

**СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА С ПЕРЕМЕННЫМ
ТОКОМ КВАДРУПОЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ**

М. Г. Никулин

(Москва)

Динамическая стабилизация прямого или тороидального плазменного шнура с током высокочастотным квадрупольным магнитным полем была предложена С.М.Осовцом [1]. Более строгое теоретическое рассмотрение вопроса проведено М.Л.Левиним и М.С.Рабиновичем в работе [2], где для тонкого шнура, испытывающего длинноволновые возмущения типа змеек и перетяжек, получена функция Рауса, позволяющая исследовать динамику шнура в различных магнитных полях. В данной работе при помощи развитого в [2] метода рассмотрена стабилизация плазменного шнура, по которому, в отличие от [1,2], течет переменный ток, а квадрупольное поле постоянно или, как в [1,2], меняется с высокой частотой.

1. Движение тонкого идеально проводящего кольца, по поверхности которого текут поперечный ток I_1 и продольный ток I_2 , может быть описано [2] функцией Рауса

$$R = \mathcal{L} - \frac{\Phi_1^2}{2L_1} - \frac{(\Phi^e - \Phi_2)^2}{2L_2} \quad (\mathcal{L} = T - U) \quad (1.1)$$

Здесь \mathcal{L} — механический лагранжиан кольца, T , U — кинетическая и внутренняя энергия, Φ_1 — поток замороженного в плазму поля, Φ^e — поток внешнего поля через кольцо, Φ_2 — суммарный поток поля через кольцо, L_1 и L_2 — индуктивности, соответствующие токам I_1 и I_2 . Вследствие идеальной проводимости потоки Φ_1 и Φ_2 сохраняются, т. е.

$$\Phi_1 = c^{-1}L_1I_1 = \text{const}, \quad \Phi_2 = c^{-1}L_2I_2 + \Phi^e = \text{const} \quad (1.2)$$

Функция Рауса (1.1) может быть выражена только через механические переменные, по отношению к которым она играет роль обычной функции Лагранжа. Если известна функция (1.1), то получение уравнений движения и исследование устойчивости сводится к стандартным процедурам.

Удобными механическими переменными являются функции $\varepsilon(\varphi)$, $\delta(\varphi)$ и $\alpha(\varphi)$, описывающие возмущение кольца

$$r(\varphi) = b[1 + \varepsilon(\varphi)], \quad z(\varphi) = b\delta(\varphi), \quad a_{\sim} = a[1 + \alpha(\varphi)]$$

Здесь r , φ , z — цилиндрические координаты осевой линии шнура; a , b — соответственно малый и большой радиусы равновесного кольца; a_{\sim} — переменный радиус поперечного сечения; ε и δ характеризуют горизонтальные и вертикальные изгибы, а α — перетяжки плазменного шнура.

Если функции ε , δ и α разложить в ряды Фурье типа

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_{n=1} (\varepsilon_{nc} \cos n\varphi + \varepsilon_{ns} \sin n\varphi) \quad (1.3)$$

то функции T , U , $\Phi_1^2 / 2L_1$ и L_2 принимают вид [2]

$$T = \frac{1}{2} Mb^2 \left\{ 2(\dot{\varepsilon}_0^2 + \dot{\delta}_0^2) + \frac{a^2}{b^2} \dot{\alpha}_0^2 + \sum_{n=1} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \dot{\varepsilon}_n^2 + \dot{\delta}_n^2 + \frac{4}{n^2} (\dot{\alpha}_n^2 + \dot{\varepsilon}_n \dot{\alpha}_n) \right] \right\} \quad (1.4)$$

$$U = U_0 - p_0 V_0 \{ \varepsilon_0 + 2\alpha_0 + 2 \langle \varepsilon \alpha \rangle + \langle \alpha^2 \rangle - 1/2 \gamma (\varepsilon_0 + 2\alpha_0)^2 + 1/2 \langle \varepsilon'^2 + \delta'^2 \rangle \} \quad (1.5)$$

$$\Phi_1^2 / 2L_1 = p_1 V_0 \{ 1 + \varepsilon_0 - 2\alpha_0 - 2 \langle \varepsilon \alpha \rangle + 3 \langle \alpha^2 \rangle + 1/2 \langle \varepsilon'^2 + \delta'^2 \rangle \} \quad (1.6)$$

$$L_2 = 2\pi b \{ l + (l + 2) \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 - 2\alpha_0 - 2 \langle \varepsilon \alpha \rangle + \langle \alpha^2 \rangle + \\ + 1/2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [(\Lambda - g_r(n)) \varepsilon_n^2 + (\Lambda - g_z(n)) \delta_n^2] \} \quad (1.7)$$

