

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О ПРОГРЕВЕ  
ПАДАЮЩИМ ИЗВНЕ ИЗЛУЧЕНИЕМ ВЕЩЕСТВА

Б. Н. Четверушкин

(Москва)

Излагается метод решения спектральных задач радиационной газовой динамики в случае, когда отсутствует зависимость по крайней мере от одной декартовой координаты. Приводится вывод соответствующего осредненного уравнения переноса; рассматривается область его применимости. Этим методом проведено численное решение спектральной задачи о прогреве падающим извне излучением вещества. Сравнение с аналогичным решением для «серой» материи позволило проиллюстрировать роль спектральных эффектов [1].

1. Осредненное уравнение переноса. Рассмотрим уравнение переноса излучения для плоского слоя

$$\mu \frac{dI_\nu}{dr} + \kappa_\nu' I_\nu = \frac{\kappa_\nu'}{2} I_{\nu p} \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$I_\nu(r_0, \mu, t) = I^+(\mu, t, \nu) \quad (\mu \geq 0), \quad I_\nu(r_N, \mu, t) = I^-(\mu, t, \nu) \quad (\mu < 0)$$

Здесь  $\mu$  — косинус угла между направлением полета фотона частоты  $\nu$  и осью  $r$ ;  $\kappa_\nu'$  — коэффициент поглощения с учетом вынужденного испускания;  $I_{\nu p}$  — равновесная интенсивность излучения черного тела [2].

Поток энергии излучения  $W$  запишется в виде

$$W = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \mu I_\nu d\nu \quad (1.2)$$

Предположим, что коэффициент поглощения задан в виде

$$\kappa_\nu' = f_1(\nu) f_2(T, \rho) \quad (1.3)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  могут быть произвольными функциями. Проводя в (1.2) замену переменных  $\nu = \nu$ ,  $z = \mu / f_1(\nu)$  и меняя порядок интегрирования, получим<sup>1</sup>

$$W = \int_0^\infty d\nu \int_{-a}^a z f_1^2(\nu) I_\nu dz = \int_{-a_+}^{a_+} z I dz \quad (1.4)$$

где

$$a = 1 / f_1(\nu), \quad a_+ = \max_\nu 1 / f_1(\nu)$$

$$I = \int_\omega f_1^2(\nu) I_\nu d\nu$$

Здесь интегрирование производится по множеству  $\omega$ , состоящему лишь из тех частот, для которых имеет место  $a \geq |z|$ .

<sup>1</sup> Равенство (1.4) будет справедливо для любой функции  $f_1(\nu, T, \rho)$ .

Умножая уравнение (1.1) с соответствующими граничными условиями на  $f_1^2(\nu)$  и интегрируя по множеству  $\omega$ , получаем уравнение для функции  $I$

$$z dI/dr + f_2(T, \rho) I = f_2 F(T, |z|) / 2 \quad (1.5)$$

с граничными условиями

$$I^+(t, z) = \int_{\omega} f_1^2(\nu) I^+(\mu, t, \nu) d\nu \quad (z \geq 0) \quad (1.6)$$

$$I^-(t, z) = \int_{\omega} f_1^2(\nu) I^-(\mu, t, \nu) d\nu \quad (z < 0)$$

Здесь  $F(T, |z|)$  — монотонно убывающая функция  $|z|$  и определяется по формуле

$$F(T, |z|) = \int_{\omega} f_1^2(\nu) I_{\nu p} d\nu \quad (1.7)$$

Поток  $W$  определяется из решения уравнения (1.5) [1]

$$W = \int_{-a_+}^{a_+} z I dz \quad (1.8)$$

В случае, когда  $f_1(\nu, T, \rho)$  — слабо меняющаяся на расстояниях порядка длины свободного пробега функция  $T, \rho$ , членом, содержащим производную  $f_1$  по  $r$ , получаемым при умножении уравнения (1.1) на  $f_1^2$ , можно пренебречь. Соответствующее осредненное уравнение для  $I$  запишется в виде (1.5). Граничные условия и правые части этого уравнения будут определяться из (1.6), (1.7) с  $f_1 = f_1(\nu, T, \rho)$ . Равенство (1.8) при этом перейдет в приближенное.

