

ОБ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ (ПРОЧНОСТИ)
ДЛЯ АРМИРОВАННОГО СЛОЯ

Ю. В. Немировский

(Новосибирск)

Построению критериев прочности и пластичности для анизотропных материалов посвящено большое число работ, обзор которых можно найти в [1-4]. Все эти критерии сформулированы безотносительно к характеру анизотропии, и допустимость их использования для тех или иных классов материалов требует тщательного анализа.

Механические свойства армированных материалов, очевидно, зависят от свойств материала связующего и материалов армирующих элементов, от характера армирования и его процентного содержания. Все эти зависимости в той или иной форме должны найти свое отражение в условии пластичности.

Приближенный учет таких зависимостей может быть осуществлен за счет введения, как это сделано в [3,4], в некоторое гипотетическое условие пластичности достаточного числа констант материала, определяемых из экспериментов. Заметим, что при любом изменении материалов композиций, характера армирования или его процентного содержания возникает необходимость в новых экспериментах для определения указанных констант.

Другой подход заключается в построении модели армированного материала, учитывающей его структуру, свойства элементов и особенности их поведения, и в определении условия пластичности для композиции материала, отражаемой принятой моделью.

Такой подход, используемый ниже, открывает путь к регулированию армирования для увеличения прочностных свойств армированных материалов.

1. Под армированным слоем понимаем сравнительно тонкую пластину, состоящую из изотропного материала с внедренным в него армирующим слоем. Последний представляет собой сеть тонких одномерных нитей, расположенных в направлениях, составляющих углы α_k ($k = 1, 2, \dots, m$) с направлением, обозначаемым в дальнейшем индексом 1.

Предполагается, что:

1) материал всех элементов, составляющих армированный слой, будет жестким идеально-пластическим и в общем случае различным для каждого элемента;

2) число армирующих элементов достаточно велико, так что армированный слой можно считать квазиоднородным;

3) в отношении соединения композиции предполагается идеальная адгезия, т. е. отсутствие проскальзывания между связующими и армирующими элементами;

4) расстояние между армирующими элементами достаточно велико по сравнению с их размерами, и в то же время достаточно мало по сравнению с размерами пластины, чтобы локальными эффектами вблизи нитей и нерегулярностью деформации между двумя смежными нитями можно было пренебречь;

5) постулируется, что каждая нить, если она принадлежит к системе внедренных в материал, способна выдерживать как растягивающую, так и сжимающую силу. Однако поскольку при воздействии сжимающей силы может возникать некоторая форма неустойчивости, то пределы текучести (прочности) нитей при растяжении и сжатии считаются разными.

Пусть ω_k — интенсивности армирующих нитей в направлениях, составляющих углы α_k с направлением 1, ω_2 — интенсивность армирующего слоя по толщине пластинки, h — толщина армированного слоя. Обозначим основные направления ортогональной системы координат в плоскости пластинки индексами 1 и 2. Тогда внутренние усилия в композитном слое

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= a\sigma_{ij}^{\circ} + \sum_{k=1}^m \omega_k \sigma_k l_{1k} l_{2k}, \quad i, j = 1, 2 \\ \sigma_{ij} &= T_{ij}/h, \quad l_{1k} = \cos \alpha_k, \quad l_{2k} = \sin \alpha_k, \quad 0 \leq \alpha_k \leq \pi \\ \omega_k &= \frac{n_k F_k}{AFh}, \quad a = 1 - \omega_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь T_{ij} — усилия, σ_{ij}° — напряжения в заполнителе, σ_k — напряжения в армирующих нитях, F_k — площади поперечного сечения армирующих элементов, n_k — число нитей армирующих элементов с индексом k на отрезке AF (фиг. 1).

