

6. Донцов В.Е. Структура и динамика возмущений давления конечной амплитуды в пористой среде, насыщенной жидкостью с пузырьками газа // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1992. — № 1.
7. Nakoryakov V.E., Kuznetsov V.V., Dontsov V.V. Pressure waves in saturated porous media // Int. J. Multiphase Flow. — 1979. — V. 15, N 6.
8. Johnson D.L., Plona T.S. Slow waves and the consolidation transition // J. Acoust. Soc. Amer. — 1982. — V. 72, N 2.

г. Новосибирск

Поступила 11/III 1994 г.

УДК 532.527

С.К. Бетяев, О.П. Брысов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В АЭРОДИНАМИКЕ КРЫЛА

Современный *O*-оценочный уровень строгости в гидродинамике обусловлен широким применением асимптотических методов. Так, в теории крыла число Рейнольдса *Re* традиционно считается большим параметром, потому что, с одной стороны, в авиации оно достигает значений $10^7 + 10^8$, а с другой — только такое упрощающее предположение открывает путь к математическому моделированию задачи, а именно — к использованию асимптотической по своему содержанию концепции Прандтля о невязком характере течения в масштабах хорды или размаха крыла.

Топологические методы. Добываемые с помощью промышленного эксперимента причудливые зависимости суммарных и распределенных аэродинамических характеристик от угла атаки не перестают удивлять исследователей гистерезисом, спонтанно возникающей асимметрией, спиральностью, нестационарностью и т.д. Будучи «черным ящиком», такой эксперимент не позволяет выяснить природу явления. Версии о природе явления, о схемах (топологии) течения, а значит, и сами математические модели обтекания крыла строятся на основе качественного эксперимента, с помощью которого, в частности, определяются топологические свойства изолиний (обычно линий тока) на поверхности крыла или на плоскости симметрии течения [1].

Поскольку $Re \gg 1$, следует различать поле поверхностных линий течения (предельных линий тока) непосредственно на крыле и поле поверхностных линий тока невязкого течения на внешней границе пограничного слоя. Топография первого из них определяется обычно методом масляных точек, топография второго — методом шелковинок или методом визуализации пристеночных струек тока посредством впрыскиваемой краски.

Следует отметить, что топографические методы в экспериментальной аэродинамике определяют некоторое осредненное по времени поле поверхностных линий и поэтому пригодны, когда нестационарность мала.

Введем на плоской поверхности тока прямоугольную систему координат *x*, *y*, а соответствующие компоненты скорости обозначим посредством *u* и *v*, нормальную к плоскости составляющую скорости *w* направим по оси *z*. Вне окрестности линии отрыва из условия непротекания имеем $w(x, y, z) = zw_0(x, y) + o(z)$. Потенциал безвихревого течения несжимаемой жидкости определяется уже не из трехмерного уравнения Лапласа, а из двумерного уравнения Пуассона с неизвестной правой частью ($-w_0$). Поэтому нельзя получить полную информацию о течении на поверхности тока, не решив задачу в целом.

© С.К. Бетяев, О.П. Брысов, 1995

Поверхностные линии тока невязкого течения — это траектории обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}.$$

Их топология определяется типом и расположением особых точек: $u = v = 0$. Поле поверхностных линий тока несолоноидально, так как из уравнения неразрывности имеем

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = -w_0(x, y).$$

Несолоноидальность поля поверхностных линий тока указывает на возможность появления особых точек типа узла. Рассмотрим решение в окрестности особой точки $x = y = 0$, предполагая, что первые производные от скорости и завихренности конечны. Тогда нормальная к поверхности $z = 0$ составляющая вектора вихря в этой окрестности постоянна и равна $u_y - v_x$. Из уравнения переноса завихренности, которое сводится к одночленному условию отсутствия растяжения и поворота вихревых линий $(u_y - v_x)A = 0$, где $A = w_0(0, 0)$, находим, что в пространственном движении ($A \neq 0$) нормальная компонента вихря равна нулю, т.е. $u_y - v_x = 0$. Особая точка уравнения поверхностных линий тока является седлом, если $u_y^2 - u_x v_y > 0$, и узлом, если $u_y^2 - u_x v_y < 0$.

