

**УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО
ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА С АСИММЕТРИЧНЫМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ**

А. М. Сагалаков

(Новосибирск)

В рамках линейной теории исследована гидродинамическая устойчивость плоского магнитогидродинамического течения Куэтта с асимметричным профилем скорости, формируемым поперечным магнитным полем. Для характерных чисел Гартмана изучен полный спектр малых возмущений. Проведена классификация возмущений сообразно поведению их фазовой скорости при больших волновых числах. Установлено, что устойчивость потока контролируется только одним типом возмущений. Найдены критические параметры задачи. Рассмотренная неустойчивость напоминает неустойчивость течения Гартмана по отношению к антисимметричным возмущениям.

1. Рассматривается плоскопараллельное течение вязкой несжимаемой проводящей жидкости в поперечном магнитном поле, производимое движением верхней пластины. Выражение для профиля скорости приведено в [1]

$$u = \frac{\text{sh } Gy}{\text{sh } G} \quad (1.1)$$

Здесь u — профиль скорости, G — число Гартмана. В качестве единицы длины выбрана ширина канала, за единицу скорости принята скорость верхней пластины $u = 1$. Граничные условия, используемые при выводе (1.1), имеют вид

$$H_x = 0, \quad dH_x/dy = 0, \quad u = 0 \text{ при } y = 0; \quad u = 1 \text{ при } y = 1$$

(H_x — продольная компонента магнитного поля)

Данное течение является одним из наиболее простых ламинарных движений жидкости в магнитной гидродинамике. Оно может служить некоторым приближением к задаче о пограничном слое [1], а соответствующий профиль скорости может быть модельным для выяснения некоторых общих характеристик гидродинамической устойчивости течений с асимметричным профилем скорости.

Будем считать магнитные числа Рейнольдса малыми. Этому требованию удовлетворяет большинство течений, реализуемых в эксперименте. Тогда задача гидродинамической устойчивости сводится к анализу спектра собственных значений модифицированного уравнения Орра — Зоммерфельда [2]

$$\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi = i\alpha R[(u - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - u''\varphi] + G^2\varphi'' \quad (1.2)$$

с однородными граничными условиями

$$\varphi(y) = \varphi'(y) = 0 \quad \text{при } y = 0, 1 \quad (1.3)$$

Здесь $\varphi(y)$ — амплитуда функции тока возмущения, α — волновое число, R — число Рейнольдса, $c = X + iY$ — комплексная фазовая скорость возмущения, собственное значение задачи. Положительные Y соответствуют росту возмущения во времени, отрицательные — затуханию. Соответствующий декремент равен αY .

Другой вид плоского магнитогидродинамического течения Куэтта изучался в работах [3,4]. Задача, исследуемая ниже, отличается от рассмотренной ранее постановкой дополнительных граничных условий на оси канала течения с антисимметричным профилем, а именно условий прилипания для возмущений.

Ниже большое внимание уделяется изучению полного спектра малых возмущений, что представляет интерес при анализе поведения произвольного возмущения во времени. Информация о полном спектре может оказаться необходимой и при развитии нелинейной теории.

2. Когда G , R и α фиксированы, решение задачи на собственные значения (1.2), (1.3) определяет счетное множество величин c_n . При небольших αR собственные значения находятся при помощи теории возмущений аналогично случаю, изученному в [5]. Решение задачи ищется в виде ряда по степеням αR . Для поставленных целей достаточно ограничиться первыми двумя приближениями, которые определяют соответственно Y_n и X_n . Опуская громоздкие промежуточные преобразования, приведем необходимые выражения. Формула для нахождения Y_n имеет вид

$$Y_n = -4\lambda_n / \alpha R \tag{2.1}$$

где λ_n определяется из уравнений

$$\delta \operatorname{tg} \delta = -k \operatorname{th} k, \quad \delta \operatorname{ctg} \delta = k \operatorname{cth} k \tag{2.2}$$

В (2.2) введены обозначения

$$\delta = 1/2 [V^{1/4} (4\lambda_n - G^2)^2 + \alpha^2 G^2 - \alpha^2 - 1/2 (G^2 - 4\lambda_n)]^{1/2}$$

$$k = 1/2 [V^{1/4} (4\lambda_n - G^2)^2 + \alpha^2 G^2 + \alpha^2 + 1/2 (G^2 - 4\lambda_n)]^{1/2}$$