При малых деформациях на основе предположения об отсутствии проскальзывания получим следующие зависимости между скоростями деформаций ε_k , элементов углового армирования и скоростями деформаций ε_{ij} слоя заполнителя

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{11} l_{1k}^2 + \varepsilon_{12} l_{1k} l_{2k} + \varepsilon_{22} l_{2k}^2 \quad (1.2)$$

Предполагаем, что материал заполнителя изотропен, обладает в общем случае различными свойствами на растяжение-сжатие и подчиняется условию пластичности П. П. Баландина [5]. Тогда при плоском напряженном состоянии идеального жестко-пластического тела [5,6] будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{\circ 2} - \sigma_{11}^{\circ} \sigma_{22}^{\circ} + \sigma_{22}^{\circ 2} + 3\sigma_{12}^{\circ 2} - (\sigma_0^- - \sigma_0^+) (\sigma_{11}^{\circ} + \sigma_{22}^{\circ}) - \sigma_0^- \sigma_0^+ &= 0 \\ \varepsilon_{11} &= \lambda(2\sigma_{11}^{\circ} - \sigma_{22}^{\circ} + \sigma_0^+ - \sigma_0^-), \quad \varepsilon_{22} = \lambda(2\sigma_{22}^{\circ} - \sigma_{11}^{\circ} + \sigma_0^+ - \sigma_0^-) \\ \varepsilon_{12} &= 6\lambda\sigma_{12}^{\circ} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь σ_0^{\pm} — пределы текучести материала связующего при растяжении (плюс) и сжатии (минус), λ — положительный множитель.

Уравнение (1.3) будет тождественно удовлетворено, если принять

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{\circ} + \sigma_0^+ - \sigma_0^- &= \frac{2}{3} \sqrt{3} \sigma_0 \cos(\theta - \frac{1}{6} \pi) \sin \varphi, \quad \sigma_{12}^{\circ} = \frac{1}{3} \sqrt{3} \sigma_0 \cos \varphi \\ \sigma_{22}^{\circ} + \sigma_0^+ - \sigma_0^- &= \frac{2}{3} \sqrt{3} \sigma_0 \cos(\theta + \frac{1}{6} \pi) \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$-\pi \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad \sigma_0^2 = (\sigma_0^-)^2 + (\sigma_0^+)^2 - \sigma_0^+ \sigma_0^- \quad (1.6)$$

Из (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 2\lambda\sigma_0 \cos(\theta - \frac{1}{3} \pi) \sin \varphi, \quad \varepsilon_{22} = 2\lambda\sigma_0 \cos(\theta + \frac{1}{3} \pi) \sin \varphi, \\ \varepsilon_{12} &= 2\sqrt{3} \lambda\sigma_0 \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.7)$$

Из (1.6) и (1.7) видно, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} > 0, \quad \varepsilon_{22} > 0 & \text{ при } -\frac{1}{6} \pi < \theta < \frac{1}{6} \pi \\ \varepsilon_{11} < 0, \quad \varepsilon_{22} < 0 & \text{ при } \frac{5}{6} \pi < \theta < \pi \\ \varepsilon_{11} > 0, \quad \varepsilon_{22} < 0 & \text{ при } \frac{1}{6} \pi < \theta < \frac{5}{6} \pi \\ \varepsilon_{11} < 0, \quad \varepsilon_{22} > 0 & \text{ при } -\frac{5}{6} \pi < \theta < -\frac{1}{6} \pi \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_{12} \geq 0 \text{ при } 0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2} \pi, \quad \varepsilon_{12} \leq 0 \text{ при } \frac{1}{2} \pi \leq \varphi \leq \pi \quad (1.9)$$

Из (1.1) и (1.3), учитывая условия одноосности напряженно-деформированного состояния в армирующих элементах и возможности для знаков деформаций в них в соответствие с (1.8), (1.9) и (1.2), в общем случае получим следующие предельные соотношения:

$$(\sigma_{11} - k_{11})^2 - (\sigma_{11} - k_{11})(\sigma_{22} - k_{22}) + (\sigma_{22} - k_{22})^2 + 3(\sigma_{12} - k_{22})^2 = (a \sigma_0)^2 \quad (1.10)$$

$$k_{11} = a(\sigma_0^- - \sigma_0^+) + \sum_{k=1}^m \omega_k a_k \pm \sigma_k \pm l_{1k}^2, \quad k_{12} = \sum_{k=1}^m \omega_k a_k \pm \sigma_k \pm l_{1k} l_{2k}$$

$$k_{22} = a(\sigma_0^- - \sigma_0^+) + \sum_{k=1}^m \omega_k a_k \pm \sigma_k \pm l_{2k}^2, \quad a_k^+ = 1, \quad a_k^- = -1$$

Здесь σ_k^\pm — пределы текучести элементов армирования при растяжении (+) и сжатии (-).

