УДК 532.51

О ВИХРЕВОМ ИМПУЛЬСЕ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Владимиров

(*Новосибирск*)

1. Пусть в несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство вне конечной области K (с достаточно гладкой замкнутой поверхностью ∂K), задано поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющее условиям: а) достаточной гладкости; *б*) $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$; в) $|\mathbf{v}(\mathbf{r})| \sim \mathrm{const}/r^{1+\varepsilon}$, $|\operatorname{rot}\mathbf{v}| \sim \mathrm{const}/r^{4+\varepsilon}$ при $r \equiv |\mathbf{r}| \to \infty$ с малым $\varepsilon > 0$.

Обозначим через $\mathbf{n}$ внешнюю нормаль к ∂K, через G — область, заполненную жидкостью. Пусть плотность жидкости $\rho = 1$. Удобно использовать следующее представление для $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$;

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\mathbf{A}; \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{r}) = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\oint_{\partial K}\dfrac{\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{v}}}{s}\,dS, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{4\pi}\left[\displaystyle\int_G \dfrac{\hat{\boldsymbol{\omega}}}{s}\,dV + \oint_{\partial K}\dfrac{\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\mathbf{v}}}{s}\,dS\right], \end{cases} \tag{1.2}$$

где $s = |\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|$; значком $\wedge$ отмечаются переменные, по которым проводится интегрирование; $\boldsymbol{\omega} \equiv \operatorname{rot}\mathbf{v}$.

Это представление для случая конечной G дано в [1], его доказательство для бесконечной области G проводится прямым вычислением (подстановкой (1.2) в (1.1)) с учетом ограничений на асимптотику поля скорости. При этом формальное вычисление дает $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv 0$ в области K вне жидкости.

Последнее показывает, что течение на G может быть интерпретировано как течение во всем пространстве, полученное путем «заполнения» области K покоящейся жидкостью. При этом на ∂K возникает разрыв как тангенциальной, так и нормальной компоненты скорости, соответствующий распределению (1.2) вихрей плотности $\mathbf{n}\times\mathbf{v}$ и источников плотности $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}$ на ∂K.

Естественно, область K может быть «заполнена» любым другим образом (необязательно покоящейся жидкостью), при этом изменится распределение вихрей и источников в (1.2).

Однако представление (1.2) имеет то преимущество, что «заполнение» K покоящейся жидкостью не меняет полного импульса течения, это будет важно в дальнейшем при обобщении понятия импульса.

2. **Импульс течений несжимаемой жидкости.** Обычное определение импульса течения, который будем называть «истинным» импульсом $\mathbf{I}$, имеет вид

$$\mathbf{I} = \int_{V_0} \mathbf{v}\,dV, \tag{2.1}$$

где V_0 — объем, занятый жидкостью; $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — поле скорости.

Это определение применимо как для конечных, так и для бесконечных V_0 при условии абсолютной сходимости интеграла (2.1).

Однако в случае жидкости, заполняющей все пространство вне некоторой ограниченной системы тел, интеграл (2.1) для течений, обладающих дипольной асимптотикой, не сходится абсолютно. Его величина оказывается зависящей от способа стремления объема интегрирования к бесконечности. В случае же абсолютной сходимости (2.1) для жидкости, заполняющей все пространство, $\mathbf{I} = 0$, т. е. для всех таких течений с ненулевым импульсом определение (2.1) не имеет смысла.

Поэтому для случая жидкости, заполняющей все пространство, был введен вихревой импульс [2]

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\int \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV. \tag{2.2}$$

Известно, что вектор $\mathbf{P}$, имеющий размерность импульса, сохраняется для течений несжимаемой как вязкой (стоксовой), так и идеальной жидкости при отсутствии непотенциальных сил [3].

Рассмотрим теперь течение вида, описанного в п. **1**. В конкретной реализации этого течения область K может являться как каверной (полостью), так и твердым или деформируемым телом. Согласно принятому в п. **1** способу сведения рассматриваемого течения к течению во всем пространстве без изменения полного импульса течения, предполагаем, что для определения вихревого импульса достаточно использовать в (2.2) поле вихря из (1.2). Это поле состоит из распределения $\boldsymbol{\omega}$ на G и поверхностного распределения плотности $\mathbf{n}\times\mathbf{v}$ на ∂K.