Таким образом, в рамках принятого предположения об ограниченности производных не существует особых точек типа фокуса. Такой вывод справедлив, если плоскость $z = 0$ есть плоскость симметрии. Если плоскость $z = 0$ — поверхность крыла, то, как показывает опыт, фокальные особенности возникают. Их появление объясняется, по-видимому, отрывным характером течения, а значит, нарушением условия о конечности градиента скорости или завихренности.

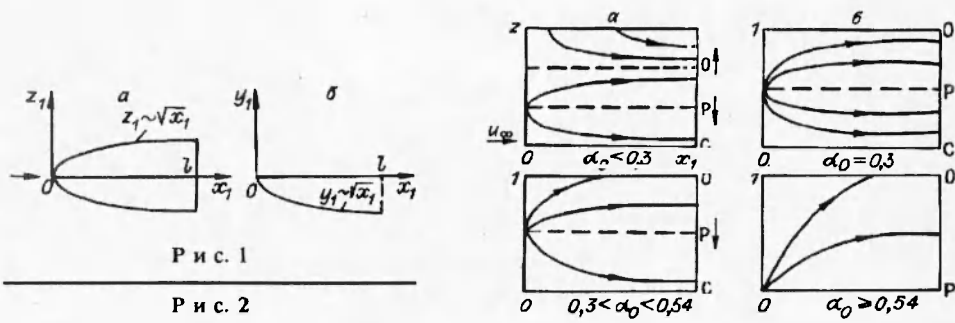
В согласии с условием прилипания разложение скорости течения вязкой жидкости на крыле пропорционально z или z^2 . Поле линий тока вязкой жидкости на поверхности крыла — это траектории обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial v / \partial z}{\partial u / \partial z} \Big|_{z=0}.$$

Поскольку уравнение Навье — Стокса более высокого порядка, чем уравнение Эйлера, никаких ограничений на коэффициенты разложений составляющих скорости по целым степеням z из него получить не удастся. Следовательно, в потоке вязкой жидкости и, в частности, на дне пограничного слоя возможны особенности любых типов [2, 3].

В общем случае никакой прямой связи между особенностями на дне пограничного слоя и на его внешней границе не установлено, они могут быть разнотипными и отстоящими друг от друга на конечное расстояние, определяя два топологически различных поля пристеночного течения. Ситуация нарушается, когда завихренность выходит из недр пограничного слоя во внешнюю невязкую область. Так, в случае смерчевидного отрыва фокальная особенность присуща обоим полям пристеночного течения.

Асимптотическая теория крыла. Обтекание крыла зависит, по меньшей мере, от пяти главных безразмерных параметров: удлинения λ , числа Маха невозмущенного потока M_∞ , угла атаки α , максимальной относительной толщины крыла δ и Re . Такое обилие параметров делает задачу нерешаемой, для построения математической модели требуется дальнейшая идеализация. Начнем с конца этого списка параметров. Значение Re уже определили как большой параметр, перейдя тем самым к уравнениям Эйлера. Толщина крыла обычно мала, ее влияние оценивается линейным образом всюду, кроме окрестности кромок крыла, где необходимо вводить



специальное разложение. Поэтому, положив $\delta = 0$, будем считать поверхность крыла плоской.

В связи с расширением эксплуатационного диапазона углов атаки современных самолетов и ракет вплоть до 180° величина α может принимать два значения: $\alpha = O(1)$ и $\alpha \ll 1$. В первом случае обтекание дозвуковое, если $M_\infty < 1$, и сверхзвуковое, если $M_\infty > 1$. Во втором случае классификация режимов более разнообразна: $M_\infty < 1$ — дозвуковая линейная теория, $(M_\infty - 1)\alpha^{-2/3} = O(1)$ — трансзвуковая теория, $M_\infty > 1$ — сверхзвуковая линейная теория, $M_\infty \alpha = O(1)$ — гиперзвуковая теория.