Вопрос о выборе верхних значков у σ_k^\pm решается в соответствии со знаками деформации ϵ_k . Области выбора тех или иных знаков в зависимости от параметров θ и φ при данных значениях углов армирования α_k можно установить, пользуясь выражениями (1.2), (1.8) и (1.9).

Так как в общем случае величины a_k^\pm независимы друг от друга, то уравнение (1.10) в пространстве напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} определяет 2^m эллипсоидов, получающихся параллельным смещением эллипсоида (1.3).

Помимо предельных соотношений (1.10), соответствующих исчерпанию несущей способности всех армирующих элементов и слоя заполнителя, возможен ряд предельных соотношений, соответствующих условиям жесткости армирующих элементов какого-либо направления.

Пусть армирующие элементы, составляющие угол α_k с осью I , остаются жесткими. При этом напряжение σ_k остается неопределенным и скорость деформации $\epsilon_k = 0$. Следовательно, из (1.2) и (1.7)

$$[l_{1k}^2 \cos(\theta - 1/3 \pi) + l_{2k}^2 \cos(\theta + 1/3 \pi)] \sin \varphi + \sqrt{3} l_{1k} l_{2k} \cos \varphi = 0$$

Это уравнение при данном значении угла армирования α_k позволяет определить φ через θ . После чего выражения (1.1) определяют три величины σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} через два параметра θ и σ_k и, следовательно, дают некоторое конечное предельное соотношение между величинами σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} . Дальнейшие преобразования, приводящие к исключению параметров θ и σ_k , здесь опускаем. При необходимости их нетрудно восстановить. Соответствующие операции будут продемонстрированы ниже на частных примерах. Следует иметь в виду при этом, что в (1.1) необходимо положить $\sigma_n = a_n^\pm \sigma_n^\pm$ для всех θ и φ , при которых $a_n^\pm \epsilon_n > 0$, т. е.

$$a_n^\pm \{ [l_{1n}^2 \cos(\theta - 1/3 \pi) + l_{2n}^2 \cos(\theta + 1/3 \pi)] \sin \varphi + \sqrt{3} l_{1n} l_{2n} \cos \varphi \} > 0, \quad a_n^\pm = \pm 1, \quad n = 1, 2, \dots, m, \quad n \neq k \quad (1.12)$$

В пространстве σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} соответствующие этому случаю предельные соотношения определяют цилиндрические поверхности с образующими, параллельными направлению жестких нитей.

И, наконец, возможен случай, когда два каких-либо семейства армирующих нитей остаются жесткими. Приравнивая в этом случае ϵ_k к нулю для двух конкретных значений k (например, 1 и 2) и пользуясь выражениями (1.2) и (1.7), определим параметры θ и φ . После чего величины σ_{ij}^0 , ϵ_k и σ_k (при $k > 2$) становятся известными, а напряжения σ_1 и σ_2 в жестких нитях остаются неопределенными. Исключая далее σ_1 и σ_2 из (1.1), полу-

чаем линейную зависимость между величинами σ_{ij} , которая в пространстве $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ определяет плоскость. Причем вектор скорости деформации с компонентами ϵ_{ij} будет ортогонален к этой плоскости.

Для изотропного материала связующего, как видно из (1.3) и (1.4), предельная поверхность в пространстве напряжений имеет вид выпуклого эллипсоида, а закон деформирования, связанный с ней, соответствует условию ортогональности вектора скорости деформации с компонентами $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}$ к эллипсоиду в данной точке на поверхности.

Для армированного слоя совокупная предельная поверхность, являясь выпуклой, состоит в общем случае из большого числа кусков различных аналитических поверхностей, а закон деформирования, как видно из построения предельной поверхности, снова соответствует условию ортогональности вектора скорости деформаций с компонентами $\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{22}$ к этой поверхности на каждом из ее кусков.

