

УДК 517.974+534.14+534.2

АКУСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ОКОЛО ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРЕПЯТСТВИЙ В КАНАЛЕ

С. В. Сухинин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследованы вопросы существования собственных колебаний в бесконечных цилиндрических областях, содержащих тонкое цилиндрическое препятствие. Получены критерии существования собственных колебаний. Для препятствий, допускающих поворотную симметрию, исследована зависимость частот собственных колебаний от размеров препятствия. Для первых мод исследован вид собственных колебаний.

Введение. Существование собственных акустических колебаний в некоторой структуре может привести к появлению резонансных эффектов — существенному росту амплитуды колебаний вследствие обратной связи с некоторым нелинейным источником. Поэтому изучение акустических собственных колебаний имеет важное прикладное значение. Цилиндрический канал, содержащий тонкостенное препятствие, широко применяется в технике (турбины, вентиляторы, трубопроводы). Колебания, возникающие в реальных конструкциях, обусловлены, как правило, нелинейным источником (образование когерентных структур в потоке жидкости, вибрационное горение и т. п.). Наиболее часто встречаются неограниченные области колебаний. Существенным условием появления интенсивных колебаний является близость частоты источника колебаний к собственной частоте акустических колебаний в неограниченной области. Кроме того, вид акустического возмущения, вызываемого источником, должен быть согласован с видом соответствующей собственной функции (условие неортогональности вынуждающей силы и моды собственных колебаний). Этим обусловлена актуальность настоящей работы.

Основной трудностью при описании собственных колебаний в неограниченных областях является то, что собственные частоты акустических колебаний погружены в непрерывный спектр частот, соответствующих обобщенным собственным колебаниям. В [1] эта трудность преодолена, при помощи сужения класса допускаемых решений доказано существование собственных колебаний для достаточно длинных препятствий. В настоящей работе показано, что для определенного типа препятствий собственные колебания существуют всегда, а также проведены численные исследования вида собственных функций и зависимости частот собственных колебаний от некоторых линейных параметров.

1. Формулировка задачи. Пусть (x, y, z) — декартовы координаты трехмерного пространства \mathbb{R}^3 . Бесконечный цилиндрический канал описывается при помощи направляющей $\Gamma = \{(x, y): G(x, y) = 0\}$ и образующей, параллельной оси Oz . Направляющая цилиндрического канала предполагается достаточно гладкой, связной и ограниченной на плоскости (x, y) . Для описания поверхности цилиндрического канала используется обозначение $Z_\Gamma = \Gamma \times \mathbb{R}$. Препятствие, находящееся в канале, предполагается ограниченным, бесконечно тонким, цилиндрическим, с образующей, параллельной оси Oz , и описывается

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00894).

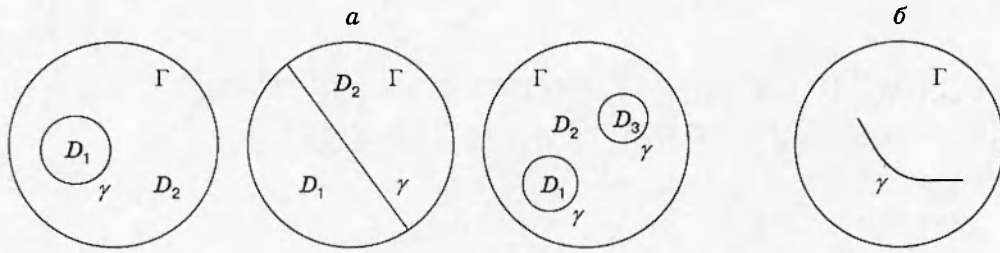


Рис. 1

при помощи направляющей $\gamma = \{(x, y): g(x, y) = 0\}$ на плоскости (x, y) и системы неравенств $-\infty < a(x, y) \leq z \leq b(x, y) < +\infty$, $(x, y) \in \gamma$. Последнее означает, что края препятствия могут быть неровными. Для описания поверхности препятствия будет использовано обозначение $Z_\gamma = \{(x, y, z): g(x, y) = 0, a(x, y) \leq z \leq b(x, y)\}$. Принято, что $G(x, y)$, $g(x, y)$, $a(x, y)$, $b(x, y)$ достаточно гладкие функции. Предполагается, что направляющая цилиндрического препятствия находится внутри направляющей канала и делит область $D = \text{Int}(\Gamma)$, ограниченную Γ , на несколько связных частей $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_N \cup \Gamma$. Возможные расположения направляющих цилиндрического канала и препятствия представлены на рис. 1, случай, представленный на рис. 1, б, в работе не рассматривается.