Если α мало, то из (2.2) нетрудно найти

$$\lambda_n = \kappa_n + 1/4 G^2$$

Здесь $\kappa_n = 1/4 n^2 (n+1)^2$ для $n = 1, 3, 5, \dots$, а для $n = 2, 4, 6, \dots$ κ_n является решением уравнения $\operatorname{tg} \sqrt{\kappa_n} = \sqrt{\kappa_n}$ (нулевое решение исключается из рассмотрения). Таким образом, при достаточно малых α и больших αR имеем асимптотическое выражение

$$Y_n = -\frac{4\kappa_n + G^2}{\alpha R} \tag{2.3}$$

Спектральная нумерация при малых α производится в порядке возрастания $|Y_n|$, а при произвольном α — в соответствии с порядком расположения собственных значений при малых α .

Имея в виду нулевое по α приближение, получаем далее

$$X_n = \langle u \rangle - \frac{GM}{4} \left[\frac{2}{\lambda_n} \left(1 + \frac{G^2}{2\kappa_n} \right) - \frac{3}{\kappa_n} - \frac{\lambda_n}{\kappa_n (\lambda_n + 3\kappa_n)} \right] \tag{2.4}$$

($n = 1, 3, 5, \dots$)

$$X_n = \langle u \rangle - \frac{G^3}{2\lambda_n^2} \left(1 + \frac{G^2}{2\kappa_n} \right) [(2 + \lambda_n) M - G] -$$

$$- \frac{\lambda_n}{2\kappa_n (\lambda_n + 3\kappa_n)} \left(\frac{GM}{2\kappa_n} - \frac{GM}{2} + 4 \right) + \frac{M}{2\kappa_n} \left(\frac{3G}{2} + \frac{10}{G} \right) - \frac{2}{\kappa_n} + \frac{GM}{4\kappa_n^2}$$

($n = 2, 4, 6, \dots$)

$$(M = \operatorname{th} 1/2 G, \quad \langle u \rangle = M / G)$$

Здесь $\langle u \rangle$ — средняя по сечению канала скорость потока, дающая основной вклад в выражения для X_n . Когда $n \rightarrow \infty$ (при фиксированных остальных параметрах), X_n быстро стремится к величине $\langle u \rangle$.

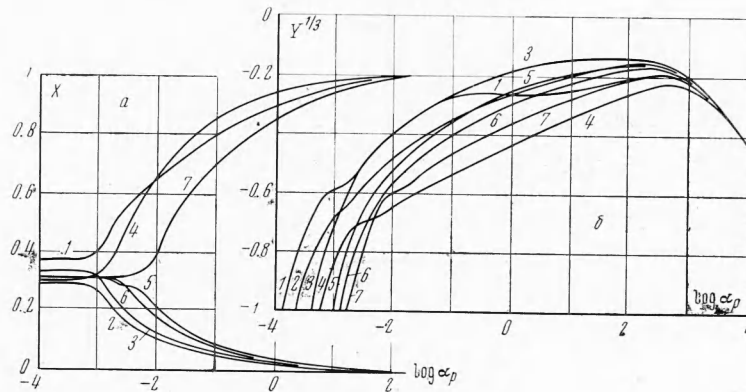
При больших α имеем $|c_n| \gg 1$, и поэтому для нахождения Y_n в первом приближении можно пренебречь формой профиля, как и в случае малых α , и получить

$$Y_n = -\alpha / R \quad (n \ll \alpha) \quad (2.5)$$

Магнитное поле здесь не играет роли в соответствии с общими представлениями (величины G предполагаются ограниченными).

Получение аналитической оценки для X_n при больших α затруднительно.

Собственные значения, которым отвечают большие n , при конечных числах Рейнольдса близки к соответствующим величинам в покоящейся жидкости (см. формулу (2.1)).



Фиг. 1

Исследование спектра в промежутке между асимптотическими выражениями (2.3), (2.4) и (2.5) проводилось при помощи численного метода, развитого в работах [6-8]. Численные расчеты проводились на БЭСМ-6. Собственные значения находились с заданной точностью (три значащих цифры). Контрольные вычисления были выполнены на примере течения Пуазейля и дали хорошее совпадение с численными результатами, полученными в [9].

3. Рассмотрим поведение малых возмущений в зависимости от α , n для характерных чисел Гартмана при фиксированном $R = 2 \cdot 10^5$. Предельный случай $G = 0$ изучался многими авторами. Последние интересные результаты получены в работах [10, 11], которые, по-видимому, исчерпывают проблему устойчивости плоского течения Куэтта.