Здесь

$$\varepsilon_n^2 = \varepsilon_{nc}^2 + \varepsilon_{ns}^2, \quad \dot{\varepsilon}_n \dot{\alpha}_n = \dot{\varepsilon}_{nc} \dot{\alpha}_{nc} + \dot{\varepsilon}_{ns} \dot{\alpha}_{ns}$$

а δ_n^2 , α_n^2 , $\dot{\varepsilon}_n^2$, $\dot{\delta}_n^2$, $\dot{\alpha}_n^2$ имеют аналогичную структуру; M и V_0 — масса и равновесный объем кольца, p_0 — равновесное газовое давление, γ — показатель адиабаты.

$$p_1 = B_1^2 / 8\pi, \quad B_1 = \Phi_1 / \pi a^2, \quad \Lambda = \ln \frac{8b}{a}, \quad l = 2(\Lambda - 2)$$

$$g_r(n) = 2 \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}$$

$$g_z(n) = 2 \left(1 - \frac{3}{4n^2} \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} + \frac{1}{2}$$

Угловые скобки означают усреднение по азимутальному углу φ

$$\langle f(\varphi) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$$

Функции T и U получены в предположении глобальной адиабатичности, когда газовое давление связано уравнением адиабаты с полным объемом кольца. По самому способу вывода формулы (1.4) — (1.7) имеют смысл лишь для возмущений ε , δ и α , малых по сравнению с единицей, но больших по сравнению с отношением a/b . Кроме того, возмущения должны быть достаточно плавными: производные по φ ε' , δ' , α' не могут по порядку величины превышать сами функции. Последнее означает, что в разложениях типа (1.3) высшие гармоники имеют исчезающе малый вес. Следовательно, рассматриваемые гармоники изгиба удовлетворяют условиям вида

$$na/b \ll n\Delta_n/b \ll 1 \quad (1.8)$$

где $\Delta_n \sim b\varepsilon_n \sim b\delta_n$ — смещение шнура.

Найдем теперь величину $\Phi^e = \Phi_2$, которая зависит от структуры магнитного поля. Внешнее магнитное поле в окрестности кольца представляет собой суперпозицию основного поля, необходимого для удержания кольца в равновесии, и дополнительного квадрупольного, необходимого для его стабилизации. Если силовые линии внешнего поля симметричны относительно плоскости $z = 0$, а на окружности $r = b$, $z = 0$ основное поле имеет значение $B_{0z} = B_0$, то в области, занятой возмущенным кольцом, магнитное поле с точностью до квадратичных по z и $r - b$ членов можно представить в виде

$$B_r = Gz, \quad B_\varphi = 0, \quad B_z = B_0 + G(r - b) \quad (1.9)$$

Здесь

$$G = G_0 + G_g, \quad G_0 = \left(\frac{\partial B_{0z}}{\partial r} \right)_{r=b, z=0}, \quad G_g = \left(\frac{\partial B_{gz}}{\partial r} \right)_{r=b, z=0} \quad (1.10)$$

а индексами 0 и q отмечены величины, относящиеся к основному и квадрупольному полям соответственно.