Тогда определение вихревого импульса принимает вид

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\left\{\int_G \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV + \oint_{\partial K} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v})\, dS\right\}. \tag{2.3}$$

Корректность этого определения докажем теоремой.

Т е о р е м а 1. Пусть в области G дано течение несжимаемой вязкой (подчиняющейся уравнениям Навье — Стокса) жидкости такое, что область K и поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяют условиям, сформулированным в п. **1**. Кроме того, пусть движение происходит в поле тяжести $\mathbf{g} = \text{const}$. Тогда для вихревого импульса (2.3) имеем

$$\frac{dP_i}{dt} = -g_i V - \oint_{\partial K} \sigma_{ik} n_k dS, \tag{2.4}$$

где $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \nu(\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i)$; V — объем области K; ν — коэффициент кинематической вязкости; p — давление. Здесь используется правило суммирования по повторяющимся индексам. Теорема справедлива как для вязкой, так и для идеальной жидкости.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В тензорной записи (2.3) принимает вид

$$2P_i = \int_G \varepsilon_{ikl} x_k \omega_l dV + \int_{\partial K} \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn} x_k v_n n_m dS, \tag{2.5}$$

где ε_{ikl} — единичный антисимметричный тензор третьего ранга.

Уравнение Навье — Стокса берем в виде

$$\frac{dv_n}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_n} + g_n + \nu\frac{\partial^2 v_n}{\partial x_a \partial x_a}, \tag{2.6}$$

$$\frac{d\omega_l}{dt} = -\varepsilon_{lmn}\frac{\partial v_a}{\partial x_m}\frac{\partial v_n}{\partial x_a} + \nu\frac{\partial^2 \omega_l}{\partial x_a \partial x_a}.$$

Дифференцируем (2.5) по времени, учитывая, что G — жидкий объем, ∂K — жидкая поверхность. При этом используем известные правила дифференцирования по жидким конфигурациям [4] и уравнения (2.6). При переходе от поверхностных интегралов к объемным и наоборот используем указанную в п. 1 ограниченность асимптотики поля скорости. После довольно громоздких преобразований получаем (2.4), где первый член справа представляет собой силу Архимеда, второй — силу, действующую со стороны области K на окружающую ее жидкость. Если система находится в покое, то $dP_i/dt = 0$ и получаем классический закон Архимеда.

Таким образом, изменение вихревого импульса (2.3) происходит по законам, аналогичным законам изменения истинного импульса (когда последний существует).

Уравнение (2.4) весьма просто записывается в практически важном случае всплывания полости

$$dP_i/dt = -g_i V.$$

В случае движения твердого тела в жидкости удобно ввести полный импульс $\mathbf{R}$ системы тело + жидкость:

$$\mathbf{R} = m\mathbf{U} + \frac{1}{2}\left\{\int\limits_G \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV + \int\limits_{\partial K} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v})\, dS\right\}, \tag{2.7}$$

где m — масса тела; $\mathbf{U}$ — скорость тела. Для $\mathbf{R}$ справедливо следующее из (2.4) равенство

$$d\mathbf{R}/dt = \mathbf{g}(m - \rho V),$$

где ρ — плотность жидкости.

В (2.7) первый член — импульс тела, второй — обобщение присоединенного импульса на случай вихревых течений. Можно показать, что (2.7) в случае потенциальности течения принимает вид

$$\mathbf{R} = (m + \mu)\mathbf{U},$$

где μ — присоединенная масса [4], причем

$$\mu\mathbf{U} \equiv \int\limits_{\partial K} \varphi \mathbf{n} dS = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial K} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v})\, dS$$

(φ — потенциал течения), т. е. в этом случае вихревой импульс $\mathbf{P}$ совпадает с присоединенным импульсом $\mu\mathbf{U}$.