С ростом G происходит существенная перестройка спектра. В частности, исчезают точки кратности собственных значений, которые имеются только в предельном случае $G = 0$.

На фиг. 1 представлены зависимости $X_n(\alpha)$ и $Y_n(\alpha)$ при $G = 3$ для первых семи спектральных номеров во всем диапазоне между асимптотическими выражениями (здесь и ниже $\alpha_p = 1/2\alpha$). Когда α растет, фазовая скорость возмущений стремится либо к скорости нижней стенки, либо к скорости верхней стенки. Поскольку это проявляется при всех числах Гартмана, то возмущения будем классифицировать на верхние и нижние пристенные возмущения согласно поведению их фазовой скорости при

больших волновых числах. В данном случае спектральные номера $n = 1, 4, 7, \dots$ соответствуют верхним пристенным возмущениям, а спектральные номера $n = 2, 3, 5, 6, \dots$ соответствуют нижним пристенным возмущениям.

Характерна разница в поведении верхних и нижних пристенных зависимостей $Y_n(\alpha)$ за асимптотической областью при малых α . Здесь влияние гидродинамики потока сказывается прежде всего на верхних пристенных возмущениях, декремент затухания которых увеличивается по сравнению со случаем покоящейся жидкости. В итоге происходит перестройка спектра сразу же за областью применимости формулы (2.3). Пересечения в спектре имеют место и при больших α . Минимальный декремент затухания не определяется всюду первым собственным значением в отличие от течения Куэтта. При данных параметрах задачи поток устойчив. В районе «опасных» волновых чисел (т. е. величин порядка обратного характерного размера течения) зависимость $Y_1(\alpha)$ имеет слабый локальный максимум.

Чтобы получить представление о спектре малых возмущений при «средних» числах Гартмана, были проведены численные расчеты при $G = 6$. В этом случае возмущение с $n = 1$ будет верхним пристенным, а возмущения с $n = 2, 3, 4, 5$ будут нижними пристенными. Обращаем внимание на асимметрию в разделении возмущений на верхние и нижние.

Отмеченная выше особенность влияния гидродинамики на декремент затухания при малых α имеет место и в данном случае. Характерно поведение нижних пристенных зависимостей $Y_n(\alpha)$, которые не пересекаются при всех α . Функция $Y_1(\alpha)$ имеет выраженный локальный максимум при $\alpha = 0.55$, который, однако, в плоскости Y расположен ниже зависимости $Y_2(\alpha)$. В диапазоне $\alpha = 1 \div 10^3$ декремент затухания, определяемый $Y_1(\alpha)$, значительно больше, чем определяемый по указанным нижним пристенным возмущениям.

С ростом n область применимости асимптотических выражений (2.3), (2.4) растет. Асимптотическое поведение нижних пристенных зависимостей при больших α становится очевидным раньше, чем это происходит для верхней пристенной зависимости. Эти общие обстоятельства проявляются и в других рассмотренных случаях.

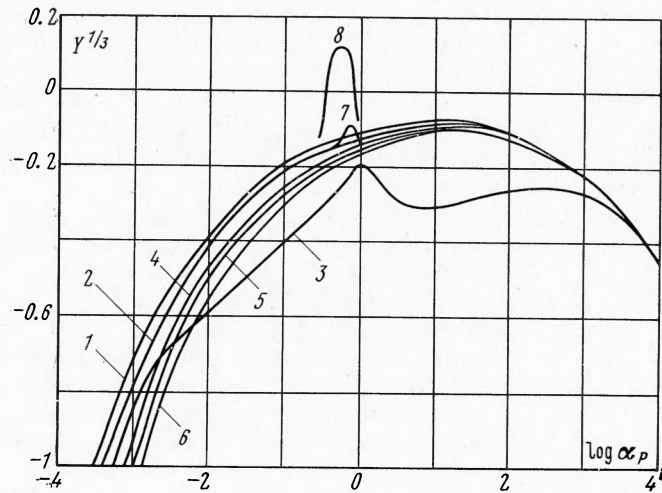
На фиг. 2 представлена зависимость $Y_n(\alpha)$ для первых шести спектральных номеров при $G = 10$ (кривые 1—6). Так же как и при других G , поток устойчив для данного числа Рейнольдса. Возмущения с $n = 1, 2, 4, 5, 6$, являются нижними пристенными. Поведение соответствующих зависимостей $Y_n(\alpha)$ напоминает случай покоящейся жидкости. Необходимо отметить, что фазовая скорость этих возмущений уже при $\alpha = 0.1$ практически равна нулю и при дальнейшем увеличении α не изменяется. Все это связано с появлением плоского участка в профиле скорости при больших G (см. (1.1)). Возмущение с $n = 3$ будет верхним пристенным. Функция $Y_3(\alpha)$ имеет характерный максимум в районе опасных α . Поведение этой зависимости хорошо иллюстрирует сильное влияние гидродинамики потока на декремент затухания верхних пристенных возмущений.

