УДК 532.594 : 535.31

И. Н. Алиев

ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

1. Поведение волн на поверхности вязкой проводящей жидкости во внешних полях постоянно привлекает внимание (см., например, [1—4]). Однако, как правило, рассмотрение ограничивалось однородными полями. В реальных же задачах поля, как известно, практически всегда неоднородны.

В данной работе предложен метод изучения взаимодействия капиллярных волн на поверхности вязкой проводящей жидкости с пространственными неоднородностямн поверхностного натяжения. Очевидно, что в общем виде решение данной задачи затруднено, однако возможны упрощения, когда поле слабо изменяется на масштабах порядка длины капиллярной волны, т. е. в пределе, который по традиции может быть назван геометрической акустикой или оптикой. Предварительно будут даны обоснования метода и получены уравнения геометрической акустики, а затем изучены фокусирующие свойства крупномасштабных неоднородностей.

Условие применимости геометрической акустики и оптики заключается, как известно [4, 5], в малости длины волны по сравнению с характерными размерами задачи, в случае же капиллярных волн — по сравнению с масштабами неоднородностей поверхностного натяжения или электрического поля.

2. Прежде чем рассматривать уравнения геометрической акустики капиллярных волн в электрическом поле, изучим более простой, но полезный в методическом отношении случай отсутствия поля. В этой постановке задачи пространственно неоднородным является поверхностное натяжение. Известно [5], что наличие градиентов поверхностного натяжения приводит к возникновению приповерхностных течений — распространение капиллярных волн происходит именно на фоне этих течений. Для рассмотрения возможности разделения двух движений — установившегося течения и капиллярных волн — используем линеаризированное уравнение Навье — Стокса и уравнение непрерывности ($\mathbf{v}$ — вектор скорости, p — давление, η, ρ — коэффициент вязкости и плотность жидкости):

$$\rho\partial\mathbf{v}/\partial t = -\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0; \tag{2.1}$$

граничные условия на горизонтальной поверхности жидкости (плоскость xy):

$$-p + 2\eta\partial v_z/\partial z - \gamma\partial^2\xi/\partial x^2 = 0; \tag{2.2}$$

$$\eta(\partial v_x/\partial z + \partial v_z/\partial x) = \partial\gamma/\partial x \tag{2.3}$$

при $z = 0$. Здесь ξ — отклонение точки поверхности жидкости от положения равновесия, поэтому $\partial\xi/\partial t = v_z|_{z=0}$.

Последнее слагаемое в (2.2) — лапласово давление (γ — коэффициент поверхностного натяжения). Граничное условие (2.3) учитывает тангенциальную составляющую сил из-за поверхностной неоднородности.

Заметим, что линеаризация уравнения (2.1) возможна ввиду обычного предположения о малости амплитуд колебаний по сравнению с характерными длинами волн: $\xi \ll \lambda$.

Попытаемся представить скорость движения как сумму $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_+$ ($\mathbf{v}_0$ — скорость установившегося течения, $\mathbf{v}_+$ — скорость жидкости, связанная с волновым движением).

Уравнения для двух движений разделяются, если фазовая скорость волны много больше скорости установившегося течения. В маловязком приближении [5] имеем $v_+ = \omega/k = \sqrt{\gamma k/\rho}$ (ω, k — частота и волновое число волны). Отсюда очевидно, что неравенство $v_+ \gg v_0$ выполняется только для коротких волн, когда $k \gg \rho v_0^2/\gamma$.

Следует обратить внимание, что в рассмотрении не учитывалось изменение массы (на единицу площади), связанное с наличием адсорбированных молекул. Кроме того, уравнения движения не учитывают в граничных условиях избыточный поверхностный импульс и связанные с отличием плотности вещества вблизи поверхности от среднего в объеме. Это означает, что толщина жидкости, вовлекаемая в движение, много больше толщины приповерхностного переходного слоя, что эквивалентно ограничению $k\delta \ll 1$ (δ — толщина приповерхностного слоя).

