УДК 51:101.8
DOI:
10.15372/PS20190405

В.М. Резников

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ПРИМЕНИМОСТИ И ЭФФЕКТИВНОСТИ МАТЕМАТИКИ

В статье показано, что метод формализации не является универсальным. Во-первых, посредством математизации невозможно получить ответы на некоторые вопросы, например связанные с сущностью знания. Во-вторых, математика вполне подходит для представления знания в области точного естествознания и менее адекватна для использования в гуманитарных науках. В-третьих, не все математические дисциплины используются в приложениях, в большей степени это относится к прикладной математике. В-четвертых, даже не все разделы прикладной математики имеют универсальное приложение. Для определения применимости математического результата вводится понятие базового свойства исследуемого объекта математической теории. Свойство называется базовым, если оно используется при доказательстве основных результатов математической дисциплины. Например, в теории вероятностей и классической математической статистике такими свойствами являются распределение вероятностей и независимость. Поскольку сложно гарантировать определение и верификацию распределения вероятностей и независимости случайных величин на основе изучаемых данных, то теория вероятностей и классическая математическая статистика не являются универсально применимыми.

Ключевые слова: математика; репрезентация знания; логика; прикладная математика; условия применения математики; базовое свойство; математическая статистика

V.M. Reznikov

ON UNIVERSAL APPLICABILITY AND EFFICIENCY OF MATHEMATICS

The article shows that the formalization method is not universal. Firstly, mathematization does not make it possible to answer certain questions, e.g. those related to the essence of knowledge. Secondly, mathematics is quite suitable for presenting knowledge in the field of exact science but is less adequate for being used in the humanities. Thirdly, not all mathematical disciplines are used in applications; it is rather the task of applied mathematics. Fourthly, even in applied mathematics, not all its branches have a universal application. To determine the applicability of a mathematical result, we introduce the concept of the basic property of the studied object of a mathematical theory. A property is called basic if it is used to prove main results of a mathematical discipline. For example, in the probability theory and classical mathematical statistics, probability distribution and independence function as such properties. Since it is difficult to guarantee the determination and verification of the probability distribution and independence of random variables based on the data under study, the probability theory and classical mathematical statistics are not universally applicable.

Keywords: mathematics; knowledge representation; precision; logic; applied mathematics; application requirements for mathematics; basic property; mathematical statistics

В связи с широким применением математики возникает естественный вопрос: в какой степени использование математики связано с ее адекватностью решаемым проблемам, а в какой мере оно обусловлено социальными факторами – модой, невозможностью опубликовать раоту без использования формального аппарата? С одной стороны, не существует универсальных методов, с другой же стороны, судя по публикациям, имеет место полное согласие философов в признании эффективности математики, что делает актуальным вопрос об универсальности математики в контексте приложений. В данной статье защищается тезис о неуниверсальности формального подхода. Для обоснования гипотезы предположим, что математика является вполне универсальным средством, тогда будем выводить некоторые следствия из предположения универсальности математики и анализировать их обоснованность.

Пусть математика, действительно является универсальным методом решения проблем, тогда не существует значимых проблем, которые не могут быть не решены на основе математики. Как известно, в античной философии существовали различные позиции относительно роли математики в познании. Так, пифагорейцы полагали, что мир является математическим. Другая точка зрения на роль математики в приложениях предложена Аристотелем. Стагирит писал: «А математической точности нужно требовать не для всех предметов, а лишь для нематериальных. Вот почему этот способ не подходит для рассуждающего о природе, ибо вся природа, можно сказать, материальна» [1, с. 98]. Отметим, что позиции пифагорейцев и Аристотеля не противоречат друг другу, так как основные достижения пифагорейцев связаны с самой математикой, а не с использованием ее в приложениях.

Первое обоснование применения математики для исследования материальных объектов было предложено Галилеем. Как отмечает Челлуччи, «суть философской революции Галилея состоит в том, что ученые не обязаны понимать истину и внутреннюю сущность естественных феноменов, а скорее должны ограничиться исследованием некоторых свойств математического характера» [9]. Таким образом, тезис о том, что не существует проблем, для решения которых не подходит математика, опровергается, так как в действительности имеется множество проблем, для которых адекватны содержательные, экспериментальные подходы, а не формальные рассуждения. Прежде чем рассматривать другие следствия, вытекающие из тезиса об универсальности математизации знания, имеет смысл напомнить проблемы весьма общего характера, для решения которых в целом адекватна математика. Среди них отметим, во-первых, представление, или репрезентацию, знания, во-вторых, обеспечение точности вычислений, в-третьих, получение нового знания или известных результатов с меньшими интеллектуальными усилиями.