2. Рассмотрим частный случай, когда

$$m = 4, \sigma_{12} = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi / 2, \omega_3 = \omega_4 = \omega, \alpha_3 = \alpha, \alpha_4 = \pi - \alpha$$

Тогда

$$\omega_3 \sigma_3 l_{13} l_{23} = -\omega_4 \sigma_4 l_{14} l_{24}, \quad \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma, \quad k_{12} = 0, \quad \sigma_{12}^\circ = 0, \quad \varphi = \pi / 2$$

Условие жесткости элементов углового армирования (1.11) примет вид

$$\cos^2 \alpha \cos (\theta - 1/3 \pi) + \sin^2 \alpha \cos (\theta + 1/3 \pi) = 0 \quad (2.1)$$

Это равенство возможно только при $1/6 \pi < \theta < 5/6 \pi$ или $-5/6 \pi < \theta < -1/6 \pi$. Но в первом случае $\epsilon_{11} > 0, \epsilon_{22} < 0$ и $\sigma_1 = \sigma_1^+, \sigma_2 = -\sigma_2^-$, а во втором случае $\epsilon_{11} < 0, \epsilon_{22} > 0$ и $\sigma_1 = -\sigma_1^-, \sigma_2 = \sigma_2^+$.

Подставляя эти значения вместе с (1.5) в первые два равенства из (1.1) и исключая $\sigma = \sigma_3 = \sigma_4$ и θ при помощи (2.1), получаем

$$[\sigma_{22} + a(\sigma_0^+ - \sigma_0^-) \pm \omega_2 \sigma_2^\mp] \cos^2 \alpha - [\sigma_{11} + a(\sigma_0^+ - \sigma_0^-) \mp \omega_1 \sigma_1^\pm] \sin^2 \alpha = \mp 1/6 \sqrt{3} a \sigma_0 (1 + 3 \cos^2 2\alpha) \quad (2.2)$$

причем верхние знаки соответствуют значениям параметра θ из интервала $1/6 \pi < \theta < 5/6 \pi$, нижние — из интервала $-5/6 \pi < \theta < -1/6 \pi$.

В случае жестких армирующих элементов в направлениях 1 и 2 аналогично имеем

$$\sigma_{ii} = \mp \omega_i \sigma_i^\mp + a(\sigma_0^+ - \sigma_0^- \mp 2/3 \sqrt{3} \sigma_0) \quad (i = 1, 2) \quad (2.3)$$

Таким образом, в рассматриваемом частном случае предельная кривая в плоскости σ_{11}, σ_{22} определяется уравнениями (1.10), (2.2) и (2.3)

Схематический вид этой кривой показан сплошной линией на фиг. 2. При этом дуги *MA, BC, DE, FG, HJ* и *KL* определяются уравнениями (1.10), прямые *AB* и *GH, ML* и *EF* — уравнениями (2.3) и прямые *CD* и *JK* уравнениями (2.2). Если в данном частном случае в качестве исходного условия пластичности для изотропного материала слоя заполнителя воспользоваться условием Треска [6], то предельная кривая для армированного слоя будет иметь вид восьмиугольника, схематически изображенного на фиг. 2. пунктирной линией [6].

При отсутствии элементов армирования в каком-либо направлении соответствующие им пары прямых на фиг. 2 вырождаются в точки, а соединяемые ими дуги кривых при продолжении сливаются. Так, при отсутствии элементов углового армирования ($\omega = 0$) исчезают прямые *DC* и *JK*; при $\omega_1 = 0$ исчезают прямые *AB* и *GH*. Предлагаемый подход позволяет указать область изменения параметров армирования и нагрузок, при которых реализуется та или иная часть предельной кривой или поверхно-

сти, и тем самым регулировать характер армирования конструкции при данных условиях нагружения. Так, например, для прямой AB на фиг. 2 при $\sigma_0^+ = \sigma_0^- = \sigma_0$ имеем

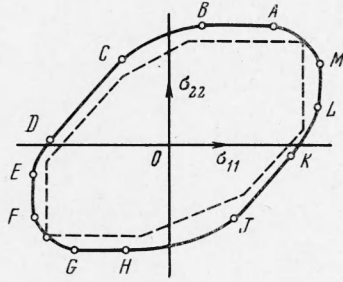
$$\varepsilon_{11} = 0, \quad \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_4 > 0,$$

$$\sigma_{11}^0 = 1/3 \sqrt{3} \sigma_0, \quad \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma^+, \quad -\sigma_1^- \leq \sigma_1 \leq \sigma_1^+$$

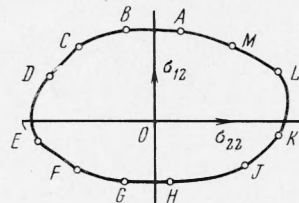
Так что

$$-\omega_1 \sigma_1^- \leq \sigma_{11} - 1/3 \sqrt{3} \sigma_0 a - 2\omega \sigma^+ \cos^2 \alpha \leq \omega_1 \sigma_1^+$$

При данном значении σ_{11} это неравенство определяет соотношение между параметрами армирования, при котором продольная арматура не исчерпывает несущей способности.



