещество [6-9]. Предполагая, что фазовый переход оказывает несущественное влияние на ход процесса в целом, выпишем систему уравнений, описывающих движение испаренного вещества

$$\frac{dr}{dt} = u, \quad \rho dr = dm, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial(p + \omega')}{\partial m}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial W}{\partial m} - p \frac{\partial(ru)}{\partial m} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(T, \rho), \quad p = p(T, \rho), \quad \kappa_v' = \kappa'(v, T, \rho)$$

$$\mu \frac{dI_v}{dr} + \kappa_v' I_v = \frac{\kappa_v' I_{v\rho}}{2}, \quad W = \int_0^\infty dv \int_{-1}^1 \mu I_v d\mu \quad (2.2)$$

Здесь m — лагранжева координата, u — скорость, p — давление, ω' — искусственная вязкость, ε — внутренняя энергия.

Уравнения газодинамики (2.1) записаны в лагранжевых координатах, уравнение переноса (2.2) — в эйлеровых. Граничными условиями для уравнений газодинамики являются $p = 0$ на левом конце и $u = 0$ на правом. Для уравнения переноса граничное условие запишется в виде

$$\text{на левом конце } I_v(r_0(t), \mu) = I^+(\mu, t, v)$$

$$\text{на правом конце } I_v(r_\infty, \mu) = 0$$

В качестве начальных условий для уравнений газодинамики полагаем

$$T(r, 0) = u(r, 0), \quad \rho(r, 0) = \rho(r)$$

Численное решение системы уравнений (2.1), (2.2) гораздо сложнее, чем решение задачи в приближении лучистой теплопроводности или в отсутствие переизлучения, когда правая часть уравнения переноса полагается равной нулю. Для расчета системы уравнений (2.1), (2.2) использовались методы, изложенные в [4, 5].

Рассмотрим модельную задачу со следующим граничным условием для уравнения переноса:

$$I^+ = \begin{cases} Ce^t & v \in [12, 36] \\ 0 & v \notin [12, 36] \end{cases}$$

и уравнениями состояния, близкими к уравнениям состояния идеального газа.

Выберем коэффициент поглощения в виде $\kappa'_v = \rho \varphi(\nu, T)$, где $\varphi(\nu, T)$ определяется из таблицы.

T	$\nu \in [0,5]$	$\nu \in [5,12]$	$\nu \in [12,36]$	$\nu \in [36,72]$	$\nu \in [72,144]$
0.1	10^8	5195	376	14	1.74
0.3	3 703 700	5195	376	14	1.74
1	131 660	3000	376	14	1.74
2	40 316	2737	221	14	1.74
4	18 569	1331	130	10.4	1.74
8	7 242	1137	70	7.2	1.30
12	5 329	825	53	5.9	1.02
16	4 197	344	39	5.3	0.89

Столбцы таблицы получены путем осреднения по Планку в пределах соответствующей группы коэффициента поглощения

$$\kappa(\nu, T, \rho) = \frac{10^4}{T^{0.5\nu^3}} \left(1 - \exp \frac{-h\nu}{kT} \right)$$

Таким образом, используемый для расчета коэффициент $\kappa'(\nu, T, \rho)$ моделирует практически важный вид коэффициента поглощения [2]

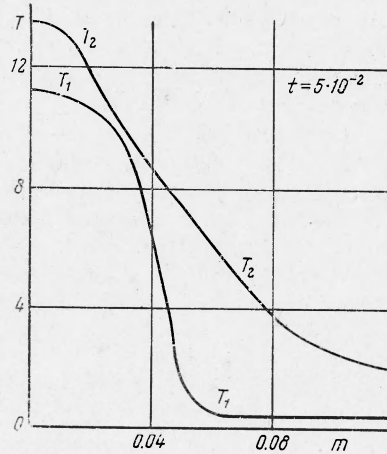
$$\kappa'_v = \kappa_0 \frac{\rho^\beta}{T^{\alpha\nu^\theta}} \left(1 - \exp \frac{-h\nu}{kT} \right) \quad (2.3)$$

Для этой задачи пятигрупповое приближение является точным. Сравнение «точного» решения и решения, полученного при помощи осредненного уравнения, показало хорошее количественное совпадение, несмотря на то, что $\kappa'(\nu, T, \rho)$ нельзя в точности представить в виде произведения функций разделяющихся переменных.