Уравнения, описывающие акустические колебания. Потенциал $u(x, y, z, t)$ акустического возмущения скорости предполагается периодически зависящим от времени: $u(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) \exp(i\omega t)$, поэтому можно считать, что уравнения для потенциала акустического возмущения скорости $u(x, y, z, t)$ имеют вид

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \lambda^2 u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega = D \times \mathbb{R} \setminus Z_\gamma. \quad (1.1)$$

Здесь безразмерные частота λ и пространственные переменные (x, y) имеют вид $\lambda = \omega H/c$, $x = \tilde{x}/H$, $y = \tilde{y}/H$, где c — скорость звука; H — характерный поперечный размер цилиндрического канала; ω — круговая частота акустических колебаний. Предполагается, что в безразмерных переменных площадь поперечного сечения канала равна 1, безразмерная величина L характеризует длину препятствия относительно поперечного размера канала. На препятствии Z_γ и стенках канала Z_Γ должны быть выполнены условия непротекания

$$u_n = 0 \quad \text{на} \quad Z_\Gamma \cup Z_\gamma. \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{n} — вектор нормали к соответствующей поверхности. Согласно физическому содержанию задачи необходимо, чтобы для ее решения $u(x, y, z)$ было выполнено условие конечности энергии во всей области колебаний

$$E(u) = \int_{\Omega} [|u|^2 + |\nabla u|^2] d\Omega < \infty. \quad (1.3)$$

Здесь $\Omega = D \times \mathbb{R} \setminus Z_\gamma$ — область колебаний; $E(u)$ имеет смысл энергии колебаний.

Условия излучения и непрерывный спектр. В общем случае решение (1.1) описывает приходящие и уходящие волны, что приводит к неединственности решения в неограниченных областях, поэтому необходимы дополнительные условия, основанные на физическом содержании задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Решение (1.1) удовлетворяет условию излучения, если для некоторого достаточно малого ε ($\varepsilon > 0$, $-1/\varepsilon < a(x, y) \leq x \leq b(x, y) < 1/\varepsilon$) справедливы

представления

$$u(x, y) = \begin{cases} c_0^{(+)} \exp(i\lambda z) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(+)} Y_k(x, y) \exp(-z\sqrt{\beta_k^2 - \lambda^2}), & z \geq 1/\varepsilon, \\ c_0^{(-)} \exp(-i\lambda z) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(-)} Y_k(x, y) \exp(z\sqrt{\beta_k^2 - \lambda^2}), & z \leq -1/\varepsilon. \end{cases} \quad (1.4)$$

Предполагается, что для $\lambda^2 < \beta_k^2$ выбрана такая ветвь квадратного корня, что $\sqrt{\beta_k^2 - \lambda^2} > 0$; $c_k^{(-)}$ и $c_k^{(+)}$ — комплексные числа такие, что ряды (1.4) сходятся; $Y_k(x, y)$ и β_k^2 ($k = 0, 1, 2, \dots$) — собственные функции и собственные значения оператора Лапласа в области D с условиями Неймана на границе Γ , пронумерованные в порядке возрастания собственных значений. Необходимо отметить, что если функция удовлетворяет условию излучения, то в общем случае она затухает либо возрастает, как экспонента при удалении от начала координат (препятствия). Более подробно условия излучения обсуждаются в [2].

Задача (1.1), (1.2) в классе функций, удовлетворяющих условиям излучения (1.4), является фредгольмовой [2] и имеет нетривиальные решения только для дискретного на некоторой поверхности Римана Λ множества Λ^* (значений параметра λ уравнения (1.1)). В [2] они называются квазисобственными значениями этой задачи, а соответствующие λ_* ($\lambda_* \in \Lambda^*$) решения u^* задачи (1.1), (1.2) называются квазисобственными функциями. В том случае, когда энергия квазисобственных колебаний конечна ($E(u^*) < \infty$), квазисобственная функция u^* описывает классические собственные колебания, которые локализованы в окрестности препятствия и могут являться причиной резонансных явлений. В том случае, когда энергия квазисобственных колебаний бесконечна, физический смысл квазисобственных колебаний до конца неясен.