Фиг. 2



Фиг. 3

3. В качестве второго примера рассмотрим частный случай $m = 4, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1/2\pi, \sigma_0^+ = \sigma_0^- = \sigma_0, \sigma_{11} = 0, \varepsilon_{11} = 0$, который соответствует наличию жесткого армирования в направлении 1 при отсутствии соответствующего усилия. В этом случае часть предельных соотношений определяется равенствами

$$(\sigma_{22} - k_{22})^2 + 4(\sigma_{12} - k_{12})^2 = 4/3 (a\sigma_0)^2 \quad (3.1)$$

а оставшиеся соотношения соответствуют случаям $\varepsilon_3 = 0, \varepsilon_4 = 0, \varepsilon_{22} = 0$.

Рассмотрим эти случаи подробнее. Имеем при $\sigma_{11} = 0, \varepsilon_{11} = 0$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha_3 (1 - 2 \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{ctg} \alpha_3), \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha_4 (1 - 2 \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{ctg} \alpha_4) \quad (3.2)$$

$$\theta = \frac{\pi(2 \pm 3)}{6}, \quad \sigma_{11}^0 = -\frac{1}{2} \sigma_{22}^0 = \pm \frac{\sqrt{3} \sigma_0}{3} \sin \varphi, \quad \sigma_{12}^0 = \frac{\sqrt{3} \sigma_0}{3} \cos \varphi \quad (3.3)$$

Пусть $\theta = 5/6 \pi$. Тогда $\varepsilon_{22} < 0, \sigma_2 = -\sigma_2^-$. Если при этом $\varepsilon_3 = 0$, то из (3.2) получим

$$\varphi = \varphi_1 = 1/2\pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} (1/2 \operatorname{tg} \alpha_3), \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha_4 (1 - 2 \operatorname{ctg} \varphi_1 \operatorname{ctg} \alpha_4) \quad (3.4)$$

При известном значении α_3 знак ε_4 известен, а тогда напряжение σ_4 равно пределу текучести при растяжении или сжатии.

Учитывая это обстоятельство и подставляя выражения (3.3) при $\varphi = \varphi_1$ в выражения (1.1), после исключения σ_3 получим предельное соотношение

$$2 \sqrt{3} (\sigma_{12} \sin \alpha_3 - \sigma_{22} \cos \alpha_3) = 2(2\sigma_0 \sin \varphi_1 + \sqrt{3} \omega_2 \sigma_2^- - \sqrt{3} \omega_4 \sigma_4 \sin^2 \alpha_4) \cos \alpha_3 + (2\sigma_0 \cos \varphi_1 + \sqrt{3} \omega_4 \sigma_4 \sin 2\alpha_4) \sin \alpha_3 \quad (3.5)$$

Аналогично в случае $\varepsilon_4 = 0$ получим

$$2 \sqrt{3} (\sigma_{12} \sin \alpha_4 - \sigma_{22} \cos \alpha_4) = 2(2\sigma_0 \sin \varphi_2 + \sqrt{3} \omega_2 \sigma_2^- - \sqrt{3} \omega_3 \sigma_3 \sin^2 \alpha_3) \cos \alpha_4 + (2\sigma_0 \cos \varphi_2 + \sqrt{3} \omega_3 \sigma_3 \sin 2\alpha_3) \sin \alpha_4 \quad (3.6)$$

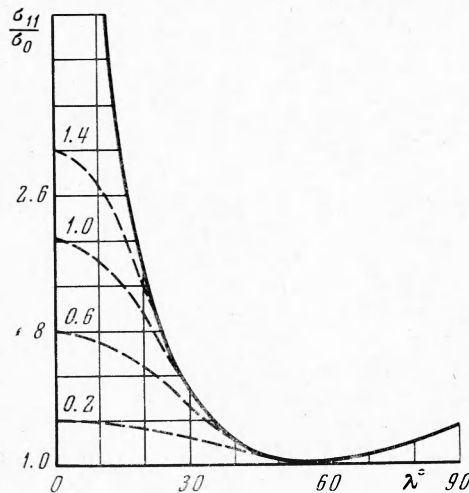
Здесь φ_2 равно

$$\varphi_2 = 1/2 \pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} (1/2 \operatorname{tg} \alpha_4)$$