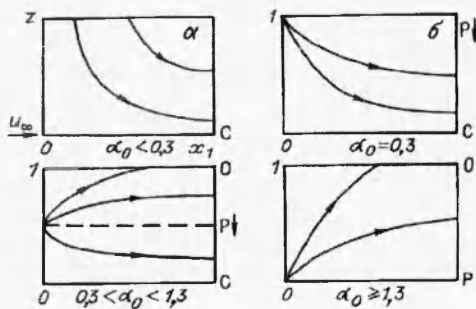
Единственный оставшийся параметр λ , которым мы еще не успели распорядиться, в асимптотической теории крыла считается большим или малым. В обоих приближениях окрестность крыла является узкой внутренней зоной, где справедлив закон плоских сечений: в плоскости, нормальной к продольной координате зоны, трехмерное течение эквивалентно плоскому.

В соответствии с этим различают: теорию профиля ($\lambda = \infty$), теорию крыла большого удлинения ($\lambda \gg 1$), теорию крыла конечного удлинения ($\lambda = O(1)$) и теорию крыла малого удлинения ($\lambda \ll 1$).

В рамках теории крыла большого удлинения построены математические модели дозвукового [4] и трансзвукового обтекания [5], а также глассирования. Топология линий тока всюду, кроме боковых кромок крыла, тривиальная, так как во внутренней области, масштаб которой равен хорде крыла, справедлив закон плоских сечений: профили крыла обтекаются независимо друг от друга.

В теории крыла малого удлинения построены математические модели обтекания крыла дозвуковым, трансзвуковым, сверхзвуковым и гиперзвуковым потоком, модель обтекания боковой кромки прямоугольного крыла [6, 7], а также модель обтекания удлиненного судна [8]. При дозвуковом или сверхзвуковом обтекании во внутренней области, масштаб которой равен размаху крыла, при $\alpha \gg \lambda$ справедлива стационарная аналогия с плоским течением: поперечные сечения крыла обтекаются независимо друг от друга; при $\alpha = O(\lambda)$ справедлива нестационарная аналогия с плоским течением:

продольная координата играет роль времени [9, 10]. С учетом отрыва потока от боковых кромок получают нетривиальные топологические картины обтекания крыла малого удлинения. Пример такой картины можно построить, если воспользоваться нестационарной аналогией с плоским течением и точным решением плоской задачи в случае так называемого течения Никольского [11]. Согласно нестационарной аналогии, плоской задаче об обтекании пластины, движущейся



Р и с. 3

щейся и расширяющейся со скоростью, пропорциональной $t^{-1/2}$ (t — время), соответствует обтекание крыла малого удлинения, параболически изогнутого в плане (рис. 1, а) и в плоскости симметрии (рис. 1, б). Боковые кромки такого крыла изогнуты по закону

$$z_1 = \lambda l \left(\frac{x_1}{l} \right)^{1/2},$$

а срединная линия имеет вид

$$y_1 = -\alpha_0 \lambda l \left(\frac{z_1}{l} \right)^{1/2} < 0,$$

где l — длина крыла; $\lambda \ll 1$ — удлинение, $\alpha_0 = O(1)$ — относительный угол атаки.

В переменных x_1 и

$$z = \frac{z_1}{\lambda l} \left(\frac{x_1}{l} \right)^{-1/2}$$

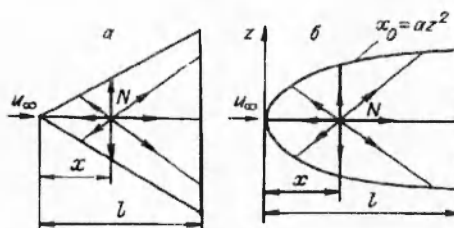
крыло становится «прямоугольным»: $|z| \leq 1$, $x_1 > 0$. Рис. 2 демонстрирует поле линий тока на верхней поверхности крыла в зависимости от α_0 , рис. 3 — на нижней. Топология изменяется при $\alpha_0 \approx 0,3$; $0,54$ и $1,3$. Линия симметрии $z = 0$ может быть как линией растекания (Р), так и линией стекания (С). Стрелки на поверхностных линиях тока указывают направление вектора относительной скорости. Вертикальные стрелки указывают направление движения особых точек с увеличением α_0 . Линии стекания в плоском автомодельном течении соответствует особая точка — седло, а линии растекания — узел. В решении Никольского линия отрыва (О) вырождена, скорость на ней непрерывна. Поэтому линия отрыва совпадает с особой линией (линией стекания).