Поле (1.9) описывается вектор-потенциалом с одной компонентой $A_\varphi = A$

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad B_z = \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{A}{r} \quad (1.11)$$

Разлагая A в ряд Тэйлора в окрестности равновесного шнура и используя формулы (1.9) — (1.11), а также равенство $d\mathbf{l}_\varphi = b(1 + \varepsilon)d\varphi$ из работы [2], получим поток внешнего поля через возмущенное кольцо

$$\Phi^e = \int A d\mathbf{l} = \Phi_0 + \Phi_q + \pi b^2 [2B_0 \varepsilon_0 + B_0 \langle \varepsilon^2 \rangle + bG \langle \varepsilon^2 - \delta^2 \rangle]$$

где Φ_0 и Φ_q — потоки основного и квадрупольного полей через невозмущенное кольцо. Рассматривая случай, когда продольный ток в шнуре

$$I_2 = I_{2c} \cos \omega t \quad (1.12)$$

а квадрупольное поле постоянно, будем считать, что

$$\Phi_0 = \Phi_{00} + \Phi_{0c} \cos \omega t, \quad \Phi_q = \Phi_{q0} = \text{const} \quad (1.13)$$

Тогда второе из соотношений (1.2) дает

$$\Phi_{00} + \Phi_{0c} \cos \omega t + \Phi_{q0} - \Phi_2 = -2\pi b l c^{-1} I_{2c} \cos \omega t \quad (1.14)$$

Отсюда

$$\Phi_{00} + \Phi_{q0} - \Phi_2 = 0, \quad \Phi_{0c} = -2\pi b l c^{-1} I_{2c} \quad (1.15)$$

Первое уравнение (1.15) показывает, что поток Φ_{00} необходим для компенсации Φ_{q0} в том случае, когда плазменное кольцо создано до включения поля и, следовательно, $\Phi_2 = 0$.

Поле, образующее поток Φ_{00} , следует брать таким, чтобы оно было равно нулю в области, занятой возмущенным кольцом, для которой имеют место уравнения (1.9), (1.10). Тогда, очевидно, $B_0 = B_{0c} \cos \omega t$, $G_0 = G_{0c} \cos \omega t$, т. е. B_0 и G_0 не содержат постоянных составляющих. В отличие от G_0 $G_q = G_{q0} = \text{const}$, так как квадрупольное поле постоянно.

Удобно ввести среднее поле $B' = \Phi_{0c} / \pi b^2$. Из второго уравнения (1.15) при этом следует, что амплитуда магнитного поля тока I_2

$$B_2 = 2I_2 / ca = B_{2c} \cos \omega t$$

связана с B' простым соотношением

$$B_{2c} = -B' b / al \quad (1.16)$$

При помощи несложных, но громоздких преобразований находим

$$(\Phi^e - \Phi_2)^2 / 2L_2 = p_{2c} V_0 [(l + w)(1 + \cos 2\omega t) + 4(b/a)^2 \kappa_{q0} \times \times \langle \delta^2 - \varepsilon^2 \rangle \cos \omega t] \quad (1.17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} w = & (K - 2) \varepsilon_0 + 2\alpha_0 + 2 \langle \varepsilon \alpha \rangle - 2(l + 4 - K) l^{-1} \varepsilon_0 \alpha_0 + \\ & + 4l^{-1} \alpha_0^2 + [1/4 (l + 4 - K)^2 l^{-1} - 1] \varepsilon_0^2 - \langle \alpha^2 \rangle + 1/2 (l + K) \times \\ & \times \langle \varepsilon^2 \rangle + 2(b/a)^2 \kappa_0 \langle \delta^2 - \varepsilon^2 \rangle - 1/2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [(\Lambda - g_r(n)) \varepsilon_n^2 + \\ & + (\Lambda - g_z(n)) \delta_n^2] \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} K = & (4\chi - 1) l, \quad \chi = B_{0c} / B', \quad p_{2c} = B_{2c}^2 / 16\pi \\ \kappa_0 = & aG_{0c} / B_{2c}, \quad \kappa_{q0} = aG_{q0} / B_{2c} \end{aligned}$$

Складывая (1.5), (1.6) и (1.17) и приравнявая нулю суммарные коэффициенты при α_0 и ε_0 , не зависящие от времени, получим условия того,