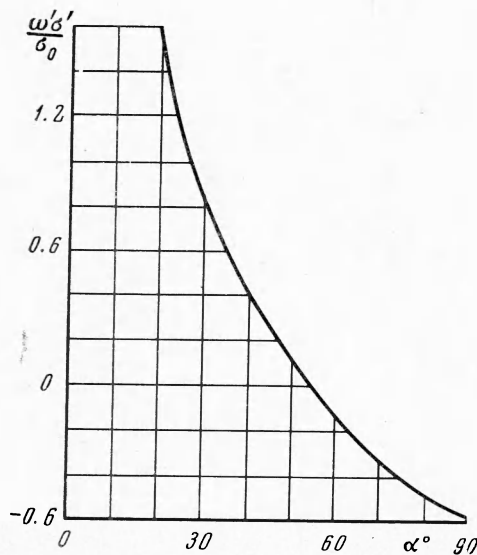
а σ_3 равно пределу текучести при растяжении или сжатии в зависимости от знака величины

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha_3 (1 - 2 \operatorname{ctg} \varphi_2 \operatorname{ctg} \alpha_3) \quad (3.7)$$

Точно так же при $\theta = 1/6\pi$ получим два предельных соотношения



Фиг. 4



Фиг. 5

$\sigma_{22}^{\circ} = 0$, $-\sigma_1^- \leq \sigma_1 \leq \sigma_1^+ - \sigma_2^- \leq \sigma_2 \leq \sigma_2^+$, и следовательно

$$\begin{aligned} -\omega_1 \sigma_1^- &\leq \omega_3 \sigma_3^+ \cos^2 \alpha_1 - \omega_4 \sigma_4^- \cos^2 \alpha_2 \leq \omega_1 \sigma_1^+ \\ -\omega_2 \sigma_2^- &\leq \sigma_{22} - \omega_3 \sigma_3^+ \sin^2 \alpha_1 + \omega_4 \sigma_4^- \sin^2 \alpha_2 \leq \omega_2 \sigma_2^+ \end{aligned}$$

Если, кроме того, принять

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \pi - \alpha, \omega_3 = \omega_4 = \omega \\ \sigma_3^+ = k\sigma_3^- = \sigma_4^+ = k\sigma_4^- = \sigma_1^+ = k\sigma_1^- = \sigma_2^+ = k\sigma_2^- \quad (k \leq 1) \end{aligned}$$

то получим

$$\begin{aligned} -\omega_1 k &\leq \omega (1 - k) \cos^2 \alpha \leq \omega_1 \\ -\omega_2 \sigma_2^+ k &\leq \sigma_{22} - \omega_2 \sigma_2^+ (1 - k) \sin^2 \alpha \leq \omega_2 \sigma_2^+ \end{aligned}$$

Аналогичные неравенства можно получить для каждого из участков предельной кривой на фиг. 3.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}(\sigma_{22} \cos \alpha_3 - \sigma_{12} \sin \alpha_3) = \\ = 2(2\sigma_0 \sin \varphi_1 + \sqrt{3}\omega_2 \sigma_2^+ + \\ + \sqrt{3}\omega_4 \sigma_4 \sin^2 \alpha_4) \cos \alpha_3 - (2\sigma_0 \cos \varphi_1 + \\ + \sqrt{3}\omega_4 \sigma_4 \sin 2\alpha_4) \sin \alpha_3 \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}(\sigma_{22} \cos \alpha_4 - \sigma_{12} \sin \alpha_4) = \\ = 2(2\sigma_0 \sin \varphi_2 + \sqrt{3}\omega_2 \sigma_2^+ + \\ + \sqrt{3}\omega_4 \sigma_4 \sin^2 \alpha_3) \cos \alpha_4 - (2\sigma_0 \cos \varphi_2 + \\ + \sqrt{3}\omega_3 \sigma_3 \sin 2\alpha_3) \sin \alpha_4 \quad (3.9) \end{aligned}$$

Здесь σ_3, σ_4 также равны пределам текучести на растяжение или сжатие в зависимости от знаков величин $\varepsilon_3, \varepsilon_4$, определяемых выражениями (3.4) и (3.7). При этом следует иметь в виду, что в данном случае $\varepsilon_{22} > 0$.