Так же как и в случае течения Гартмана, влияние члена $G^2\varphi''$ в правой части (1.2) существенно только при небольших $\alpha R |c|, \alpha R |c - 1|$. Наличие магнитного поля приводит при этом к более быстрому затуханию возмущений в соответствии с общими представлениями о непосредственном воздействии магнитного поля на возмущения в проводящей жидкости.

Рассмотренные спектры малых возмущений наглядно демонстрируют некоторые общие характеристики гидродинамической устойчивости течений с асимметричным профилем в отличие от течений с симметричным профилем [8,9] и антисимметричным профилем скорости [10,11]. Отметим

также, что этот асимметричный случай существенно отличается и от тех асимметричных случаев, когда профиль скорости имеет локальный максимум внутри канала.

4. Рассмотрим поведение малых возмущений в зависимости от числа Рейнольдса. Прежде всего заметим, что область зависимости собственных значений только от одного параметра αR шире, нежели область применимости асимптотических выражений при малых α . На это обстоятельство, в частности, указывает практика численных расчетов. Таким образом,



Фиг. 2

численные результаты, полученные при одном R , позволяют априори делать заключения о зависимости $c_n(\alpha)$ при других значениях R в некоторой области $\alpha^2 \ll 1$. Данный интервал изменения α представляется интересным — в нем происходит существенная перестройка спектра по сравнению с асимптотическим поведением. Наконец, сделанное замечание можно использовать при проведении численных расчетов для различных R . (Данная аппроксимация перестает быть справедливой, если величина c за вычетом скорости пластины по модулю становится сравнимой с α^2 . Последнее имеет место, например, на асимптотике нейтральной кривой Линя для течения Пуазейля [12].)

Когда $G < 6.5$, проведенные численные расчеты показывают, что рассматриваемое течение устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям при всех числах Рейнольдса, как и в случае течения Куэтта в общей гидродинамике. Характерный максимум $Y_1(\alpha)$ в районе опасных α появляется при $G > 3$, однако пока $G < 6.5$ он не выходит в область неустойчивости Y -плоскости. При проверке его положения, как правило, нет надобности проводить численные расчеты до очень больших чисел Рейнольдса ($R > 10^6$), поэтому что с ростом R максимум смещается в сторону меньших α , где можно использовать рассмотренную выше аппроксимацию, разумеется, с должной осторожностью.

Неустойчивость появляется впервые при $G = 6.5$ (критическое число R_* при этом равно ∞), затем с ростом G R_* монотонно убывает до минимальной величины, равной $5.8 \cdot 10^5$ при $G = 10$. Дальнейшее увеличение G оказывает стабилизирующее воздействие. Зависимость $R_*(G)$ показана на фиг. 3. При $G > 14$ очевидно асимптотическое поведение $R_* = 50000 G$. Эта зависимость совпадает с асимптотической зависимостью Локка [2].

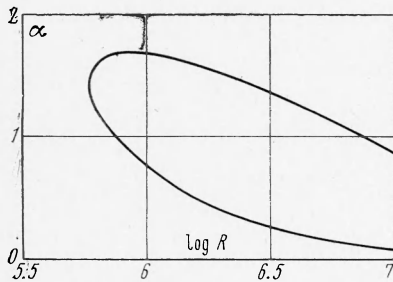
Действительно, при больших G профиль скорости вырождается в экспоненциальный, а вид однородных граничных условий на оси перестает быть существенным.

На фиг. 3 показана также зависимость $\alpha_*(G)$ (α_* — критическое волновое число). При G , близких к 6.5, величина α_* мала и обращается в нуль при этом критическом значении числа Гартмана. В случае больших G имеет место формула Локка $\alpha_* = 0.16G$.