Пусть  $f_1(\nu, T, \rho)$  — произвольная функция  $\nu, T, \rho$ . Проинтегрировав формальным образом написанное осредненное уравнение (1.5) по  $z$  в пределах  $-a_+' \leq z \leq a_+'$ , где  $a_+' = \max 1 / f_1(\nu, T, \rho)$ , максимум берется по  $\nu, T, \rho$ , получим

$$\frac{dW'}{dr} + f_2 U = f_2 B(T, \rho) \quad (1.9)$$

$$W' = \int_{-a_+'}^{a_+'} z I dz, \quad U = \int_{-a_+'}^{a_+'} I dz, \quad B(T, \rho) = \int_0^{\infty} f_1(\nu, T, \rho) I_{\nu p} d\nu \quad (1.10)$$

Из (1.9) и (1.10) следует, что в предельном случае оптически тонкого нагретого слоя  $dW'/dr$  будет совпадать с дивергенцией точного потока излучения  $dW/dr$  при произвольной функции  $f_1(\nu, T, \rho)$ .

Если вещество находится в состоянии равновесия с излучением, то  $f_1(\nu, T, \rho)$  вне зависимости от своего вида должна быть слабо меняющейся функцией на расстояниях порядка длины свободного пробега.

Таким образом в «предельных оптических состояниях» вещества (оптически тонкий нагретый слой и случай наличия равновесия между веществом и излучением) формальным образом полученное уравнение (1.5) для произвольной  $f_1$  даст результаты, совпадающие с точными. Отметим, что широко используемое в расчетах диффузионное приближение для решения уравнения переноса в предельных оптических состояниях дает результаты, совпадающие с точными. В случае «произвольного оптического состояния» оно всегда дает качественно правильный результат. По аналогии с диффузионным приближением следует ожидать, что для произвольного оптического состояния вещества с произвольным видом функции  $f_1(\nu, T, \rho)$  осредненное уравнение (1.5) всегда дает качественно правильный результат.

Уравнение (1.5) обладает меньшей размерностью, чем уравнение (1.4). Кроме того, оно записано в форме, удобной для применения квазидиффузионного метода. Этот метод позволяет вычисление потока  $W$  значительно упростить [3-5]. Отметим, что осредненное уравнение, аналогичное (1.5), может быть получено и для двумерных задач.

Кроме того, предложенное осреднение автоматически может быть перенесено на случай отсутствия локального термодинамического равновесия в веществе. Для получения соответствующего осредненного уравнения достаточно положить коэффициент поглощения и правую часть уравнения переноса заданными в виде

$$\kappa = \kappa_1(v) \kappa_2(r, t), \quad I' = I'(v, r, t)$$

где  $\kappa, I'$  — неявные функции  $r, t$ . Вывод осредненного уравнения аналогичен выводу уравнения (1.5).

**2. Расчет спектральной задачи о прогреве падающим извне излучением вещества.** Рассмотрим задачу о прогреве бесконечного плоского слоя вещества, падающим извне излучением. Такие задачи возникают при рассмотрении падения лазерного излучения на вещество [6-9]. Предполагая, что фазовый переход оказывает несущественное влияние на ход процесса в целом, выпишем систему уравнений, описывающих движение испаренного вещества

$$\frac{dr}{dt} = u, \quad \rho dr = dm, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial(p + \omega')}{\partial m}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial W}{\partial m} - p \frac{\partial(ru)}{\partial m} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(T, \rho), \quad p = p(T, \rho), \quad \kappa_v' = \kappa'(v, T, \rho)$$

$$\mu \frac{dI_v}{dr} + \kappa_v' I_v = \frac{\kappa_v' I_{v\rho}}{2}, \quad W = \int_0^\infty dv \int_{-1}^1 \mu I_v d\mu \quad (2.2)$$

Здесь  $m$  — лагранжева координата,  $u$  — скорость,  $p$  — давление,  $\omega'$  — искусственная вязкость,  $\varepsilon$  — внутренняя энергия.