Для тонких крыльев конечного удлинения, установленных под малым углом атаки, разработаны линейные теории как для дозвукового [12], так и для сверхзвукового обтекания [13, 14]. Линейные теории не описывают особенности в поле линий тока.

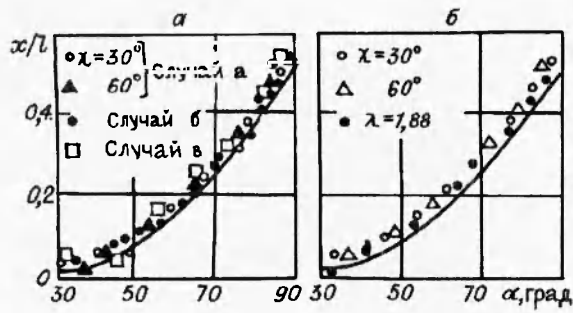
Основные события происходят на верхней поверхности крыла конечного удлинения. Поведение поверхностных линий трения на нем рассмотрим в последующих разделах, а здесь ограничимся обсуждением топологической картины обтекания нижней поверхности крыла конечного удлинения, которая принципиально отличается от картины обтекания нижней поверхности крыла малого удлинения. В рассматриваемом случае для традиционных форм крыла в плане поле поверхностных линий тока содержит одну особую точку — узел N . Топология течения показана схематично на рис. 4, а, б соответственно для треугольного крыла и параболического ($x_0 = az^2$).

Зависимость положения узла x/l от угла атаки модели α определялась экспериментально в гидродинамической трубе ГТ-1 ЦАГИ ($Re \approx 2 \cdot 10^4$) и в аэродинамической трубе Т-03 ЦАГИ ($Re \approx 5,2 \cdot 10^5$).

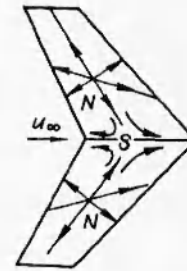
В гидротрубе испытывались пять моделей с шириной основания $b = 80$ мм: а) треугольные крылья с углами стреловидности $\chi = 30^\circ, 60^\circ$; б) параболические крылья длиной $l = 15$ и 25 мм; в) прямоугольное крыло длиной $l = 30$ мм. Зависимость x/l от α представлена на рис. 5, а. Сплошной линией отмече-



Р и с. 4



Р и с 5



Р и с 6

на зависимость, рассчитанная по формуле Рэлея,

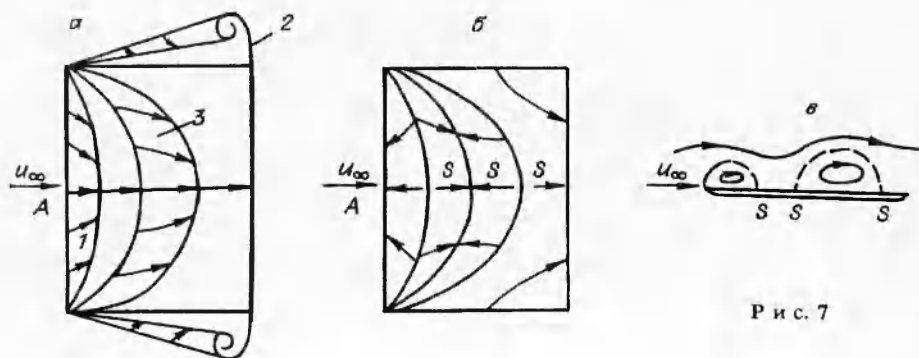
$$\frac{x}{l} = \frac{2\cos\alpha(1 + \sin^2\alpha) + (\pi - \alpha)\sin\alpha + 2}{\pi\sin\alpha + 4},$$

которая соответствует обтеканию прямоугольного крыла бесконечного размаха (плоской пластины) по схеме Гельмгольца. Совпадение опытных данных и этой простой теории удовлетворительное. Более того, зависимость x/l от α оказывается универсальной — одинаковой для всех форм крыла в плане.