что вынужденные колебания малого и большого радиусов кольца происходят около значений a и b

$$p_0 = 1/2 (K - 1) p_{2c}, \quad p_1 = 1/2 (3 - K) p_{2c} \quad (1.19)$$

Следовательно, параметр K должен удовлетворять неравенствам

$$1 < K \leq 3 \quad (1.20)$$

С учетом (1.19) для обобщенной потенциальной энергии кольца

$$W = U + \Phi_1^2 / 2L_1 + (\Phi^e - \Phi_2)^2 / 2L_2$$

получим выражение

$$\begin{aligned} W = & W_0 + p_{2c} V_0 \{ [2(2 - K) + \gamma(K - 1) + 4l^{-1}] \alpha_0^2 + \\ & + 1/4 [(l + 4 - K)^2 l^{-1} - 4 + \gamma(K - 1)] \varepsilon_0^2 + [\gamma(K - 1) - \\ & - 2(l + 4 - K) l^{-1}] \varepsilon_0 \alpha_0 + (2 - K) \sum_{n=1} \alpha_n^2 + 1/2 (l + K) \langle \varepsilon^2 \rangle - \\ & - 1/4 \sum_{n=1} n^2 [(l + K - q_r(n)) \varepsilon_n^2 + (l + K - q_z(n)) \delta_n^2] + 2(b/a)^2 \times \\ & \times (\chi_0 + 2\chi_{q_0} \cos \omega t) \langle \delta^2 - \varepsilon^2 \rangle + w \cos 2\omega t \} \quad (1.21) \end{aligned}$$

Здесь W_0 — потенциальная энергия невозмущенного кольца

$$q_r(n) = 2 [g_r(n) - 1], \quad q_z(n) = 2 [g_z(n) - 1]$$

Формулы (1.4) и (1.21) дают искомую функцию Рауса $R = T - W$, которая, в принципе, позволяет провести полное исследование движения кольца. Однако задача осложняется тем, что отдельные гармоники возмущения не являются нормальными колебаниями системы. Как видно из (1.4), (1.18) и (1.21), имеет место связь колебаний по большому и малому радиусам ($\varepsilon\alpha$ -связь). В то же время отсутствие $\delta\alpha$ -связи говорит о том, что в случае прямого шнура гармоники не связаны, т. е. являются нормальными колебаниями системы. Действительно, положив

$$x = b\varepsilon, \quad z = b\delta, \quad \rho = a\alpha$$

и произведя предельный переход $b \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ при конечном отношении $n/b = k$, являющемся волновым числом возмущения, для погонных кинетической T_1 и потенциальной W_1 энергий получим выражения, в которых все гармоники разделены

$$T_1 = \frac{1}{2} \pi a^2 \sigma \left\{ \dot{x}_0^2 + \dot{z}_0^2 + \frac{1}{2} \dot{\rho}_0^2 + \sum_k \left[\frac{1}{2} (\dot{x}_k^2 + \dot{z}_k^2) + 2\dot{\rho}_k^2 (ka)^{-2} \right] \right\} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} W_1 = & W_{01} + \pi p_{2c} \{ [2(2 - K) + \gamma(K - 1)] \rho_0^2 + (2 - K) \sum_k \rho_k^2 - \\ & - 1/4 \sum_k (ka)^2 [2 \ln(2/ka) - 2C + K - 3] (x_k^2 + z_k^2) + 4\chi_{q_0} \langle z^2 - x^2 \rangle \times \\ & \times \cos 2\omega t + [2a\rho_0 - \langle \rho^2 \rangle - 1/4 \sum_k (ka)^2 [2 \ln(2/ka) - 2C - 1] (x_k^2 + \\ & + z_k^2)] \cos 2\omega t \} \quad (1.23) \end{aligned}$$

($C = 0.577 \dots$ — постоянная Эйлера)

Здесь σ — плотность плазмы, а суммирование ведется по волновым числам k , удовлетворяющим согласно (1.8) условиям

$$ka \ll k\Delta_k \ll 1$$

В потенциальной энергии (1.23) отсутствуют члены с B_0 и G_0 , так как для прямого шнура нет необходимости иметь какое-либо внешнее поле, помимо квадрупольного.