Уравнения газодинамики (2.1) записаны в лагранжевых координатах, уравнение переноса (2.2) — в эйлеровых. Граничными условиями для уравнений газодинамики являются  $p = 0$  на левом конце и  $u = 0$  на правом. Для уравнения переноса граничное условие запишется в виде

$$\text{на левом конце } I_v(r_0(t), \mu) = I^+(\mu, t, v)$$

$$\text{на правом конце } I_v(r_\infty, \mu) = 0$$

В качестве начальных условий для уравнений газодинамики полагаем

$$T(r, 0) = u(r, 0), \quad \rho(r, 0) = \rho(r)$$

Численное решение системы уравнений (2.1), (2.2) гораздо сложнее, чем решение задачи в приближении лучистой теплопроводности или в отсутствие переизлучения, когда правая часть уравнения переноса полагается равной нулю. Для расчета системы уравнений (2.1), (2.2) использовались методы, изложенные в [4, 5].

Рассмотрим модельную задачу со следующим граничным условием для уравнения переноса:

$$I^+ = \begin{cases} Ce^t & v \in [12, 36] \\ 0 & v \notin [12, 36] \end{cases}$$

и уравнениями состояния, близкими к уравнениям состояния идеального газа.

Выберем коэффициент поглощения в виде  $\kappa'_\nu = \rho\varphi(\nu, T)$ , где  $\varphi(\nu, T)$  определяется из таблицы.

$T$	$\nu \in [0,5]$	$\nu \in [5,12]$	$\nu \in [12,36]$	$\nu \in [36,72]$	$\nu \in [72,144]$
0.1	$10^8$	5195	376	14	1.74
0.3	3 703 700	5195	376	14	1.74
1	131 660	3000	376	14	1.74
2	40 316	2737	221	14	1.74
4	18 569	1331	130	10.4	1.74
8	7 242	1137	70	7.2	1.30
12	5 329	825	53	5.9	1.02
16	4 197	344	39	5.3	0.89

Столбцы таблицы получены путем осреднения по Планку в пределах соответствующей группы коэффициента поглощения

$$\kappa(\nu, T, \rho) = \frac{10^4}{T^{0.5\nu^3}} \left( 1 - \exp \frac{-h\nu}{kT} \right)$$

Таким образом, используемый для расчета коэффициент  $\kappa'(\nu, T, \rho)$  моделирует практически важный вид коэффициента поглощения [2]

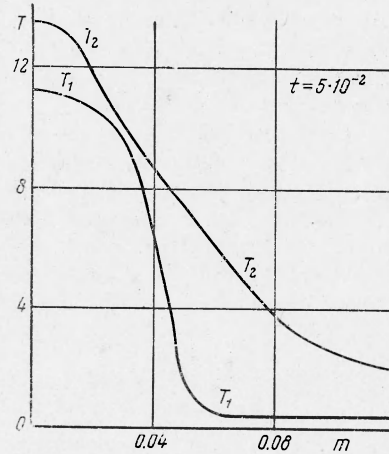
$$\kappa'_\nu = \kappa_0 \frac{\rho^\beta}{T^{\alpha\nu^9}} \left( 1 - \exp \frac{-h\nu}{kT} \right) \quad (2.3)$$

Для этой задачи пятигрупповое приближение является точным. Сравнение «точного» решения и решения, полученного при помощи осредненного уравнения, показало хорошее количественное совпадение, несмотря на то, что  $\kappa'(\nu, T, \rho)$  нельзя в точности представить в виде произведения функций разделяющихся переменных.

Представленные здесь результаты расчетов спектральной задачи получены при помощи использования осредненного уравнения (1.5). Решение этой задачи было проведено также в одногрупповом приближении серой материи, когда коэффициент поглощения получался путем осреднения по Планку  $\kappa'_\nu$  по всему спектру.

Как показывают расчеты, для одногруппового и спектрального вариантов в начальные моменты времени основная часть поглощаемой системой энергии излучения идет на увеличение внутренней энергии вещества. В дальнейшем доля кинетической энергии увеличивается, начинается интенсивный разлет вещества, формируется ударная волна сжатия, которая движется перед тепловой волной по невозмущенному веществу. На фиг. 1 представлены характерные профили температуры для таяного сформировавшегося режима, полученные в расчетах одногруппового  $T_1$  и спектрального  $T_2$  вариантов.