Рассмотрим теперь течение несжимаемой неограниченной жидкости с завихренностью, сосредоточенной в некоторой конечной области течения. Тогда для любой конечной области A, содержащей всю завихренность, имеем

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\int \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV = \int\limits_A \mathbf{v} dV + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial A} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v})\, dS. \tag{2.8}$$

Этому соотношению можно придать следующий смысл: если в жидкости можно провести замкнутую поверхность, вне которой $\boldsymbol{\omega} = 0$, то вихревой импульс течения представляется в виде суммы собственного импульса данного куска жидкости и его присоединенного импульса.

Известно, что при движении стационарных вихревых колец в идеальной несжимаемой неограниченной жидкости вместе с кольцом движется некоторый жидкий объем неизменной формы, называемый «атмосферой» вихревого кольца.

Заменим этот объем твердым телом с плотностью, равной плотности жидкости, оставив остальную часть течения неизменной.

Равенство (2.8) позволяет дать ответ на вопрос [5], заключающийся в следующем: будет ли вихревой импульс (2.2) кольцевого вихря равняться полному импульсу (2.7) получившейся системы тело + жидкость?

Выбирая в качестве A в (2.8) «атмосферу» вихревого кольца и используя $\mathbf{P} = \mu\mathbf{U}$, как было замечено ранее, можем ответить на поставленный вопрос утвердительно.

3. Вихревой импульс неоднородной несжимаемой жидкости. Обобщением определения вихревого импульса (2.2) на случай течений несжимаемой неограниченной жидкости с $\rho \neq \mathrm{const}$ является выражение

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\int \mathbf{r} \times \operatorname{rot} \rho\mathbf{v} dV. \tag{3.1}$$

Ограничения, которые накладывались на поле скоростей, теперь необходимо наложить на поле $\rho\mathbf{v}$ за исключением того, что в (3.1) возможен скачок ρ на некоторой жидкой поверхности, не уходящей на бесконечность (стратифицированные течения). В последнем случае в (3.1) появятся поверхностные интегралы, так как дифференцирование ступенчатой функции даст δ-функцию на соответствующих поверхностях. Пусть скачок ρ происходит на поверхности C. Тогда (3.1) принимает вид

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\left\{\int \mathbf{r} \times \operatorname{rot} \rho\mathbf{v} dV + \int_C [\rho]\, \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v})\, dS\right\},$$

где $[\rho]$ — разрыв ρ на C; $\mathbf{n}$ — нормаль к C, первый интеграл берется по всему пространству, исключая C. Эта запись импульса применима, например, для кольцевых вихрей с ядром из материала, отличного от окружающей среды.

Корректность определения (3.1) показывает динамическое уравнение на $\mathbf{P}$, имеющее вид

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\mathbf{g}\int \{\rho(\mathbf{r}) - \rho(\infty)\}\, dV,$$

с асимптотическими ограничениями на ρ

$$|\rho(\mathbf{r}) - \rho(\infty)|\, r^4 \to 0 \text{ при } r \to \infty.$$

Жидкость может быть как вязкой, так и идеальной. Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.

4. О моменте импульса несжимаемой жидкости. Аналогично рассмотренному в данной работе определению импульса можно ввести в рассмотрение момент импульса течения вне ограниченной области K, использовав определение для момента импульса жидкости, заполняющей все пространство [4]:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{3}\int \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})\, dV \quad (\rho = 1).$$

Для получения момента импульса течения вне K достаточно подставить сюда распределение вихря, содержащее поверхностное распределение плотности $\mathbf{n}\times\mathbf{v}$ на ∂K. Тогда

$$\mathbf{M} = \frac{1}{3}\left\{\int_G \mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega})\,dV + \oint_{\partial K} \mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{v}))\,dS\right\}.$$

Динамическое уравнение для $\mathbf{M}$ запишется в виде

$$\frac{dM_i}{dt} = -\int_{\partial K} \varepsilon_{ikl}x_k\sigma_{lp}n_p dS.$$

Вывод этого уравнения проводится аналогично доказательству теоремы 1 при почти тех же ограничениях.