В случае $\varepsilon_{22} = 0, \varepsilon_{11} = 0$ имеем $\varphi = 0, \pi, \sigma_{11}^{\circ} = \sigma_{22}^{\circ} = \sigma_0^- - \sigma_0^+$

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{\circ} = \pm 1/3 \sqrt{3} \sigma_0, \varepsilon_3 = 1/2 \sin 2\alpha_3, \\ \varepsilon_4 = 1/2 \sin 2\alpha_4 \end{aligned}$$

и напряжения σ_1, σ_2 неопределены. При известном значении углов армирования α_3, α_4 знаки ε_3 и ε_4 , следовательно и величины σ_3, σ_4 , в предельном состоянии известны. И в этом случае предельное состояние

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = \pm 1/3 \sqrt{3} \sigma_0 + 1/2 (\omega_3 \sigma_3 \sin 2\alpha_3 + \\ + \omega_4 \sigma_4 \sin 2\alpha_4) \quad (3.10) \end{aligned}$$

Здесь σ_3 и σ_4 равны пределам текучести при растяжении и сжатии в зависимости от знаков ε_3 и ε_4 .

Схематический вид предельной кривой в плоскости σ_{12}, σ_{22} для рассматриваемого частного случая представлен на фиг. 3. Прямые AB и GH определяются уравнениями (3.10), прямые CD, EF, JK, LM — уравнениями (3.5), (3.6), (3.8), (3.9), кривые MA, BC, DE, FG, HJ, KL — уравнениями (3.1).

Здесь для каждого участка предельной кривой можно указать соответствующую область изменения нагрузок и параметров армирования. Рассмотрим, например, участок горизонтальной прямой AB на фиг. 3 в случае $0 \leq \alpha_1 \leq 1/2\pi, 1/2\pi \leq \alpha_2 \leq \pi$. Тогда, как нетрудно видеть, $\sigma_{11}^{\circ} = 0, \sigma_3 = \sigma_3^+, \sigma_4 = -\sigma_4^-$,

4. Рассмотрим случай однонаправленного армированного материала, растягиваемого усилием, составляющим с направлением армирования угол α . Тогда, полагая в (1.1) $\omega_n = 0$ ($n = 2, \dots, m$), $\omega_1 = \omega$, $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$, $\alpha_1 = \alpha$ и учитывая (1.5), получаем при $\sigma_0^+ = \sigma_0^- = \sigma_0$

$$\sigma_{11} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\sigma_0 a \cos(\theta - \frac{1}{6}\pi) \sin \varphi + \omega\sigma \cos^2 \alpha \quad (4.1)$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{3}a\sigma_0 a \cos(\theta + \frac{1}{6}\pi) \sin \varphi + \omega\sigma \sin^2 \alpha = 0, \quad \frac{1}{3}\sqrt{3}a \sigma_0 \cos \varphi + \frac{1}{2} \omega\sigma \sin^2 \alpha = 0 \quad (4.2)$$

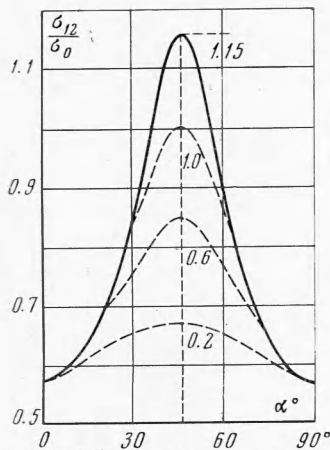
Исключая $\omega\sigma$ из (4.2), получаем ($\alpha \neq \frac{1}{2}\pi$, $\varphi \neq \frac{1}{2}\pi$)

$$2 \cos(\theta + \frac{1}{6}\pi) = \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \alpha \quad (4.3)$$

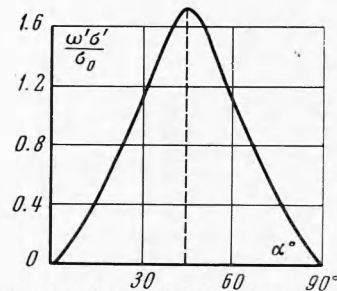
Если армирующие элементы остаются жесткими, то из условия $\varepsilon_1 = 0$, учитывая (1.2) и (1.7), получаем

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} \theta = 1 + 6 \cos^2 \alpha \quad (4.4)$$