Ограничимся пределом невязкой жидкости (напомним [6], что в геометрической оптике рассматриваются, как правило, лишь прозрачные среды). Тогда можно использовать очень простой подход к описанию динамики жидкости с помощью потенциала скоростей φ (причем $v = \nabla\varphi$). Для него (в пределе несжимаемой жидкости) выполняется условие

$$\Delta\varphi = 0 \tag{2.4}$$

и, кроме того, на поверхности жидкости условие

$$\rho\partial\varphi/\partial t|_{z=0} - \gamma\Delta_n\xi = 0 \tag{2.5}$$

($\Delta_n = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, (x, y) — система прямоугольных координат в плоскости поверхности жидкости). Для отклонения от положения равновесия и потенциала φ справедлива связь

$$\partial\xi/\partial t = \partial\varphi/\partial z|_{z=0}. \tag{2.6}$$

В случае $\gamma = \mathrm{const}$ подстановкой волнового решения $\varphi = \varphi_0 \exp(-i\omega t + ikx + iKz)$ получаем дисперсионное уравнение для капиллярных волн: $\omega^2 = \gamma k/\rho$.

Предположив, однако, что $\gamma(x, y)$ изменяется от точки к точке, рассмотрим распространение волны, для которой выполняется неравенство $kL \gg 1$, что совпадает с областью применимости геометрической оптики (L — характерный масштаб изменения γ). У монохроматической волны в стационарных условиях частота есть постоянная величина, поэтому зависимости φ и ξ от времени и координат выбираются в виде

$$\xi = \xi_0 \exp(-i\omega t + i\psi_\xi(x, y)), \tag{2.7}$$
$$\varphi = \varphi_0 \exp(-i\omega t + i\psi_\varphi(x, y) + k(x, y)z).$$

Здесь требуется наложить ограничение $k > 0$, поскольку волна должна затухать в глубь жидкости ($z < 0$). По аналогии с теорией геометрической оптики электромагнитных волн величины ψ_φ и ψ_ξ назовем эйконалами; как увидим ниже, ψ_φ и ψ_ξ в приближении геометрической оптики совпадают друг с другом (с логарифмической точностью), φ_0 и ξ_0 являются постоянными коэффициентами.

Прежде чем подставлять (2.7) в (2.4), вычислим $\Delta_n\varphi$:

$$\Delta_n\varphi = [i^2(\nabla_n\psi_\varphi)^2 + i\Delta_n\psi_\varphi + 2i\nabla_n\psi_\varphi\nabla_n k + z^2(\nabla_n k)^2 + z\Delta_n k]\varphi$$

(Δ_n — двумерный градиент). Эйконал ψ_φ меняется на 2π на протяжении длины волны: $\partial\psi_\varphi/\partial x \sim 2\pi/\lambda$, значит, из $\psi_\varphi \sim 2\pi x/\lambda$ для капиллярных волн ($\lambda \to 0$) следует, что ψ_φ — большая величина. Поэтому в выражении для $\Delta_n\varphi$ ограничимся первым членом. Таким образом, уравнение (2.4) принимает вид

$$-(\nabla_n\psi_\varphi)^2 + k^2 = 0. \tag{2.8}$$

После подстановки φ и ξ уравнение (2.6) представим как

$$-i\omega\xi_0 \exp(i\psi_\xi(x, y)) = k(x, y)\varphi_0 \exp(i\psi_\varphi(x, y)).$$