Если $\lambda^2 \geq \beta_k^2$, то $Y_k(x, y) \exp(\pm iz\sqrt{\lambda^2 - \beta_k^2})$ ($k = 0, 1, \dots$) описывают обобщенные собственные волны в канале без препятствия. Если $k = 0$, то эти волны существуют для всех вещественных значений безразмерной частоты λ . Это означает, что соответствующее задаче (1.1), (1.2) самосопряженное расширение оператора Лапласа $-\Delta$ имеет непрерывный спектр, который заполняет всю неотрицательную часть вещественной прямой. Чисто точечный спектр этого оператора погружен в непрерывный и соответствует значениям λ_*^2 , для которых существует нетривиальное решение задачи (1.1)–(1.3). Для дальнейшего изложения потребуется

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Обобщенные собственные волны в канале, которые описываются при помощи функций $W_0 = \exp(i\lambda z)$, называются поршневыми модами.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Так как функция, описывающая поршневую моду, не зависит от переменных (x, y) , то поршневая мода является обобщенной собственной функцией канала как с тонкостенным цилиндрическим препятствием, так и без него.

Сужение класса решений. Оператор $-\Delta_N$, соответствующий задаче о собственных колебаниях около препятствия в канале, имеет непрерывный спектр, совпадающий с положительной полуосью вещественных чисел, что затрудняет исследование собственных частот и функций вариационными методами. Сужение пространства допускаемых решений может отодвинуть нижнюю грань ν непрерывного σ_1 спектра оператора $-\Delta_N^{(1)}$ от начала координат, что позволит применять в интервале $(0, \nu)$ вариационные методы.

Соотношения (1.1), (1.2) — это задача Неймана для уравнения Гельмгольца, далее они называются задачей СК (собственные колебания), H_s — пространство допустимых решений этой задачи (пространство Соболева).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Решение u^* задачи СК, удовлетворяющее (1.3), называется собственной функцией этой задачи. Соответствующая частота λ^* называется собственной.

Необходимо отметить следующее: собственные функции задачи СК локализованы в окрестности препятствия, собственные частоты погружены в непрерывный спектр, поршневая мода $W_0 = \exp(i\lambda z)$ является обобщенной собственной функцией задачи СК, собственные частоты и функции задачи СК описывают акустические резонансные явления около препятствия в канале. В силу результатов теории самосопряженных операторов собственные функции имеют нулевую проекцию в соответствующем пространстве функций на поршневую моду, так как она является обобщенной собственной функцией. Поэтому, если собственная функция u^* задачи СК существует, то для всех значений λ она должна удовлетворять необходимому условию

$$\int_{\Omega} \exp(i\lambda z) u^*(x, y, z) d\Omega = 0.$$

Оно выполняется для всех λ тогда и только тогда, когда для всех z справедливо тождество

$$\int_D u^*(x, y, z) dx dy \equiv 0. \quad (1.5)$$

Это условие сужает пространство H_s допустимых решений задачи СК на пространство, которое является подпространством H_s ($H_0 \subset H_s$). Далее задача СК с дополнительным условием (1.5), выполненным для всех z , называется задачей СКО (собственные колебания, ортогональные поршневой моде). Непрерывный спектр σ_1 , соответствующий СКО, имеет вид $\sigma_1 = [\beta_1^2, \infty)$, поэтому собственные значения ищутся в интервале $(0, \beta_1^2)$.

2. Существование и вид собственных функций. Вид собственных функций вдали от препятствия описывается при помощи условий излучения (отсутствие уходящих волн) и условия конечности энергии. Для более полного понимания механики собственных колебаний и создания алгоритмов численного исследования необходимо знать вид собственной функции в окрестности препятствия.

Вид собственной функции в окрестности препятствия и его кромок. Для исследования вида собственных функций в окрестности кромки физическими предпосылками являются следующие: а) энергия в окрестности кромки конечна; б) кромка не излучает.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Предпосылки *a* и *b* эквивалентны и являются следствием (1.3).

Пусть существует L такое, что для всех $(x, y) \in \gamma$ справедливы $a(x, y) < -L/2$, $L/2 < b(x, y)$. Величину L можно считать характерной безразмерной длиной препятствия Z_γ . Пусть (ρ, φ, z) — цилиндрические координаты в окрестности некоторой фиксированной точки, принадлежащей кромке препятствия, где ρ — расстояние от точки на кромке препятствия, в окрестности которой исследуется вид решения, до текущей точки в плоскости (ρ, φ) ; φ — угол, измеряемый от внутренней поверхности препятствия. Прямым разложением по малому параметру ρ проверяется, что в окрестности кромки препятствия решение u^* задачи СК (или СКО) имеет вид