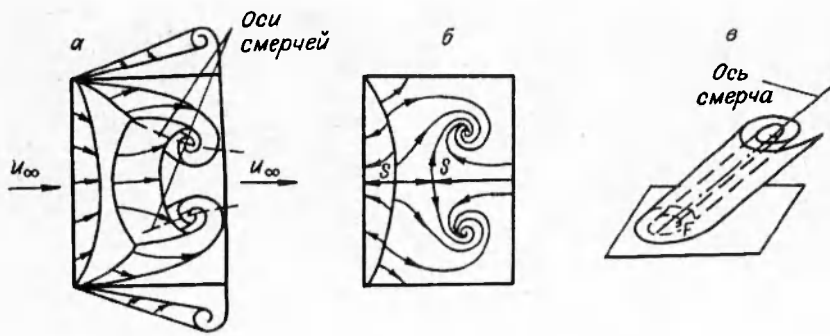
Считается, что схема Гельмгольца пригодна лишь для течения капле-ной жидкости и неприменима для течения сжимаемого газа. С целью определения зависимости x/l от α в сжимаемом газе опыты проводились в дозвуковой аэродинамической трубе Т-03 при малых скоростях ($M_\infty = 0,1$). Испытывались две модели треугольного крыла с углом при вершине 30 и 60°, а также модель прямоугольного крыла с удлинением 1,88. Зависимость x/l от α для этих моделей сравнивается с кривой Рэлея на рис. 5, б. Снова наблюдается удивительное совпадение.

Таким образом, положение узловой особенности на нижней поверхности крыла не зависит ни от его формы в плане, ни от свойств движущейся сплошной среды. Следует отметить, что этот закон может нарушиться, например, для крыла с обратной стреловидностью, предполагаемая схема обтекания которого с двумя узлами N и седлом S показана на рис. 6.

Обтекание прямоугольного крыла. Асимптотическая теория сильна, когда имеется малый ($\lambda \ll 1$) или большой параметр ($\lambda \gg 1$), но бес-силна, когда такого параметра нет. Аэродинамика крыла конечного удлин-ения, установленного под конечным углом атаки, т.е. область $\alpha = O(\lambda) = O(1)$, — это царство эксперимента [15—17] и вычислительной гид-родинамики [18, 19]. Математическая модель обтекания крыла конечного удлинения, пригодная во всем диапазоне изменения углов атаки, еще не построена, так как слишком сложными явлениями сопровождается такое



Р и с 7



Р и с. 8

обтекание. Неоценимую помощь в деле конструирования математической модели призван оказать качественный эксперимент, в результате проведения которого устанавливается топология течения, необходимая как для верификации численных методов, так и для разработки математических субмоделей, описывающих локальные свойства потока.

В аэродинамической трубе Т-03 с помощью метода масляных точек исследовалась картина линий поверхностного трения на верхней поверхности прямоугольного крыла, имеющего хорду 110 мм и удлинение 1,82. Крыло представляло собой пластину с острыми кромками. Обнаружены три топологически различных режима обтекания.

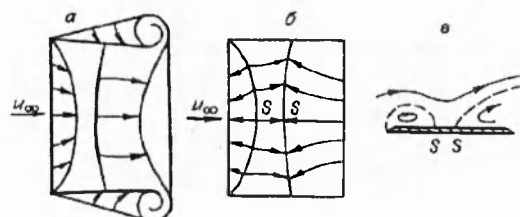
В первом режиме наряду со спиральным отрывом 2 с боковых кромок и пузыревидным отрывом с передней кромки 1 (кромочный пузырь) при малых углах атаки наблюдался основной пузырь 3 (рис. 7, а). На рис. 7, а—в изображены линии на внешней границе пузырей, поле линий поверхностного трения и течение в плоскости симметрии АА.