Обратимся к математике как средству репрезентации знания. Тогда из предположения об универсальности математического аппарата следует вполне правдоподобная гипотеза о том, что формальный аппарат логики (а логика является частью математики) оказывается универсальным и подходит в одинаковой степени для представления как гуманитарного, так и естественно-научного знания. Эта гипотеза не подтверждается, в частности, логическими исследованиями фон Г.Х. Вригта, в которых показано, что логические характеристики практического силлогизма, используемого для описания действий в социальных науках, и логические характеристики законов физики оказываются неодинаковыми [3]. Это в определенной степени объясняет, почему математика успешнее выполняет репрезентативные функции в технических науках по сравнению с науками гуманитарными. Похожие идеи о большей адекватности математического аппарата задачам, решаемым левым полушарием, по сравнению с его адекватностью тем проблемам, за которые ответственно правое полушарие, были высказаны известным математиком И.М. Гельфандом [4]. Обсуждая проблемы, стоящие перед человечеством, он показывает, что математика успешно справляется с различными проблемами в области физики, техники. По Гельфанду, это проблемы, решаемые левым полушарием. С правым полушарием связаны этические проблемы, проблемы выяснения смысла и другие гуманитарные проблемы. В исследовании такого рода проблем математика пока не столь успешна.

По нашему мнению, математика будет в полной мере адекватной для приложений, если практически все математические дисциплины будут широко применяться в других науках, а также в индустрии и других отраслях народного хозяйства. Однако известно, что многие абстрактные математические науки не используются при решении практических проблем, а в лучшем случае применяются в других математических науках (наиболее известный пример – теория множеств). Математические науки, которые редко используются или никогда не используются в приложениях, принадлежат к чистой математике, а соответственно, в состав прикладной математики входят математические дисциплины, которые интенсивно применяются. Отметим, что некоторые дисциплины относятся как к чистой, так и к прикладной математике.

Возьмем, к примеру, теорию вероятностей, она интенсивно используется в приложениях. Исследуемыми объектами теории вероятностей являются случайные величины. В простейшем случае случайные величины – это переменные, принимающие определенные значения с некоторыми вероятностями. При доказательстве подавляющего множества теорем, относящихся к теории вероятностей, считаются заданными независимые случайные величины с известными распределениями вероятностей. Распределение вероятностей и независимость будем считать фундаментальными свойствами изучаемых объектов теории вероятностей, так как они используются при доказательстве практически всех значимых результатов в этой теории. Теорему, метод или математическую дисциплину в целом будем считать корректно применимыми для исследования изучаемых данных, если обеспечиваются средства для верификации фундаментальных свойств в этих данных. Теорему, метод естественно считать эффективными, если проверка обладания данными базовых свойств окажется относительно простой. Понятно, что если применение теоремы предполагает верификацию единственной вероятности, то вполне реалистично считать, что эта проверка выполнима. Однако если для использования теоремы требуется определение большого числа вероятностей или тем более счетного множества вероятностей, тогда трудно признать, что теорема имеет универсальное применение.

Иногда в литературе подчеркивается, что так называемые предельные теоремы, в которых доказываются утверждения, реализующиеся с единичной вероятностью, имеют не только теоретическую, но и прагматическую значимость. К такого рода теоремам относятся центральная предельная теорема, теорема закона больших чисел и др. Однако в этих теоремах получены асимптотические результаты, верные для счетного множества случайных величин. Поэтому эти теоремы применимы, только если счетное множество случайных величин известно априори, что не позволяет считать эти теоремы практически значимыми. Фактически только теорема Бернулли, в которой считается известной единственная постоянная вероятность, на первый взгляд представляется имеющей практическую значимость, так как верификация единственной вероятности вполне осуществима. Однако прежде чем применять теорему, необходимо убедиться, что результаты экспериментов оказываются независимыми. Отметим, что верификация независимости результатов испытаний в теореме Бернулли не может быть верифицирована в рамках теории вероятностей, проверка независимости относится к математической статистике.

Действительно ли значима независимость в математической статистике? Бесспорно, что она важна. В работе П.Е. Эльясберга [7] приведен пример, обосновывающий значимость независимости. Предположим, что даны две последовательности случайных величин. Первая состоит из 1000 независимых случайных величин, вторая – из 1000 случайных величин, для которых попарный коэффициент корреляции равен 0,01. Эльясберг показывает, что дисперсия для суммы независимых случайных величин меньше в 11 раз по сравнению с дисперсией суммы слабо коррелированных случайных величин. Получается, что независимость нельзя задавать на основе интуиции, а формальная проверка независимости трудоемкая. Таким образом, теория вероятностей и параметрическая статистика не являются универсально применимыми.