Представленные здесь результаты расчетов спектральной задачи получены при помощи использования осредненного уравнения (1.5). Решение этой задачи было проведено также в одногрупповом приближении серой материи, когда коэффициент поглощения получался путем осреднения по Планку κ'_v по всему спектру.

Как показывают расчеты, для одногруппового и спектрального вариантов в начальные моменты времени основная часть поглощаемой системой энергии излучения идет на увеличение внутренней энергии вещества. В дальнейшем доля кинетической энергии увеличивается, начинается интенсивный разлет вещества, формируется ударная волна сжатия, которая движется перед тепловой волной по невозмущенному веществу. На фиг. 1 представлены характерные профили температуры для таяного сформировавшегося режима, полученные в расчетах одногруппового T_1 и спектрального T_2 вариантов.

Разлет вещества и формирование ударной волны в одногрупповом варианте начинается значительно раньше, чем в спектральном. Этот факт получает простое объяснение из следующих рассуждений. Характерное время τ , за которое происходит формирование ударной волны, определя-

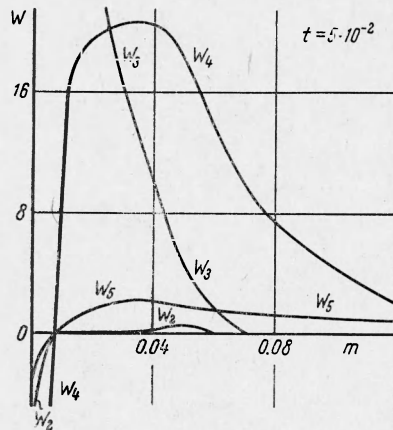


Фиг. 1

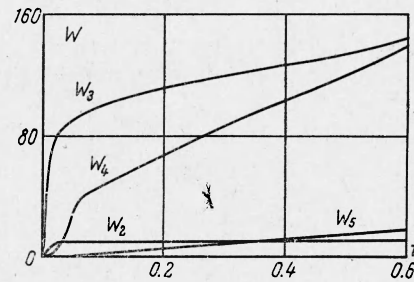
ется из соотношения

$$\tau = l / D \quad (2.4)$$

где l — размеры нагретой области, D — скорость переноса возмущения. По порядку величины l должна совпадать с характерной длиной свободного пробега, которая для спектрального варианта является длиной свободного пробега квантов частоты $\nu \in [12, 36]$. Эта длина свободного пробега значительно превышает длину свободного пробега для одногруппового варианта.



Фиг. 2



Фиг. 3

Для сформировавшегося режима (фиг. 1) в спектральном варианте вещество вблизи границы в отличие от одногруппового не находится в состоянии равновесия с излучением. Такая картина будет наблюдаться всегда, когда падающее излучение задано в узком спектральном интервале и его нельзя интерпретировать как излучение черного тела при какой-нибудь температуре T_0 .

В отличие от одногруппового в спектральном варианте фронт тепловой волны более пологий. Наблюдается так называемый «язык» прогрева (фиг. 1). Для оценки роли различных квантов в прогреве впереди лежащих областей на фиг. 2 представлены значения потоков по группам. Как видно из фигуры, основная роль в прогреве принадлежит квантам четвертой группы $\nu \in [36, 72]$, в прогреве же далеко лежащих холодных слоев также велика роль квантов пятой группы $\nu \in [72, 144]$. Отметим, что жесткие кванты $\nu \in [36, 144]$ генерируются непосредственно в горячей области.

С течением времени, поток излучения, падающий на тело, увеличивается $W_+ = \pi C e^t$. Это приводит к возрастанию температуры в нагретой зоне и, как следствие, к увеличению доли излучения жестких квантов. На фиг. 3 приведены значения потоков по группам, высвечиваемых из тела на момент времени t . С ростом мощности падающего излучения увеличивается доля излучения, высвечиваемого в четвертой и пятой группах. Излучение в первой группе практически отсутствует. Следует ожидать, что при падении мощности падающего излучения, например, $W_+ = \pi C e^{-t}$, возрастет доля излучения, высвечиваемого в первой и второй группах. Таким образом, меняя лишь мощность падающего излучения, без изменения его частотных характеристик можно добиться значительного изменения спектрального состава выходящего излучения.