Ниже будем исследовать устойчивость прямого шнура, имея в виду следующие обстоятельства: во-первых, для прямого шнура отдельные гармоники возмущения являются нормальными колебаниями, так что полученные условия устойчивости будут достаточными условиями стабилизации; во-вторых, при рассмотрении прямого шнура сохраняются все особенности, присущие системе с переменным продольным током (за исключением вынужденных колебаний большого радиуса); в-третьих, тороидальность, как показано в работе [2], существенным образом сказывается лишь на условиях устойчивости гармоник с $n \sim 1$, когда квадрупольная динамическая стабилизация наиболее эффективна, а для более критичных (с точки зрения линейной теории) гармоник с $n \gg 1$ эффект тороидальности несуществен. При необходимости устойчивость кольца может быть исследована при помощи полученной выше функции Рауса по той же схеме, что и устойчивость прямого шнура.

2. Уравнения движения для механических переменных имеют вид

$$\rho_0'' + 2\nu^{-2} [2(2 - K) + \gamma(K - 1) - \cos 2\tau] \rho_0 = -2a\nu^{-2} \cos 2\tau$$

$$\tau = \omega t \quad (2.1)$$

$$\rho_k'' + 1/4 (ka)^2 \nu^{-2} [2(2 - K) - \cos 2\tau] \rho_k = 0, \quad \tau = \omega t \quad (2.2)$$

$$x_0'' - 16\kappa_{q0} \nu^{-2} x_0 \cos 2\tau = 0, \quad 2\tau = \omega t \quad (2.3)$$

$$z_0'' + 16\kappa_{q0} \nu^{-2} z_0 \cos 2\tau = 0, \quad 2\tau = \omega t \quad (2.4)$$

$$x_k'' - 2\nu^{-2} [(ka)^2 \Lambda_k + 8\kappa_{q0} \cos 2\tau + (ka)^2 (\Lambda_k + 2 - K) \cos 4\tau] x_k = 0$$

$$2\tau = \omega t \quad (2.5)$$

$$z_k'' - 2\nu^{-2} [(ka)^2 \Lambda_k - 8\kappa_{q0} \cos 2\tau + (ka)^2 (\Lambda_k + 2 - K) \cos 4\tau] z_k = 0$$

$$2\tau = \omega t \quad (2.6)$$

Здесь

$$\nu = \omega / \Omega, \quad \Omega^2 = 2p_{2c} / (\sigma a^2), \quad \Lambda_k = 2 \ln(2/ka) - 2C + K - 3$$

штрих означает дифференцирование по τ . Уравнения (2.2) — (2.6) можно привести к стандартной форме уравнения Хилла [3]

$$u'' + (\theta_0 + 2\theta_1 \cos 2\tau + 2\theta_2 \cos 4\tau) u = 0 \quad (2.7)$$

а уравнение (2.1) отличается от остальных только наличием правой части.

Исследуем сначала колебания типа змеек (2.3) — (2.6). Коэффициенты θ_0 , θ_1 и θ_2 записываются сразу для любых волновых чисел k

$$\theta_0 = -2(ka)^2 \nu^{-2} \Lambda_k, \quad \theta_1 = \pm 8\kappa_{q0} \nu^{-2}$$

$$\theta_2 = -(ka)^2 \nu^{-2} (\Lambda_k + 2 - K) \quad (2.8)$$

Для колебаний по z в θ_1 нужно брать верхний знак, а для колебаний по x — нижний.

В случае смещений шнура как целого $k = 0$, $\theta_0 = \theta_2 = 0$ и для устойчивости [3] должно выполняться неравенство

$$|\theta_1| < 0.9 \quad (2.9)$$

Имеются, правда, области устойчивости и при $|\theta_1| \gg 1$, но они допускают изменение параметров в очень узких пределах и поэтому практически неинтересны.