Другие аргументы против универсальности математики основаны на публикациях в различных областях знания, критикующих негативное влияние избыточной математизации и неадекватность используемого математического аппарата [5, 6]. Согласно Р. Хэммингу [10], применение одних и тех же разделов математики, в частности геометрии, свидетельствует об универсальной применимости математики. Однако такое положение дел имеет место далеко не всегда. Универсальная применимость и эффективность математики адекватно объяснимы на основе математического платонизма. Как отмечает Д. Абботт [8], если бы математический платонизм был адекватен для технических наук, то любые технологические процессы допускали бы строгие формальные описания и их исследование приводило бы к совершенным с эстетических позиций аналитическим решениям. Однако технологические процессы в электронике опровергают гипотезу об адекватности математического платонизма. Так, при одной элементной базе технологические процессы допускали строгое формальное описание и точные аналитические решения, однако при переходе к другой элементной базе оказалось, что невозможно получить ни строгого формального описания, ни аналитического решения изучаемых процессов [8].

Каковы объяснения эффективности математики по Р. Хэммингу [10]? Во-первых, эффективность применений связана не с универсальностью некоторых математических дисциплин, а скорее с интуицией и опытом исследователя, на основании которых он выбирает раздел математики, адекватный решаемой проблеме. Используется разнообразный арсенал математических методов: от тонких аналитических подходов до моделирования и data mining. Последняя дисциплина предполагает использование современных баз знаний, неограниченных объемов данных и не самой сложной математики. Во-вторых, согласно математическим платоникам, в пользу универсального применения математики свидетельствует то обстоятельство, что нужная математическая дисциплина для приложений в науке, в частности в физике, оказывалась уже созданной к тому моменту, когда в ней возникала необходимость. Например, геометрия Римана была уже известной до того, как в ней возникла необходимость в связи с теорией относительности. Однако далеко не всегда вся необходимая физикам-теоретикам математика уже была создана. Так, история математики свидетельствует о ее непрерывном развитии: вначале были известны скаляры, потом были придуманы векторы, позднее созданы тензоры. Фактически успешное применение математики в физических науках связано как с выбором адекватного аппарата, так и с синтезом модели на основе известных подходов и с созданием нового формального аппарата, если известные разделы математики не оказывались адекватными для приложений.

Исследование эффективности математики стало актуальным в философии науки в связи с работами известного физика-теоретика, нобелевского лауреата Е. Вигнера [2], говорившего об особой непостижимой эффективности математики в естественных науках. Какова реакция философского и научного сообщества на работу Вигнера? Реакцией стало появление многочисленных публикаций, в которых поддерживается тезис Вигнера на основе идеи о неустранимости математики из состава наиболее успешных научных теорий. По нашему мнению, тезис о неустранимости математики из состава наиболее успешных научных теорий не свободен от критики. Во-первых, он не является в полной мере основательным, так как опирается на методологические идеи холизма, относящиеся к математике в составе естественно-научной теории. Например, считается, что если предсказания на основе естественнонаучной теории оказались правильными, то используемый в этой теории формальный аппарат тоже получает подкрепление. Однако очевидно, что корректность формального аппарата обосновывается аналитически, а не путем применения его в практике научных исследований. Во-вторых, тезис о неустранимости не имеет особой практической значимости, так как теории применяются нечасто, а в основном в приложениях используются модели. В-третьих, математический аппарат используется не в составе теорий, а применяется непосредственно к данным в определенной области исследований.

Известный специалист в электронике Д. Эббот критикует предположение об особой объективности математического знания, утверждая, что математика в большой степени адекватна, так как является плодом творческой энергии талантливых ученых и отсюда в ней не может не учитываться природа человека. Поэтому математика не обязательно подходит для описания других миров, в частности для подсчета бананов, в мире, где все тела газообразные [8].

Необходимо отметить, что ряд разделов математики являются эффективными, например распознавание образов, теория игровых мартингалов и некоторые другие. Известный математик Н.К. Верещагин отмечал, что теория распознавания образов эффективна, причем причины эффективности не вполне понятны. Поэтому исследования, посвященные объяснению эффективности успешной математики, в частности распознаванию образов, представляются актуальными.

Литература

1. *Аристотель.* Метафизика // Аристотель. Сочинения: В 4 т. – М.: Мысль, 1975. – Т. 1 – С. 65–550.

2. *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. – М.: Мир, 1971.