Используя k_0 (значение $k(x, y)$ на бесконечности) и вводя равенство $k_0\varphi_0 = -i\omega\xi_0$, запишем связь между ψ_φ и ψ_ξ : $n(x, y)\exp(i\psi_\varphi) = \exp(i\psi_\xi)$, где показатель преломления (по аналогии с оптикой)

$$n = k(x,\ y)/k_0. \tag{2.9}$$

Учитывая, что ψ_φ и ψ_ξ имеют большие значения, можем сделать вывод об их равенстве (с точностью до $\ln n$). Тогда уравнение (2.5) представляется в виде

$$-\rho\omega^2 + \gamma(x,\ y)k(x,\ y)(\nabla_n\psi_\varphi)^2 = 0.$$

Комбинируя равенства (2.8) и (2.9), получим

$$(\nabla_n\psi_\varphi)^2 = k_0^2 n^2, \quad \text{где} \quad n = (\gamma_0/\gamma\,(x,y))^{1/3}, \tag{2.10}$$

причем

$$k_0 = (\rho\omega^2/\gamma_0)^{1/3} \tag{2.11}$$

(γ_0 — коэффициент поверхностного натяжения на бесконечности). Уравнение (2.10) по форме совпадает с уравнением эйконала из [6], определяющим распространение лучей в среде с показателем преломления n. Используя [6], можем выписать уравнение, позволяющее найти форму лучей:

$$d\mathbf{l}/dl = [\nabla_n n - \mathbf{l}(\mathbf{l}\nabla_n n)]/n \tag{2.12}$$

($\mathbf{l}$ — единичный вектор, касательный к лучу, производная вычисляется вдоль траектории луча).

Необходимо отметить, что для раздельного описания установившегося и волнового движений кроме условия $v_+ \gg v_0$ требуется выполнение еще одного неравенства. При рассмотрении движения капиллярных волн через неоднородности поверхностного натяжения не учитывалось влияние установившегося течения; это возможно, если изменение скорости капиллярной волны, зависящее от поверхностного натяжения, существенно превышает скорость установившегося течения, т. е. $\Delta v_+ \gg v_0$.

Из $v_+ = \sqrt{\gamma k/\rho}$ имеем

$$\Delta v_+ = (\partial\gamma/\partial x)L/2\sqrt{k/\rho\gamma}.$$

Скорость же v_0 можно оценить из (2.3), учитывая, что $v_x \sim v_0$ заметно меняется на расстояниях порядка δ, где δ — масштаб области, захватываемой установившимся движением (например, толщина слоя жидкости, для бездонной жидкости $\delta \sim L$). Поэтому $\partial v_x/\partial z \sim v_0/\delta$, откуда и вытекает, что $v_0 \sim (\delta/\eta)\partial\gamma/\partial x$. Окончательно искомое неравенство приобретает вид

$$k \gg 4\gamma\rho(\delta/\eta L)^2.$$

Использование уравнений (2.10) и (2.12) решает задачу геометрической акустики для капиллярных волн в отсутствие поля.

3. Рассмотрим, к каким следствиям приводит включение электрического поля. Как и ранее, в этом случае необходимо разделить установившийся режим и волновое течение. Уравнения Навье — Стокса, непрерывности и граничное условие (2.2) остаются прежними. Аналогично приведенному выше изменению в граничном условии при включении неоднородного поверхностного натяжения для неоднородного поля условие (2.3) принимает вид (σ — поверхностная плотность зарядов)

$$\eta(\partial v_x/\partial z + \partial v_z/\partial x) = \sigma E_x.$$

В установившемся режиме правая часть зануляется, поскольку проводящая поверхность эквипотенциальна. Однако при колебательном движении имеем $E_x = E_0\partial\xi/\partial x$. Из последнего граничного условия видно, что, для того чтобы можно было пренебречь дополнительными слагаемыми по сравнению с другими членами этого условия, необходимо выполнение неравенства

$$\eta k v_x \gg k\xi 4\pi\sigma^2, \quad \text{иначе} \quad \omega \gg 4\pi\sigma^2/\eta.$$

Учитывая выражения для ω, например, в маловязком пределе, получим, что последнее неравенство выполняется для коротких волн:

$$k\sqrt{(\gamma k - 4\pi\sigma^2)/\rho} \gg 4\pi\sigma^2/\eta.$$

Уравнение (2.5) в данном случае запишем в форме [6]

$$\rho\partial\varphi/\partial t|_{z=0} - \gamma\Delta_n\xi - 4\pi\sigma^2 k(x, y)\xi = 0$$

(γ — теперь постоянная величина).