Для возмущений с конечной длиной волны (собственно змеек) $\theta_0 < 0$ и условие устойчивости при выполнении (2.9) и неравенства

$$|\theta_2| < 1 \quad (2.10)$$

с достаточной степенью точности может быть записано [3] в виде

$$\theta_0 + 1/2 \theta_1^2 (1 + 1/2 \theta_2) > 0 \quad (2.11)$$

Решая это неравенство совместно с (1.20) и (2.10) и учитывая конкретный вид θ_0 и θ_2 , можно показать, что уже при $ka < 1/4$ $|\theta_2| < 1/2$, поэтому членом с θ_2 в (2.11) можно пренебречь. Тогда вместо (2.11) имеем

$$\theta_0 + 1/2 \theta_1^2 > 0 \quad (2.12)$$

что совместно с (2.9) дает

$$\sqrt{2|\theta_0|} < |\theta_1| < 0.9 \quad (2.13)$$

Подставляя в (2.13) значения θ_0 и θ_1 из (2.8), получим

$$v > v_0 \equiv 2.2ka \sqrt{\Lambda_k} \quad (2.14)$$

$$0.9v_0 v < 8\kappa_{q0} < 0.9v^2 \quad (2.15)$$

Исходя из неравенств (2.14), (2.15), можно определить достаточные для стабилизации возмущений типа змеек частоту тока в шнуре ω и градиент квадрупольного поля G_{q0} .

Перейдем теперь к исследованию радиальных колебаний шнура. В отличие от системы с постоянным током, когда радиальные колебания описывались уравнениями с постоянными коэффициентами, в рассматриваемом случае, как и для змеек, имеют место уравнения типа (2.7).

Для перетяжек ($k \neq 0$), как это следует из (2.2)

$$\theta_0 = 1/2 (ka)^2 v^{-2} (2 - K), \quad \theta_1 = -1/8 (ka)^2 v^{-2}, \quad \theta_2 = 0 \quad (2.16)$$

Если выполнено условие (2.14), то, как нетрудно показать, $|\theta_1| \ll 1$. В таком случае при $K \geq 2$, когда $\theta_0 \leq 0$, критерий устойчивости имеет вид (2.12). Подставляя $\theta_0 = 4\theta_1(K-2)$ в (2.12), получим для K неравенства

$$0 \leq K - 2 < 1/8 |\theta_1| \ll 1/8$$

Напомним, что в случае шнура с постоянным током [2] перетяжки устойчивы при $K < 2$, что вследствие (1.19) эквивалентно известному условию $p_1 > p_0$. Не придавая особого значения небольшому увеличению максимального допустимого K , посмотрим, что будет при $K \leq 2$ для шнура с переменным током. В этом случае $\theta_0 \geq 0$ и, следовательно, возможно параметрическое возбуждение перетяжек. Так как при условии (2.14) $|\theta_1| \ll 1$, для устойчивости должно выполняться [3], например, неравенство $1 - |\theta_1| > \theta_0$, которое с учетом (2.16) дает

$$v^2 > 1/8 (ka)^2 [1 + 4(2 - K)]$$

Последнее неравенство удовлетворяется, коль скоро выполнено условие (2.14). Значит, при устойчивости по отношению к змейкам шнур устойчив и по отношению к перетяжкам, если $K \leq 2$, т. е. $p_1 \geq p_0$.

Рассмотрим, наконец, колебания радиуса шнура ($k = 0$). Уравнение (2.1) имеет коэффициенты

$$\theta_0 = 2v^{-2} [2(2 - K) + \gamma(K - 1)], \quad \theta_1 = -v^{-2}, \quad \theta_2 = 0 \quad (2.17)$$

и, кроме того, правую часть, пропорциональную $\cos 2t$. Последнее означает, что шнур испытывает вынужденные колебания с частотой 2ω . Однако внешняя сила такого рода не является резонансной [4], так что устойчивость определяется только коэффициентами (2.17) однородного уравнения.