$$u^* = \text{const} \sqrt{\rho} \cos(\varphi/2). \quad (2.1)$$

В Ω решение u задачи СК (или СКО) можно представить в виде

$$u = u_p + u_n. \quad (2.2)$$

Здесь u_p — функция, разрывная на препятствии Z_γ ; u_n — функция, непрерывная в $\Omega \cup Z_\gamma$ (внутренности цилиндрического канала). Если $a(x, y) = \text{const}$ и $b(x, y) = \text{const}$, то задача СКО при надлежащем выборе начала координат ($x = 0$ — середина препятствия) переходит сама в себя (инвариантна) относительно замены переменных $z \rightarrow -z$. Поэтому любое решение u этой задачи можно представить в виде $u = u_s + u_a$, где $u_s(x, y, z) = u_s(x, y, -z)$, $u_a(x, y, z) = -u_a(x, y, -z)$ — симметричная (четная) и антисимметричная (нечетная) по z

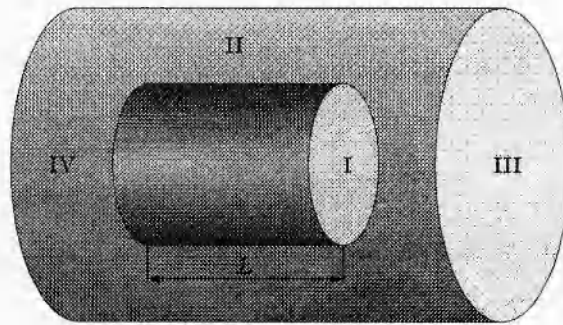


Рис. 2

составляющие u . Так как СКО линейна, то пространство H_0 всех допустимых решений этой задачи можно представить в виде прямой суммы двух пространств симметричных H_σ и антисимметричных H_α по z функций $H_0 = H_\sigma \oplus H_\alpha$. В силу линейности задача СКО разбивается на две независимые задачи для четных и нечетных по z функций. Если не оговорено иное, то дальнейшее изложение ведется для случая симметричных (четных) по z решений СКО.

Существование собственных колебаний. Для обоснования корректности математического описания собственных акустических колебаний около тонкостенного цилиндрического препятствия в канале необходимо показать, что хотя бы для некоторых геометрических параметров препятствия в цилиндрическом канале собственные колебания существуют и описываются при помощи предложенной математической модели. Для этого будет использован метод «вилки Дирихле — Неймана» [3]. Пусть дополнительно к условиям задачи СКО на дополнительных границах $\Xi = \{(x, y, z): |z| = 1/\varepsilon, (x, y, z) \in \Omega\}$ выполнены условия Дирихле (D) $u(x, y, z) = 0$ либо Неймана (N) $\partial u / \partial z = 0$. Для удобства дальнейшего изложения задача СКО с дополнительным условием (D) будет обозначаться СКО(D ε), а с условием (N) — СКО(N ε). Пусть $\lambda_{D\varepsilon}$, $u_{D\varepsilon}$ и $\lambda_{N\varepsilon}$, $u_{N\varepsilon}$ — собственные значения и собственные функции задач СКО(D ε) и СКО(N ε) соответственно. Так как условие (N) расширяет пространство допустимых решений задачи СКО, а условие (D) сужает, то для всех ε ($L/2 < 1/\varepsilon$) справедливы неравенства, которые можно получить при помощи вариационной формулировки задач [3]

$$\lambda_{N\varepsilon} \leq \lambda^* \leq \lambda_{D\varepsilon}. \quad (2.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если для ε ($1/\varepsilon > L/2$) выполнены $0 < \lambda_{N\varepsilon}$ и $0 < \lambda_{D\varepsilon} < \bar{\beta}_1$, то из (2.3) следует существование собственного значения задачи СК. Если $1/\varepsilon = L/2$, то условие (D) представляет собой «мягкое» условие излучения для колебаний в канале и кольцевом канале (области I и II соответственно на рис. 2), в этом случае $\lambda_{D\varepsilon} = \pi/L$. Следовательно, если $\pi/L < \bar{\beta}_1$, то $\lambda^* < \bar{\beta}_1$. Последнее неравенство будет выполнено, если безразмерная длина препятствия L удовлетворяет неравенству $L > \pi/\bar{\beta}_1$. Так как выполнены условия ортогональности допустимых решений задачи СКО поршневой моде (1.5), то при $\varepsilon < 2/L$ справедливо $0 < \lambda_{N\varepsilon}$. Это означает, что первое собственное значение оператора Лапласа для задачи Неймана в области $\Omega \cap \{(x, y, z): |z| < 1/\varepsilon\}$ в пространстве допустимых решений задачи СКО строго больше 0. В силу этого справедлива [1]

Теорема 2.1 (достаточное условие существования собственных колебаний около препятствия в канале). *Если безразмерная длина препятствия $L > \pi/\bar{\beta}_1$, то существуют нетривиальные собственные частоты задачи СКО.*

Данная теорема отвечает на вопрос о существовании собственных частот задачи только для достаточно больших относительных длин препятствия. Справедливо более общее

утверждение.