Для φ и ξ используются те же выражения (2.7), уравнение (2.8), связь между φ_0 и ξ_0, уравнение для n. Также сохраняется вывод о равенстве эйконалов ψ_φ и ψ_ξ. Однако условие на поверхности меняет свой вид:

$$-\rho\omega^2 + [\gamma k(x, y) - 4\pi\sigma^2](\nabla_n\psi_\varphi)^2 = 0. \tag{3.1}$$

Комбинируя (2.8) и (3.1), для $(\nabla_n\psi_\varphi)^2$ имеем кубическое уравнение

$$\gamma^2(\nabla_n\psi_\varphi)^6 - (4\pi\sigma^2)^2(\nabla_n\psi_\varphi)^4 - 2\rho\omega^2(4\pi\sigma^2)(\nabla\psi_\varphi)^2 - (\rho\omega^2)^2 = 0,$$

точное решение которого затруднительно. Однако, используя коротковолновое приближение, решение можно разложить по степеням малого параметра $4\pi\sigma^2/\gamma k_0$ (k_0 — характерное волновое число задачи) и выделить $(\nabla_n\psi_\varphi)^2$ в удобной форме (2.10) и (2.11), где $n = (1 - 4\pi\sigma^2/\gamma k_0)^{-2/3}$ (при выводе предполагалось, что на бесконечности $\sigma \to 0$). Для траектории лучей следует, как и раньше, использовать соотношение (2.12).

Предложенный в данной работе подход дает возможность, в частности, описать фокусирующие свойства неоднородных электрических полей в поверхностной гидродинамике [4].

Уравнения, полученные выше, позволяют определить геометрию лучей при прохождении через неоднородности поверхностного натяжения и электрического поля. Необходимо дополнить их уравнениями для амплитуды поля. Способ получения соответствующих уравнений для электромагнитных волн указан в [7]. Воспользуемся аналогичной процедурой. Для этого уравнение (2.5) запишем в виде

$$\begin{aligned} & -i\omega\rho\varphi_0 \exp(i\psi_\varphi) + (\gamma(\nabla_n\psi_\xi)^2\xi_0 - 4\pi\sigma^2 k\xi_0) \times \\ & \times \exp(i\psi_\xi) + \{-i\gamma(2\nabla_n\xi_0\nabla_n\psi_\xi + \xi_0\Delta_n\psi_\xi)\} \times \\ & \times \exp(i\psi_\xi) - \gamma\Delta_n\xi_0 \exp(i\psi_\xi) = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где сгруппированы члены, соответствующие убыванию степени ψ от квадрата до нуля (вспомним, что ψ — большой параметр). Равенство первых двух слагаемых нулю определяет показатель преломления поверхностных волн с учетом поля. Уравнение для вычисления амплитуды волн получается приравниванием нулю второй скобки (последнее слагаемое в пределе геометрической акустики пренебрежимо мало):

$$-i\gamma\left(2\nabla_n\psi\nabla_n\xi_0 + \xi_0\nabla_n^2\psi\right) = 0. \tag{3.3}$$

Как и в [7], с помощью (3.3) можно найти определенный закон сохранения. Действительно, умножим уравнение на $\bar{\xi}_0$, затем сделаем сопряжение и умножим полученное уравнение на ξ_0; в результате сложения двух уравнений имеем равенство

$$\nabla_n\psi\nabla_n(\xi_0\bar{\xi}_0) + (\xi_0\bar{\xi}_0)\,\mathrm{div}_n\nabla_n\psi = 0, \tag{3.4}$$