С увеличением угла атаки α примерно до 17° основной пузырь расширяется, линия присоединения достигает задней кромки крыла и, разрываясь, образует два смерчевидных вихря (рис. 8, а), инициаторами которых являются две фокальные особенности в поверхностных линиях трения (рис. 8, б). На рис. 8, в показана пространственная смерчевидная вихревая пелена.

Третий режим реализуется, когда $\alpha > 25^\circ$. Смерчевидные вихри разрушаются, обширный кормовой отрыв при устремлении угла атаки к 90° стремится занять всю верхнюю поверхность крыла, отрыв с боковых кромок становится нестационарным, многоспиральным (рис. 9).

Пси-эффект. Обтекание крыла с удлинением $\lambda < 1$ отличается большим топологическим разнообразием, чем обтекание крыла с $\lambda > 1$. В аэродинамической трубе Т-03 исследовались две модели прямоугольного крыла: 1) $\lambda = 0,5$, хорда 180 мм, размах 90 мм; 2) $\lambda = 0,8$, хорда 150 мм, размах 120 мм.

Когда углы атаки малы, режим обтекания не отличается от представленного на рис. 7. С увеличением угла атаки основной пузырь растет в размерах, причем его края остаются в передних углах крыла, а линия присоединения движется к задней кромке. Затем увеличение основного пузыря прекращается, отрывная зона разрывается, чему сопутствует образо-



Р и с. 9

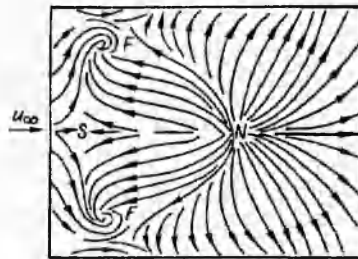
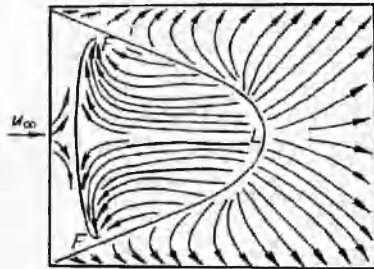


Рис. 10

Рис. 11

вание при $\alpha \approx 28^\circ$ двух фокальных особенностей F , показанных на рис. 10 (на рис. 10—12 вверху приведены фотографии масляных треков, а внизу — соответствующие карты линий течения). С ростом угла атаки линия растекания L , расположенная по нормали к линии симметрии, сужается, вырождаясь при $\alpha \approx 38^\circ$ в точку—узел N , обозначенную на рис. 11. Как следует из принципа Пуанкаре, на этом рисунке вблизи каждого фокуса должно располагаться седло. Однако достоверно обнаружить эти седловые особенности в опыте не удалось.

Такова топология обтекания крыла с $\lambda = 0,5$. Для крыла с $\lambda = 0,8$ фокусы и узел возникают практически одновременно при $\alpha \approx 28^\circ$.

Дальнейшее увеличение угла наклона крыла к набегающему потоку приводит к тому, что появляется расположенная на оси симметрии модели линия растекания (рис. 12), задняя точка которой достигает в итоге кромки крыла. Затем происходит расширение отрывной зоны, примыкающей к передней кромке крыла; наступает режим полного отрыва. минуя (по крайней мере, для крыла с $\lambda = 0,5$) стадию, изображенную на рис. 9.

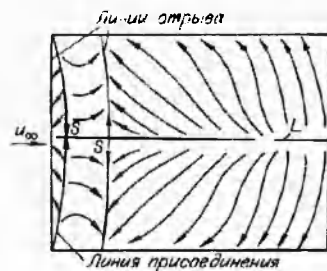
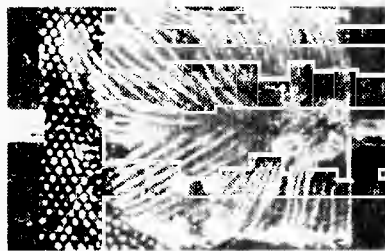


Рис. 12

Геометрическое место концов линии растекания в зависимости от α описывает кривую в форме лежащей буквы ψ (рис. 13). Отсюда и произошло название этого явления — пси-эффект.