Теорема 2.2 (существование собственных колебаний). Если $a(x, y) \leq a_0 < b_0 \leq b(x, y)$, то собственные колебания около препятствия Z_γ в канале Z_Γ существуют.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начало координат можно выбрать так, что $a(x, y) \leq -L/2 < 0 < L/2 \leq b(x, y)$. Достаточно показать, что для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнены неравенства

$$0 < \lambda_{N\varepsilon} \leq \lambda^* \leq \lambda_{D\varepsilon} < \beta_1. \quad (2.4)$$

1. Оценка снизу. Если $1/\varepsilon > L/2$, то $0 < \lambda_{N\varepsilon}$ в силу (1.5) и связности $\Omega \cap \{(x, y, z): |z| < 1/\varepsilon\}$.

2. Оценка сверху. Пусть в (2.2) непрерывная составляющая u_n приближенной собственной функции u имеет вид $u_n = \cos(\varepsilon\pi z/2)Y_1(x, y)$ в Ω .

Разрывная на препятствии составляющая приближенной собственной функции (2.2) имеет вид

$$u_p = \begin{cases} \varkappa(S-1)(z-L/2), & (x, y) \in D_1, \\ \varkappa(z-L/2), & (x, y) \in D_2, \end{cases}$$

где \varkappa — некоторая произвольная константа; S — площадь D_1 ; площадь D предполагается равной 1. Функцию u_p можно считать определенной во всей области колебаний, если вне областей I и II считать ее равной нулю. Для всех \varkappa справедливо неравенство, отражающее вариационное свойство собственных значений [3]:

$$(\lambda_{D\varepsilon})^2 \leq \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(u_n + u_p)|^2 d\Omega_\varepsilon / \int_{\Omega_\varepsilon} |u_n + u_p|^2 d\Omega_\varepsilon = \mu^2(\varkappa, \varepsilon), \quad (2.5)$$

где $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \{(x, y, z): |z| \leq 1/\varepsilon\}$. Прямым вычислением проверяется (следствие ограниченности носителя функции u_p), что для малых ε справедливо асимптотическое представление

$$\mu^2(\varkappa, \varepsilon) \cong \beta_1^2 + A\varepsilon + B\varepsilon^2. \quad (2.6)$$

Величины A и B зависят от \varkappa . Так как ε и \varkappa независимы, то для малых ε определяющим в разложении (2.6) является A . Справедливо

$$A = LS\varkappa^2(12 - L^2\beta_1^2)(1 - S) / \left(12 \iint_D Y_1^2(x, y) dx dy\right) + \\ + \varkappa L^2\beta_1^2 \iint_D Y_1^2(x, y) dx dy / \left(2 \iint_D Y_1^2(x, y) dx dy\right).$$

Отсюда следует, что для малых \varkappa (положительных или отрицательных) $A < 0$. Поэтому для достаточно малых ε и \varkappa справедливо $\mu^2(\varkappa, \varepsilon) < \beta_1^2$. В силу (2.5) выполняются неравенства (2.4). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Метод доказательства теоремы 2.2 основан на оценке возмущения обобщенной собственной функции, вносимого препятствием. При уменьшении длины препятствия возрастает сходство собственной функции с обобщенной собственной функцией $Y_1(x, y) \exp(iz\sqrt{\lambda^2 - \beta_1^2})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Механика собственных колебаний около длинных $L > \pi/\beta_1$ и коротких $L \ll \pi/\beta_1$ препятствий Z_γ принципиально не отличается. При $L \ll \pi/\beta_1$ собственные функции не могут быть локализованы между препятствием и стенками канала или внутри препятствия. Если $S \sim 0$ (или $S \sim 1$), то при $L \rightarrow 0$ собственная функция «выдавливается» наружу из пространства между препятствием и стенкой и из «внутренности» препятствия

(малость ε). Если $L > \pi/\beta_1$, то, как следует из доказательства теоремы 2.1, собственная функция локализована внутри препятствия и между препятствием и стенкой канала.

Необходимо отметить, что в работе обсуждается поведение наименьших собственных значений, за исключением случаев, которые оговорены особо.