которое можно переписать как

$$\mathrm{div}_n\mathbf{j} = 0, \ \mathbf{j} = (\xi_0\bar{\xi}_0)\nabla_n\psi. \tag{3.5}$$

Таким образом, выполняется уравнение непрерывности для вектора $\mathbf{j}$, который пропорционален потоку энергии волны. Как и в оптике, уравнение (3.4) определяет нарастание амплитуды волны при фокусировке. Если ввести производную по направлению луча $\partial/\partial l \equiv \psi_n\nabla_n\psi$, то (3.5) примет вид

$$2\partial\xi_0/\partial l + \xi_0\Delta_n\psi = 0.$$

Соответственно произведение $\xi_0\bar{\xi}_0$ удовлетворяет уравнению

$$\partial(\xi_0\bar{\xi}_0)/\partial l + (\xi_0\bar{\xi}_0)\Delta_n\psi = 0,$$

решение которого запишем в форме

$$(\xi_0\bar{\xi}_0) = \mathrm{const}\exp\left\{-\int\Delta_n\psi dl\right\}$$

(интегрирование ведется по лучу). Уравнения последнего вида широко используются в оптике [7].

Выше получено, что поток энергии волны сохраняется. Это связано с пренебрежением затухания волн. Слабое затухание может быть введено в уравнение (3.2) аналогично тому, как делается в гидродинамике. Именно это обстоятельство с учетом того, что дисперсионное уравнение волн в маловязкой жидкости описывается уравнением (3.3), позволит определить суммарное изменение амплитуды, связанное с фокусировкой лучей и затуханием волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Безденежных И. А., Брискман В. А., Черепанов А. А., Шаров М. Т.** Управление устойчивостью с помощью переменных полей // Гидродинамика и процессы переноса в невесомости.— Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983.
2. **Алиев И. И.** Параметрическая неустойчивость поверхности проводящей жидкости в переменном электрическом поле // Магнит. гидродинамика.— 1987.— № 2.
3. **Алиев И. И.** Раскачка покрытой пленкой поверхности электропроводящей жидкости в переменном поле при световом облучении // ИФЖ.— 1989.— Т. 56, № 2.
4. **Алиев И. И.** Геометрическая акустика капиллярных волн для неоднородных электрических полей // Магнит. гидродинамика.— 1990.— № 4.
5. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика сплошных сред.— М.: Наука, 1986.
6. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1982.
7. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики.— М.: Наука, 1970.

г. Москва *Поступила 5/XII 1990 г., в окончательном варианте — 11/III 1991 г.*

УДК 536.25

А. А. Непомнящий, И. Б. Симановский

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В СИСТЕМАХ С ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНЫМ ВЕЩЕСТВОМ НА ДЕФОРМИРУЕМОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА

Термокапиллярная неустойчивость слоя жидкости со свободной поверхностью, на которую нанесено поверхностно-активное вещество (ПАВ), исследовалась в [1, 2]. В [3, 4] задача о возникновении термокапиллярной конвекции при наличии ПАВ решалась в двухслойной постановке с учетом гидродинамических и тепловых процессов по обе стороны от поверхности раздела. Во всех этих работах задачи рассматривались в предположении плоской недеформируемой границы. Известно, что деформация границы может оказывать существенное влияние на возбуждение термокапиллярной конвекции [5—7].

В настоящей работе исследуется неустойчивость равновесия систем, содержащих ПАВ, с учетом деформации поверхности раздела. Изучено влияние ПАВ на монотонную моду неустойчивости, а также на колебательные моды неустойчивости различной природы. Выяснены особенности возникновения специфического типа колебательной неустойчивости, существенно связанной с наличием ПАВ, в условиях деформируемости границы.

1. Пусть пространство между двумя горизонтальными твердыми пластинами $y = a_1$ и $y = -a_2$, на которых поддерживается различная темпе-