Разлет вещества и формирование ударной волны в одногрупповом варианте начинается значительно раньше, чем в спектральном. Этот факт получает простое объяснение из следующих рассуждений. Характерное время  $\tau$ , за которое происходит формирование ударной волны, определя-

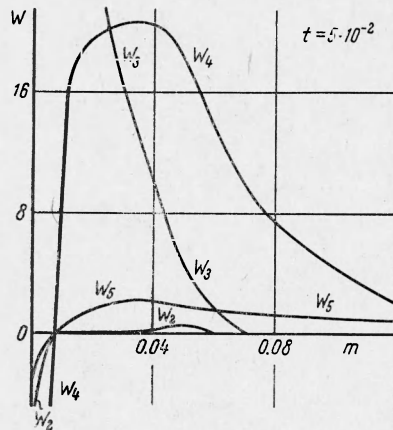


Фиг. 1

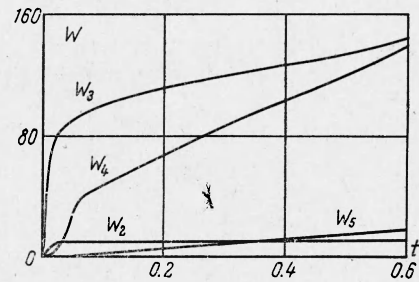
ется из соотношения

$$\tau = l / D \quad (2.4)$$

где  $l$  — размеры нагретой области,  $D$  — скорость переноса возмущения. По порядку величины  $l$  должна совпадать с характерной длиной свободного пробега, которая для спектрального варианта является длиной свободного пробега квантов частоты  $\nu \in [12, 36]$ . Эта длина свободного пробега значительно превышает длину свободного пробега для одногруппового варианта.



Фиг. 2



Фиг. 3

Для сформировавшегося режима (фиг. 1) в спектральном варианте вещество вблизи границы в отличие от одногруппового не находится в состоянии равновесия с излучением. Такая картина будет наблюдаться всегда, когда падающее излучение задано в узком спектральном интервале и его нельзя интерпретировать как излучение черного тела при какой-нибудь температуре  $T_0$ .

В отличие от одногруппового в спектральном варианте фронт тепловой волны более пологий. Наблюдается так называемый «язык» прогрева (фиг. 1). Для оценки роли различных квантов в прогреве впереди лежащих областей на фиг. 2 представлены значения потоков по группам. Как видно из фигуры, основная роль в прогреве принадлежит квантам четвертой группы  $\nu \in [36, 72]$ , в прогреве же далеко лежащих холодных слоев также велика роль квантов пятой группы  $\nu \in [72, 144]$ . Отметим, что жесткие кванты  $\nu \in [36, 144]$  генерируются непосредственно в горячей области.

С течением времени, поток излучения, падающий на тело, увеличивается  $W_+ = \pi C e^t$ . Это приводит к возрастанию температуры в нагретой зоне и, как следствие, к увеличению доли излучения жестких квантов. На фиг. 3 приведены значения потоков по группам, высвечиваемых из тела на момент времени  $t$ . С ростом мощности падающего излучения увеличивается доля излучения, высвечиваемого в четвертой и пятой группах. Излучение в первой группе практически отсутствует. Следует ожидать, что при падении мощности падающего излучения, например,  $W_+ = \pi C e^{-t}$ , возрастет доля излучения, высвечиваемого в первой и второй группах. Таким образом, меняя лишь мощность падающего излучения, без изменения его частотных характеристик можно добиться значительного изменения спектрального состава выходящего излучения.

На фиг. 4 представлены значения энергии, вложенной в систему для одногруппового  $E_1$  и спектрального  $E_2$  вариантов. Там же представлены значения внутренней  $\epsilon$  и кинетической  $\epsilon_v$  энергий для этих вариантов. Как видно из фиг. 4,  $\epsilon$  и  $\epsilon_v$  практически равны в спектральном варианте, а для одногруппового варианта их отношение сохраняется. Таким образом,