3. Радиальные колебания. Собственные колебания около тонкостенного круглого цилиндрического препятствия в круглом канале. Типичным в технике является тонкостенное круглое цилиндрическое препятствие в круглом канале. Пусть (r, φ, z) — цилиндрическая система координат, ось которой проходит через центр направляющих препятствия и канала, которые являются концентрическими окружностями в некоторой плоскости $z = \text{const}$. Направляющие Z_Γ и Z_γ имеют вид $\Gamma = \{(r, \varphi, z): r = 1, z = \text{const}\}$ и $\gamma = \{(r, \varphi, z): r = h, z = \text{const}\}$. Кромки Z_γ предполагаются ровными и находятся в плоскостях $z = -L/2$ и $z = L/2$, начало координат выбрано посередине канала.

Представление собственных функций. Так как задачи СК и СКО обладают поворотной симметрией с осью поворота z , то можно считать, что решения этих задач не зависят от угловой координаты φ и являются функциями только от (r, z) . Область колебаний Ω удобно разбить на подобласти: I — $\{(r, \varphi, z): r < h, -L/2 < z < L/2\}$; II — $\{(r, \varphi, z): h < r < 1, -L/2 < z < L/2\}$; III — $\{(r, \varphi, z): r < 1, z < -L/2\}$; IV — $\{(r, \varphi, z): r < 1, L/2 < z\}$ (рис. 2). Пусть u_j ($j = 1, \dots, 4$) есть сужения решения u задачи СК (или СКО) на I–IV соответственно. Общее решение задачи СК в I–IV для четных и нечетных по переменной z функций имеет вид

$$u_1(r, z) = a_0 \begin{Bmatrix} \cos(\lambda z) \\ \sin(\lambda z) \end{Bmatrix} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{r\beta_m}{h}\right) \begin{Bmatrix} \text{ch}(z\sqrt{\beta_m^2/h^2 - \lambda^2}) \\ \text{sh}(z\sqrt{\beta_m^2/h^2 - \lambda^2}) \end{Bmatrix},$$

$$u_2(r, z) = b_0 \begin{Bmatrix} \cos(\lambda z) \\ \sin(\lambda z) \end{Bmatrix} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \tilde{R}_m(r) \begin{Bmatrix} \text{ch}(z\sqrt{\sigma_m^2 - \lambda^2}) \\ \text{sh}(z\sqrt{\sigma_m^2 - \lambda^2}) \end{Bmatrix}, \quad (3.1)$$

$$u_3(r, z) = c_0 \exp(i\lambda z) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0(r\beta_k) \exp(-z\sqrt{\beta_k^2 - \lambda^2}), \quad u_4(r, z) = \begin{Bmatrix} +u_3(r, -z) \\ -u_3(r, -z) \end{Bmatrix}.$$

Функция $u_4(r, z)$ выражается через $u_3(r, z)$ при помощи условий симметрии или антисимметрии для четных и нечетных по z мод колебаний. Здесь и далее β_k^2, σ_k^2 ($k = 1, 2, \dots$) — собственные значения оператора Лапласа в областях D и D_2 (кольце) с граничными условиями Неймана, β_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) являются нулями функции $\beta J_1(\beta)$, а σ_k^2 ($k = 1, 2, \dots$) — нулями функции $J_1(\sigma)Y_1(\sigma h) - J_1(\sigma h)Y_1(\sigma)$, пронумерованными в порядке возрастания. Функции $R_m(r)$ ($m = 1, 2, \dots$) являются собственными функциями задачи Неймана для оператора Лапласа в области D_2 (кольце) и имеют вид $R_m(r) = c_m^{(1)} J_0(\sigma_m r) + c_m^{(2)} Y_0(\sigma_m r)$; $c_m^{(1)}, c_m^{(2)}$ находятся численно из условий непротекания на границах D_2 для всех σ_m . Условия (1.5) будут выполнены, если

$$c_0 = 0, \quad a_0 h^2 + b_0(1 - h^2) = 0. \quad (3.2)$$

Для того чтобы функция вида (3.1) с условиями (3.2) являлась решением задачи СКО, на границах областей I–III, I–IV, II–III и II–IV должны быть выполнены условия непрерывности решения и его нормальной производной, которые обычно называются условиями склейки или сшивания [4]. В силу симметрии задачи по z достаточно выполнения условий сшивания на границах областей I–III и II–III. Пусть G_{13} обозначает границу между I и

III, а G_{23} — границу между II и III, в пространстве переменных (r, z) это отрезки прямых. Условия склейки (сшивания) имеют вид

$$u_1 = u_3, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial z} \quad \text{на } G_{13}, \quad u_2 = u_3, \quad \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial z} \quad \text{на } G_{23}. \quad (3.3)$$

Эти условия означают, что функция вида (3.1) является слабым решением задач СК или СКО в пространстве Соболева. Для эллиптических уравнений слабое решение является сильным.