На фиг. 4 представлены значения энергии, вложенной в систему для одногруппового E_1 и спектрального E_2 вариантов. Там же представлены значения внутренней ϵ и кинетической ϵ_v энергий для этих вариантов. Как видно из фиг. 4, ϵ и ϵ_v практически равны в спектральном варианте, а для одногруппового варианта их отношение сохраняется. Таким образом,

на примере расчета спектральной задачи с учетом переизлучения подтвержден вывод, сделанный в работе [6] о существовании асимптотического отношения между ε и ε_0 .

Рассмотрим быстро нарастающий поток падающего извне излучения

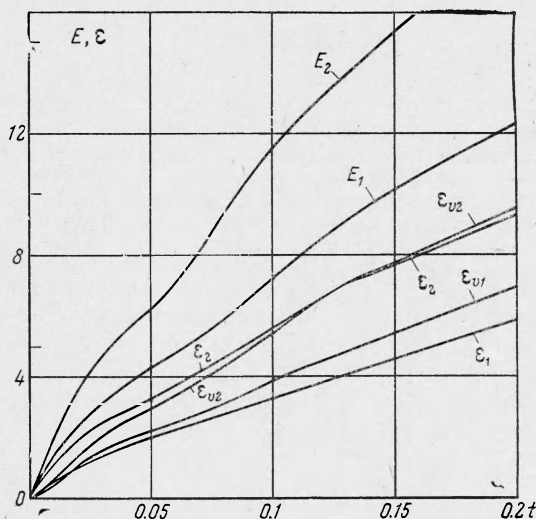
$$\int_0^{t+\tau} I^+ dt \gg \int_0^t I^+ dt \quad (2.5)$$

где τ — характерное время разлета в газе. В этом случае вещество не успевает прийти в движение и доля кинетической энергии должна быть мала. Из неравенства (2.5) следует, что уменьшение доли кинетической энергии может быть вызвано также увеличением характерного времени разлета τ . В свою очередь τ определяется из равенства (2.4). С увеличением характерной длины свободного пробега, как это имеет место при переходе от одногруппового к спектральному варианту, возрастает время разлета τ . Увеличение τ приводит к увеличению доли внутренней энергии, что подтверждается результатами расчетов (фиг. 4).

Отметим, что для некоторых классов задач о прогреве излучением вещества анализ размерности и подобия позволяет выделить безразмерные комбинации размерных параметров, определяющих решение системы уравнений (2.1), (2.2). Это в свою очередь позволяет значительно сократить число независимых параметров, влияющих на решение задачи.

В заключение автор благодарит В. Я. Гольдина за постоянное внимание и обсуждение результатов работы, Д. А. Гольдину за помощь в организации численных расчетов.

Фиг. 4



Поступила 30 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдин В. Я., Четверушкин Б. Н. Эффективный метод решения уравнения переноса в низкотемпературной плазме. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 2.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
3. Гольдин В. Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 6.
4. Гольдин В. Я., Данилова Г. В., Четверушкин Б. Н. Приближенный метод расчета нестационарного кинетического уравнения. Вычислительные методы в теории переноса. М., Атомиздат, 1969.
5. Четверушкин Б. Н. Об одном методе совместного решения уравнения переноса излучения. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1970, т. 10, № 5.
6. Басов Н. Г., Крохин О. Н. Условия разогрева плазмы излучением оптического квантового генератора. ЖЭТФ, 1964, т. 46, вып. 1.
7. Афанасьев Ю. В., Кроть В. М., Крохин О. Н., Немчинов И. В. Газодинамические процессы при нагревании вещества излучением лазера. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
8. Dawson J. M., On the production of plasma by giant pulse lasers. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 7.
9. Виленская Г. Г., Немчинов И. В. Численный расчет движения и нагрева излучением ОКГ плазмы, образовавшейся при вспышке поглощения в парах твердого тела. ПМТФ, 1969, № 6.