3. *Вригт Г.Х., фон.* Объяснение и понимание // Вригт Г.Х., фон. Логико-философские исследования: Избр. тр. – М: Прогресс, 1986.

4. *Гельфанд И.М.* Два архетипа в психологии человечества. – URL: https://elementy.ru/nauchno- populyarnaya_biblioteka/430967/Ekologiya_i_zhizn_2_2010 (Дата обращения: 16.10.2019).

5. *Косилова Е.В.* Дигитальное и аналоговое в медицине и психологии // Философия науки. – 2017. – № 3 (74). – С. 122–132.

6. *Филимонов Н.Б.* Методологический кризис «всепобеждающей математизации» современной теории управления // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2016. – Т. 17, № 5. – С. 291–301.

7. *Эльясберг П.Е.* Вычислительная информация: Сколько ее нужно? Как ее обрабатывать? – М.: Наука, 1986.

8. *Abbott D.* The reasonable ineffectiveness of mathematics // Proceedings of the IEEE. – 2013. – Vol. 101, No. 10. – P. 2147–2153.

9. *Cellucci C.* Naturalizing the Applicability of Mathematics. – URL: https://pdfs.semanticscholar.org/1fc0/09de336ffdc7586a30f32ea1649e78203b9c.pdf (дата обращения: 16.10.2019).

10. *Hamming R.W.* Unreasonable effectiveness of mathematics // The American Mathematical Monthly. – 1980. – Vol. 87, No. 2. – P. 81–90.

References

1. *Aristotle.* (1976). Metafizika [Metaphysics]. In: Aristotle. Sochineniya: V 4 t. [Works: In 4 vol.], Vol. 1. Moscow, Mysl Publ., 65–550. (In Russ.).

2. *Wigner, E.* (1971). Etyudy o simmetrii [Symmetries and Reflections]. Moscow, Mir Publ. (In Russ.).

3. *Wright, G.H., von.* (1986). Obyasnenie i ponimanie [Explanation and understanding]. In: Wright, G.H., von. Logiko-filosofskie issledovaniya [Logic-philosophical Studies: Selected Works]. Moscow, Progress Publ., 162–165. (In Russ.).

4. *Gelfand, I.* (2010). Dva arkhetipa v psikhologii chelovechestva [Two archetypes in the psychology of man]. Ekologiya i zhizn [Ecology and Life], 2. Available at: https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/430967/Ekologiya_i_zhizn_2_2010 (date of access: 18.08.2018). (In Russ.).

5. *Kosilova, E.V.* (2017). Digitalnoe i analogovoe v meditsine i psikhologii [The digital and the analogous in medicine and psychology]. Filosofiya nauki [Philosophy of Science], 3 (74), 122–132.

6. *Filimonov, N.B.* (2016). Metodologicheskiy krizis "vsepobezhdayushchey matematizatsii" sovremennoy teorii upravleniya [Methodological crisis of the "all-conquering mathematization" of the modern control theory]. Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie [Mechatronics, Automatization, Control], Vol. 17, No. 5, 291–301.

7. *Eliyasberg, P.E.* (1986). Vychislitelnaya informaciia: skolko ee nuzhno? kak ee obrabatyvat? [Computational information: how much of it do we need? which way should we process it?]. Moscow, Nauka Publ.

8. *Abbott, D.* (2013). The reasonable ineffectiveness of mathematics. Proceedings of the IEEE, 101 (10), 2147–2153.

9. *Cellucci, C.* Naturalizing the Applicability of Mathematics. Available at: https://pdfs.semanticscholar.org/1fc0/09de336ffdc7586a30f32ea1649e78203b9c.pdf (date of access: 16.10.2019).

10. *Hamming, R.W.* (1980). Unreasonable effectiveness of mathematics. The American Mathematical Monthly, 87 (2), 81–90.

Информация об авторе

Резников Владимир Моисеевич – кандидат философских наук, доцент, старший научный сотрудник, Института философии и права СО РАН (630090, г. Новосибирск, ул. Николаева 8); доцент кафедры логики и методологии науки Новосибирского исследовательского государственного университета (630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова 2, e-mail: mathphil1976@gmail.com)

Information about the author

Reznikov Vladimir Moiseevich – Ph.D (Philosophy), associate professor, senior researcher of Institute of Philosophy and Law, SB RAS (8, Nikolaev st. , Novosibirsk, 630090); associate professor of the Department of Logic and Methodology of Science at Novosibirsk National Research State University (2, Pirogov st., Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: mathphil1976@gmail.com)

Дата поступления 01.11.2019