Обобщение определения момента импульса на случай неоднородной жидкости запишется в виде

$$\mathbf{M} = \frac{1}{3}\int \mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\operatorname{rot}\rho\mathbf{v})\,dV.$$

Рассмотрение и обоснование этого определения проводится аналогично рассмотрению п. 3.

В заключение остановимся на обсуждении принятых ограничений на асимптотику поля скорости

$$|\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)|r \to 0 \text{ при } r \to \infty.$$

Такое ограничение естественно [4] для течений идеальной жидкости с асимптотикой завихренности $|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)| < c_1(t)/r^{4+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) и разрешает присутствие источников в ограниченной области, т. е. изменение объема области K.

В случае вязкой жидкости такие ограничения не являются очевидными. Так, при стационарном обтекании тела вязкой жидкостью за телом существует область следа, в которой $|\mathbf{v}| \sim c_2/r$ при $r \to \infty$ [6], т. е. предположение не выполняется, c_1 и c_2 — произвольные ограниченные функции времени, не зависящие от координат.

Но, с другой стороны, понятие вихревого импульса и не может быть применено к установившемуся обтеканию твердого тела вязкой жидкостью, так как конечная сила, действующая на жидкость в течение бесконечного «времени установления», должна приводить, согласно (2.4), к бесконечному вихревому импульсу жидкости. Таким образом, в случае вязкой жидкости, проведенное рассмотрение справедливо только для конечных промежутков времени с момента начала движения.

Автор выражает благодарность Б. А. Луговцову, поставившему перед автором рассмотренные здесь вопросы.

Поступила 19 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Серрин Дж.** Математические основы классической механики жидкости. М., ИЛ, 1963.
2. **Ламб Г.** Гидродинамика. М., ОГИЗ, 1947.
3. **Луговцов Б. А.** Турбулентные вихревые кольца. Дис. на соиск. учен. степени д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1973.

4. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
5. **Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л.** Об импульсе вихря, движущегося в трубе.—В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 16. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.
6. **Пухначев В. В.** Лекции по динамике вязкой несжимаемой жидкости. Ч. 1. Новосибирск, изд. Новосибир. ун-та, 1969.

УДК 551.515.3

ДВА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА ПО КОНЦЕНТРАЦИИ ВИХРЯ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. Лихоперский

(*Москва*)

Завихренность в жидкости и газе в конечном счете разрушается вязкостью [1], но известны факты появления и длительного существования пространственных дискретных вихрей в воде, воздухе и других средах. Поэтому возникает интерес к условиям, при которых завихренность может даже возрастать при наличии вязкости. Например, при истечении жидкости из отверстия в дне вращающегося цилиндрического сосуда суммарный момент количества движения ее относительно вертикальной оси сосуда увеличивается со временем [2, 3]. Для некоторых течений существуют противоречивые мнения: в работах [4, 5] утверждается, что вихрь около плоского стока в вязкой жидкости затухает, а в [6, 7] говорится, что около стока при определенных числах Рейнольдса происходит интенсификация завихренности. В данной работе приводятся точные решения уравнений Навье—Стокса, показывающие развитие вихря в вязкой жидкости.

1. Наибольший интерес представляет случай, когда из течения вязкой жидкости с вихрем $|\Omega|$, близким к нулю, образуется течение с конечной завихренностью. Поэтому постановку задачи свяжем с вопросом об устойчивости течения вязкой жидкости, имеющей вначале $|\Omega| = 0$, по отношению к определенным возмущениям. На примере задачи с осевой симметрией в цилиндрической системе координат (r, θ, z) покажем прием объединения метода поиска точных решений уравнений Навье — Стокса с рассмотрением устойчивости течения вязкой жидкости. Основное течение, для которого компоненты вихря равны нулю, пусть имеет вид

$$\left\{\begin{aligned} &\Omega_\theta = \gamma = 0, \\ &v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ &v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned}\right. \tag{1.1}$$

где $\gamma = 2\pi r v_\theta$ — циркуляция скорости; Φ — потенциал для компонент скоростей v_r и v_z. Выбором потенциала Φ можно получить то или иное основное течение.