В настоящее время смерчевидный вихрь поддается воспроизведению с по-

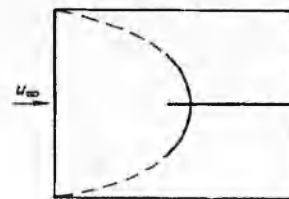


Рис. 13

мощью вычислительных методов [19], поэтому желательно провести численную верификацию всех топологических режимов обтекания крыльев и, в частности, пси-эффекта.

Авторы признательны А.П. Гордиенко и Т.Ю. Грачевой за помощь в проведении экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Topological fluid mechanics / Ed. by Н.К. Moffatt, A. Tsinober. — Cambr.: Cambr. Univ. Press, 1990.
2. Шевелев Д.Ю. Пространственные задачи вычислительной аэрогидродинамики. — М.: Наука, 1986.
3. Хиршель Э., Кордулла В. Сдвиговое течение сжимаемой жидкости. — М.: Мир, 1987.
4. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967.
5. Коул Дж., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика. — М.: Мир, 1989.
6. Cheng H.K. Aerodynamics of a rectangular plate with vortex separation in supersonic flow // J. Aeronaut. Sci. — 1955. — V. 22, N 4. — P. 217—226.
7. Молчанов В.Ф. Метод выделения главной части нелинейных характеристик прямоугольного крыла, обтекаемого идеальной жидкостью // Учен. зап. ЦАГИ. — 1980. — Т. 11, № 1. — С. 12—17.
8. Ньюмен Дж. Морская гидродинамика. — Л.: Судостроение, 1985.
9. Никольский А.А. Законы подобия для трехмерного стационарного отрывного обтекания тел жидкостью и газом // Учен. зап. ЦАГИ. — 1970. — Т. 1, № 1. — С. 1—7.
10. Бетяев С.К. Математическое моделирование ламинарных течений. — М., 1994. — Деп. в ВИМИ, № ДО—8567.
11. Никольский А.А., Бетяев С.К., Малышев И.П. О предельной форме отрывного автомодельного течения идеальной жидкости // Проблемы прикладной математики и механики. — М.: Наука, 1971. — С. 262—268.
12. Черный Г.Г. Газовая динамика. — М.: Наука, 1988.
13. Красильщикова Е.А. Тонкое крыло в сжимаемом потоке. — М.: Наука, 1978.
14. Майлс Дж.У. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. — М.: ГИФМЛ, 1963.
15. Stahl W., Mahmood M. Some aspects of the flow past a square flat at the high incidence // Z. Flugwiss. Weltraumforsch. — 1985. — N 9, H. 3. — S. 134—142.
16. Gregoriou G. Modern missile design for high angle-of-attack // AGARD-LS-121. — 1982. — P. 5.1—5.23.
17. Winkelmann A. Flow visualization studies of the tip vortex system of a semiinfinite wing. — N.Y., 1989. — (Paper / AIAA; N 1801).
18. Hunt B. The role of a computational fluid dynamics in high angle-of-attack aerodynamics // AGARD-LS-121. — 1987. — P. 6.1—6.28.
19. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. — М.: Мир, 1991. — Т. 1.

г. Жуковский

Поступила 4/1 1994 г.,
в окончательном варианте — 10/III 1994 г.

УДК 533.69.01

Д.Н. Горелов, С.И. Горлов

ДВИЖЕНИЕ ПРОФИЛЯ ВБЛИЗИ ПЛОСКОГО ЭКРАНА

Задача о движении профиля вблизи экрана имеет не только практический, но и теоретический интерес. Близость экрана меняет характер зависимости аэродинамических характеристик от угла атаки и формы профиля, имеющих место в безграничном потоке. При этом наблюдается сильное взаимное влияние параметров задачи, что ставит под сомнение ее решение методами линейной теории тонкого крыла [1, 2].

В общей постановке, без каких-либо упрощений, задача решалась методом конформных отображений в [1, 3]. Однако результаты расчетов по это-