Уравнения (4.1), (4.3), (4.4) определяют в совокупности предельное усилие растяжения армированного слоя в случае, когда армирующие элементы остаются жесткими. График зависимости $\sigma_{11} / a\sigma_0$ от α , подсчитанный по этим уравнениям, приведен на фиг. 4 сплошной линией. При помощи уравнений (4.2), (4.3), и (4.4) можно подсчитать теперь в зависимости от α величину усилий, возникающих при этом в армирующих элементах. Соответствующий график представлен на фиг. 5. Этот график определяет максимальную целесо-



Фиг. 4



Фиг. 7

образную прочность армирующих элементов. Дальнейшее увеличение прочности не ведет к увеличению прочности материала. Поэтому сплошная кривая на фиг. 4 будет кривой теоретической прочности материала. Отметим, что в (4.3), (4.4) предполагалось $\alpha \neq \frac{1}{2}\pi$, $\varphi \neq \frac{1}{2}\pi$. Если $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, то, как легко убедиться, имеем

$$\sigma_{11} = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}\sigma_0 a, \quad \omega\sigma = \mp \sqrt{3}\sigma_0 a$$

Если при данной плотности и угле армирования предел текучести (прочности) материала армирующих элементов такой, что величина $\omega\sigma \pm a\sigma_0$ располагается ниже кривой на фиг. 5, то исчерпание несущей способности армированного слоя сопровождается исчерпанием несущей

способности армирующих элементов. В этом случае предельную нагрузку при данном значении $\omega\sigma / a\sigma_0$ получим при помощи уравнений (4.1), (4.3) и второго из уравнений (4.2). Соответствующие графики при $\omega\sigma / a\sigma_0 = 0.2, 0.6, 1.0, 1.4$ изображены на фиг. 4 пунктирными кривыми.

Аналогично можно показать, что предел текучести при сдвиге в случае жестких армирующих элементов определяется равенством

$$\frac{\sigma_{12}}{a\sigma_0} = \frac{4 \sin \varphi \cos \theta}{3 \sin 2\alpha}$$

При этом величины φ, θ и $\omega\sigma / a\sigma_0$ определяются из равенств

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \sqrt{3} \cos 2\alpha, & \operatorname{ctg} \varphi &= -\frac{(1 + 3 \cos^2 2\alpha) \cos \theta}{\sqrt{3} \sin^2 \alpha} \\ \omega\sigma / a\sigma_0 &= -2 \sin \varphi \cos \theta \end{aligned}$$

Соответствующие кривые теоретической прочности изображены на фиг. 6, 7 сплошными линиями.

Если же исчерпание несущей способности армированного слоя сопровождается исчерпанием несущей способности армирующих элементов, то предел текучести (прочности) при данном значении $\omega\sigma / a\sigma_0$ определяется равенством

$$\sigma_{12} / a\sigma_0 = 1/3 \sqrt{3} \cos \varphi + \omega\sigma / a\sigma_0 \sin 2\alpha$$

где φ определяется из равенства

$$\varphi = -\arcsin \omega\sigma / 2\sigma_0 a \cos \theta, \quad \theta = \arcsin (\sqrt{3} \cos 2\alpha)$$

Соответствующие кривые при $\omega\sigma / a\sigma_0 = 0.2, 0.6, 1.0$ изображены на фиг. 6 пунктирными линиями.

Выше предполагалось, что $\alpha \neq 0, 1/2 \pi, \pi$. Если же $\alpha = 0, 1/2 \pi, \pi$, то, как легко убедиться,

$$\sigma_{12} = \pm \sqrt{3} \sigma_0 a, \quad \omega\sigma = 0$$

Поступила 30 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М., «Мир», 1964.
2. Тарнопольский Ю. М., Скудра А. М. Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков. Рига, «Зинатне», 1966.
3. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерес Г. А. Сопротивление жестких полимерных материалов, Рига, «Занатне», 1967.
4. Бажанов В. Л., Гольденблат И. И., Копнов В. А., Поспелов А. Д., Сенюков А. М. Сопротивление стеклопластиков. М., «Машиностроение», 1968.
5. Баландин П. П. К вопросу о гипотезах прочности. Вестн. инж. и техн., 1937, № 2.
6. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
7. Немировский Ю. В. Предельное равновесие многослойных армированных осесимметричных оболочек. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 6.