Дискретизация задачи. Приближенные собственные функции $\hat{u}(r, z)$ задачи СКО в областях I и II (окрестности препятствия) можно искать (для симметричных и антисимметричных по z функций) в приближенном виде

$$\hat{u}_1(r, z) = a_0 \begin{Bmatrix} \cos(\lambda z) \\ \sin(\lambda z) \end{Bmatrix} + \sum_{m=1}^M a_m J_0\left(\frac{r\beta_m}{h}\right) \begin{Bmatrix} \text{ch}(z\sqrt{\beta_m^2/h^2 - \lambda^2}) \\ \text{sh}(z\sqrt{\beta_m^2/h^2 - \lambda^2}) \end{Bmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\hat{u}_2(r, z) = b_0 \begin{Bmatrix} \cos(\lambda z) \\ \sin(\lambda z) \end{Bmatrix} + \sum_{m=1}^M b_m R_m(r) \begin{Bmatrix} \text{ch}(z\sqrt{\sigma_m^2 - \lambda^2}) \\ \text{sh}(z\sqrt{\sigma_m^2 - \lambda^2}) \end{Bmatrix}.$$

Это представление собственных функций содержит $(2M+2)$ неизвестных $\{a_m, b_m\}_{m=0,1,\dots,M}$. Дополнительное соотношение (3.2) уменьшает количество неизвестных на 1. Если (3.3) рассматривать как равенства рядов Фурье для функций вида (3.4) в соответствующем ортогональном базисе на интервале $G_{13} \cup G_{23}$, то они примут вид бесконечной однородной системы уравнений [4]. Используя ортогональность в области D функций Бесселя $J_0(\beta_m r)$ и $J_0(\beta_k r)$ (для $k \neq m$) и исключая c_k , соотношения (3.3) можно записать в дискретизованном виде

$$\int_0^h \left(\alpha_k \hat{u}_1 + \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial z} \right) J_0(\beta_k r) r dr + \int_h^1 \left(\alpha_k \hat{u}_2 + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial z} \right) J_0(\beta_k r) r dr = 0 \quad (z = L/2, k = 1, 2, \dots), \quad (3.5)$$

где $\alpha_k = \sqrt{\beta_k^2 - \lambda^2}$. Дискретизация задачи должна приближенно учитывать все ее свойства. Учет условия конечности энергии является специфической проблемой, характерной для задач с острыми кромками. Необходимы дополнительные условия [4], для того чтобы численное решение (3.5) учитывало условия конечности энергии (1.3). В предлагаемой работе для корректности вычислений дискретизованные соотношения (3.3) дополнялись принудительным условием конечности энергии, которое позволяет существенно повысить точность и скорость вычислений. В силу (2.1) на кромках $z = -L/2$ и $z = L/2$ препятствия Z_γ для четных и нечетных мод колебаний справедливы равенства

$$a_0 \begin{Bmatrix} \cos(\pm\lambda L/2) \\ \sin(\pm\lambda L/2) \end{Bmatrix} + \sum_{m=1}^M a_m J_0(\beta_m) \begin{Bmatrix} \text{ch}(\pm L/2\sqrt{\beta_m^2/h^2 - \lambda^2}) \\ \text{sh}(\pm L/2\sqrt{\beta_m^2/h^2 - \lambda^2}) \end{Bmatrix} = 0, \quad (3.6)$$

$$b_0 \begin{Bmatrix} \cos(\pm\lambda L/2) \\ \sin(\pm\lambda L/2) \end{Bmatrix} + \sum_{m=1}^M b_m R_m(h) \begin{Bmatrix} \text{ch}(\pm L/2\sqrt{\sigma_m^2 - \lambda^2}) \\ \text{sh}(\pm L/2\sqrt{\sigma_m^2 - \lambda^2}) \end{Bmatrix} = 0.$$

Соотношения (3.6) имеют смысл принудительного выполнения условия конечности энергии на кромках препятствия для приближенных, симметричных и антисимметричных