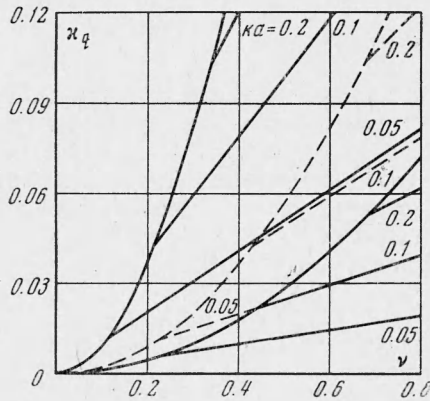
Записав θ_0 в виде $\theta_0 = 2v^{-2} [3 - K + (\gamma - 1)(K - 1)]$, убеждаемся, что $\theta_0 > 0$ при любом K из интервала (1.20), так как $\gamma > 1$. При этом, как и в случае перетяжек, может произойти параметрическая раскачка колебаний. Ширина областей параметрического возбуждения, как извест-

но [3], растет с увеличением отношения $\theta_0 / |\theta_1|$. В рассматриваемом случае $\theta_0 / |\theta_1| = 2 [2(2 - K) + \gamma(K - 1)]$, и, если $2 \geq K > 1$, $\gamma \leq 2$, то

$$2\gamma \leq \theta_0 / |\theta_1| \leq 4$$

Наиболее широкие зоны неустойчивости будут, таким образом, при $\theta_0 = 2\gamma |\theta_1|$, когда $K = 2$.

Приведем для этого случая с $\gamma = 5/3$ приближенные значения границ трех первых областей параметрического возбуждения и относительную полуширину этих областей



$$S \equiv \frac{v_{\max} - v_{\min}}{v_{\max} + v_{\min}}$$

$$2.08 > v > 1.53, \quad S = 0.15 \quad (1 \text{ зона})$$

$$0.91 > v > 0.82, \quad S = 0.05 \quad (2 \text{ зона})$$

$$0.605 > v > 0.580, \quad S = 0.02 \quad (3 \text{ зона})$$

Наибольшую опасность представляет самая широкая первая зона неустойчивости. Однако если v выбрать незначительно превышающим предельное значение, даваемое критерием (2.14), то $v < 1$ и рабочая точка не попадает в первую зону. Остальные зоны относительно узки, поэтому вероятность параметрического резонанса более высокого порядка мала. В случае необходимости небольшим изменением какого-ли-

бо параметра системы от нежелательного резонанса можно «отстроиться».

Таким образом, можно считать, что шнур устойчив по отношению к длинноволновым возмущениям типа змеек и перетяжек, если выполнены условия (2.14), (2.15) и $K \leq 2$ ($p_1 \geq p_0$). На фигуре (правая ветвь) для $K = 2$ построены области устойчивости шнура, которые для заданного значения ka лежат между параболой и соответствующей прямой. Ясно видно, что требуемые для стабилизации значения v и κ_{q0} растут с уменьшением длины волны возмущения. При $K < 2$ области устойчивости немного сужаются за счет увеличения угла наклона прямых.

3. Пусть теперь квадрупольное поле меняется с той же частотой, что и ток в шнуре, но со сдвигом фазы на четверть периода, т. е. если ток имеет прежнюю форму (1.12), то

$$B_q = B_{qs} \sin \omega t, \quad G_q = G_{qs} \sin \omega t$$

и, следовательно,

$$\Phi_q = \Phi_{qs} \sin \omega t$$

При выбранном сдвиге фаз не нарушается симметрия x - и z -колебаний. Поток Φ_0 следует взять в более общем, чем в (1.13), виде

$$\Phi_0 = \Phi_{00} + \Phi_{0c} \cos \omega t + \Phi_{0s} \sin \omega t$$

Тогда вместо (1.14) получим

$$\Phi_{00} + \Phi_{0c} \cos \omega t + \Phi_{0s} \sin \omega t + \Phi_{qs} \sin \omega t - \Phi_2 = -2\pi b l c^{-1} I_{2c} \cos \omega t$$

Отсюда

$$\Phi_{00} - \Phi_2 = 0, \quad \Phi_{0s} + \Phi_{qs} = 0, \quad \Phi_{0c} = -2\pi b l c^{-1} I_{2c}$$

Поток Φ_{00} , очевидно, может вообще отсутствовать (при этом $\Phi_2 = 0$), а Φ_q должен теперь компенсироваться переменным потоком $\Phi_{0s} \sin \omega t$. В уравнениях (1.17), (1.21) и (1.23) $G_{q0} \cos \omega t$ заменится на $1/2 G_{qs} \sin 2\omega t$.