К неустойчивости всегда приводят только верхние пристенные возмущения. Критическая точка при этом лежит в районе верхней пластины. С ростом G растет спектральный номер неустойчивых возмущений n_* . При G , близких к критическому значению, $n_* = 1$. Когда $G = 10$, $n_* = 3$, как это видно на фиг. 2, где показаны последовательные положения максимума $Y_3(\alpha)$ при $R = 5 \cdot 10^5$ и $R = 10^6$ (кривые 7 и 8). При $G = 17$ $n_* = 6$.

На фиг. 4 показана нейтральная кривая для $G = 10$. Здесь обращает на себя внимание то обстоятельство, что вдоль нижней ветви нейтральных колебаний критическая точка не стремится к стенке, когда $R \rightarrow \infty$. Асимптотическим значением c на нижней ветви является постоянная. В этом случае собственное значение зависит только от αR .

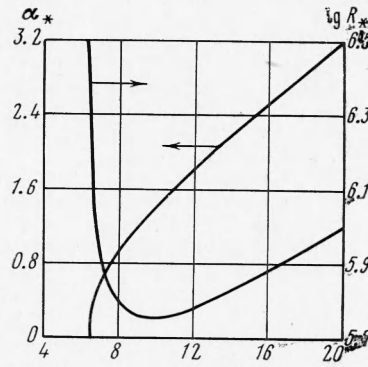
Рассмотренная неустойчивость напоминает неустойчивость течения Гартмана по отношению к антисимметричным возмущениям. Во-первых, это связано с тем, что при тех G , когда имеется неустойчивость, изучаемый профиль скорости несущественно отличается от профиля Гартмана (в силу сравнительно большой величины G). Далее, если рассмотреть характеристические определители [12] в обоих случаях, то можно убедиться



Фиг. 4

в том, что они с некоторой точностью аппроксимируются одним и тем же выражением, которое не зависит от второго граничного условия: на стенке в рассматриваемом случае ($\varphi' = 0$) и на оси ($\varphi'' = 0$) в течении Гартмана; априори трудно оценить допускаемую при этом погрешность, тем более, что в данном случае для аппроксимации характеристического определителя необходимо рассматривать невязкие решения [12] в явной форме. Однако если иметь в виду полученные численные результаты для значений критических параметров, то это удастся проделать без особого труда в случае $\alpha_*^2 \ll 1$, когда ряды, представляющие собой невязкие решения, быстро сходятся. При этом установлено, что для получения нужного представления характеристического определителя в нем приходится пренебрегать, в частности, членами $O(\epsilon)$, $\epsilon = [(1 - c) / c]^{1/2}$. Численные расчеты показывают, что $c \approx 0.85$.

Автор благодарит М. А. Гольдштика за внимание к работе, В. А. Сапожникова и В. Н. Штерна за полезные обсуждения.



Фиг. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
2. L o s k R. C. The stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field. Proc. Roy. Soc., 1955, vol. A233, No. 1192.
3. П а в л о в К. Б. Об устойчивости плоского течения Куэтта в присутствии магнитного поля. В сб. «Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы», Рига, Изд-во АН Латв ССР, 1962.
4. К а к у т а н и Т. The hydromagnetic stability of the modified plane Couette flow in the presence of transverse magnetic field. J. Phys Soc. Japan, 1964, vol. 19, No. 6.
5. Б и р и х Р. В., Гершуни Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М. О спектре возмущений плоскопараллельных течений при малых числах Рейнольдса. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
6. Г о л ь д ш т и к М. А., Сапожников В. А. Устойчивость ламинарного потока в присутствии поля массовых сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
7. С а п о ж н и к о в В. А. Решение задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки. Тр. Всес. семинара по численным методам механики вязкой жидкости (II), Новосибирск, «Наука», 1969.
8. Г о л ь д ш т и к М. А., Сапожников В. А., Ш т е р н В. Н. Локальные свойства профиля скорости и гидродинамическая устойчивость. II Респ. конф. по аэрогидродинамике, теплообмену и массообмену, Аннот. докл., Киев, 1969.
9. С а п о ж н и к о в В. А., Ш т е р н В. Н. Численный анализ устойчивости плоского течения Пуазейля. ПМТФ, 1969, № 4.
10. Ш т е р н В. Н. Устойчивость плоского течения Куэтта. ПМТФ, 1969, № 5.
11. Ш т е р н В. Н. Спектр малых возмущений плоского течения Куэтта. ПМТФ, 1970, № 1.
12. Л и н ь Цзя-цзяо Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.