Радиальные колебания прямого шнура описываются, как и в случае постоянного квадрупольного поля, уравнениями (2.1), (2.2), а уравнения для возмущений типа змеек принимают вид

$$x_0'' - 2\kappa_{qs}v^{-2}x_0 \sin 2\tau = 0 \quad (3.1)$$

$$z_0'' + 2\kappa_{qs}v^{-2}z_0 \sin 2\tau = 0 \quad (3.2)$$

$$x_k'' - \frac{1}{2}v^{-2}[(ka)^2\Lambda_k + 4\kappa_{qs} \sin 2\tau + (ka)^2(\Lambda_k + 2 - K)\cos 2\tau]x_k = 0 \quad (3.3)$$

$$z_k'' - \frac{1}{2}v^{-2}[(ka)^2\Lambda_k - 4\kappa_{qs} \sin 2\tau + (ka)^2(\Lambda_k + 2 - K)\cos 2\tau]z_k = 0 \quad (3.4)$$

Здесь

$$\tau = \omega t, \quad \kappa_{qs} = aG_{qs} / B_{2c}$$

Соответствующим сдвигом по τ уравнения (3.1) — (3.4) приводятся к стандартной форме (2.7), так что исследование их устойчивости аналогично проведенному в п. 2 для постоянного квадрупольного поля. Опуская подробности, приведем условия стабилизации шнура

$$K \leq 2, \quad v > v_s \equiv 1.1ka \sqrt{\Lambda_k}, \quad 0.9v_s v < \kappa_{qs} < 0.9v^2 \quad (3.5)$$

По отношению к колебаниям радиуса шнура условия (3.5) справедливы с теми же оговорками, что и в п. 2. На фигуре (левая ветвь) приведены области устойчивости, построенные по неравенствам (3.5) для $K = 2$.

4. Для сравнения приведем результаты работы [2], которые нетрудно записать для прямого шнура: если

$$K < 2, \quad v > v_c \equiv 2.2ka \sqrt{\Lambda_k}, \quad 0.9v_c v < 4\kappa_{qc} < 0.9v^2 \quad (4.1)$$

$$(\kappa_{qc} = aG_{qc} / B_2, \quad B_2 = \text{const}, \quad G_q = G_{qc} \cos \omega t)$$

то шнур устойчив по отношению к длинноволновым возмущениям типа змеек и перетяжек. На фигуре (средняя ветвь, штриховые линии) по неравенствам (4.1) построены области устойчивости шнура в предельном случае $K = 2$.

Для нижних пределов рабочих частот и градиентов квадрупольных полей из (2.14), (2.15), (3.5) и (4.1) можно получить соотношения

$$G_{qc} = 2G_{q\phi} = G_{qs}, \quad \omega_c = \omega_0 = 2\omega_s$$

где индексами c и s отмечены соответствующие величины для случаев постоянного [2] и переменного (п.3) тока в переменном квадрупольном поле, а индексом 0 — для переменного тока в постоянном квадрупольном поле (п.2). Как видим, по сравнению с исследованным в [2] методом стабилизации при переменном токе в шнуре можно в два раза уменьшить градиент стабилизирующего поля, когда это поле постоянно, или в два раза уменьшить рабочую частоту, когда стабилизирующее поле, как и ток, переменное. Однако с практической точки зрения более привлекательны первые два варианта, в которых или ток, или квадрупольное поле является постоянным.

В заключение автор благодарит М. Л. Левина за полезные обсуждения и советы.

Поступила 27 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Осовец С. М. Динамическая стабилизация плазменного витка. ЖЭТФ, 1960, т. 39, № 2.
2. Левин М. Л., Рабинович М. С. Метод сильной фокусировки для стабилизации прямых и тороидальных разрядов. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, № 2.
3. Хаяси Т. Вынужденные колебания в нелинейных системах. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
4. Горелк Г. С. Резонансные явления в линейных системах с периодически меняющимися параметрами. Ж. техн. физ., 1934, т. 4, № 10.