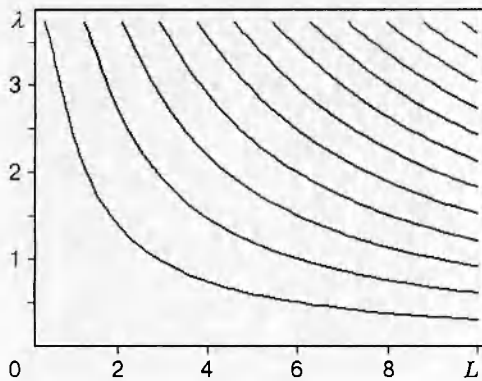


Рис. 3

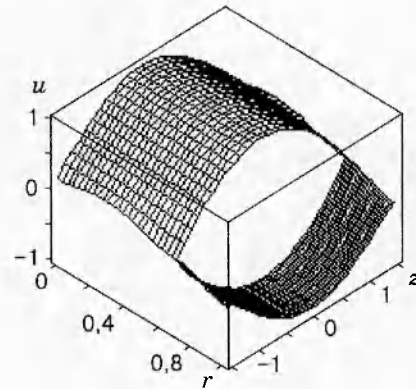


Рис. 4

по оси z собственных функций и являются добавочными при вычислениях собственных значений и функций. Соотношения (3.2), (3.6) и некоторая часть (3.5) образуют однородную систему из $(2M+2)$ уравнений для неизвестных $\{a_m, b_m\}_{m=0,1,\dots,M}$. Эта система уравнений описывает приближенные собственные функции СКО (3.4). Приближенные собственные значения задачи СКО находились из равенства нулю определителя этой системы.

Численные исследования. Вид собственных функций в окрестности препятствия исследовался численно при помощи соотношений (3.2), (3.5) и (3.6). Исследования проводились в областях $\{(r, z): 0 < r < h, -L/2 < z < L/2\}$ внутри препятствия и $\{(r, z): h < r < 1, -L/2 < z < L/2\}$ вне препятствия, в пространстве между препятствием и цилиндрическим каналом. В силу (1.5) колебания внутри препятствия и в пространстве между препятствием и стенками канала находятся в противофазе. Это означает (например, для первой моды), что если внутри препятствия имеет место фаза сжатия, то между стенками препятствия и канала — фаза разрежения.

Зависимость собственных частот от длины препятствия. Для фиксированного радиуса препятствия $h = 1/\sqrt{2}$ зависимость собственных частот от длины препятствия исследовалась численно. При сравнении данных численного исследования, приведенных на рис. 3, видно, что с увеличением длины препятствия L значения резонансных частот уменьшаются как c_N/L (c_N — некоторое число, соответствующее N -й моде). Необходимо отметить, что $\beta_1 = 3,831$ является пороговой частотой для всех мод колебаний (например, первая собственная частота ω_1 стремится к 3,831 при $L \rightarrow 0$). За исключением первой моды, определены интервалы критической длины препятствия $0 < L < L_*^{(k)}$ ($k = 2, 3, \dots$) существования k -й моды, где $L_*^{(k)} < \infty$ — некоторое максимальное (критическое) значение длины препятствия (находится численно), для которого k -я мода собственных колебаний не существует.

Вид собственных функций. Зависимость амплитуды от координат. При помощи метода принудительного учета конечности энергии произведены расчеты зависимости собственной функции от координат для $L = 3$, $h = 1/\sqrt{2}$. На рис. 4 приведена зависимость потенциала скоростей для первой (четной) моды собственных колебаний от координат. Так как потенциал скоростей для установившихся акустических колебаний соответствует акустическому полю давления, то можно считать, что на рис. 4 приведено поле акустического давления собственных колебаний. В силу ортогональности собственных колебаний поршневой моде собственная функция антисимметрична относительно препятствия, если препятствие находится посередине канала — колебания снаружи и внутри препятствия находятся в противофазе.

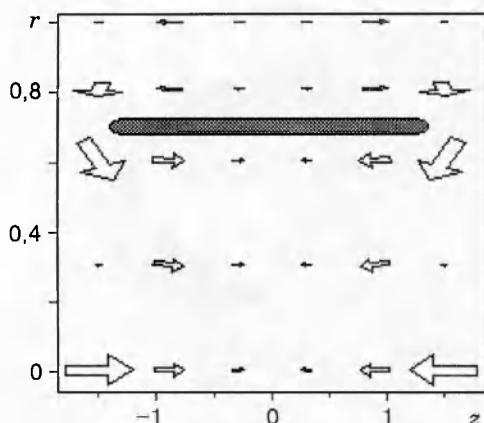


Рис. 5

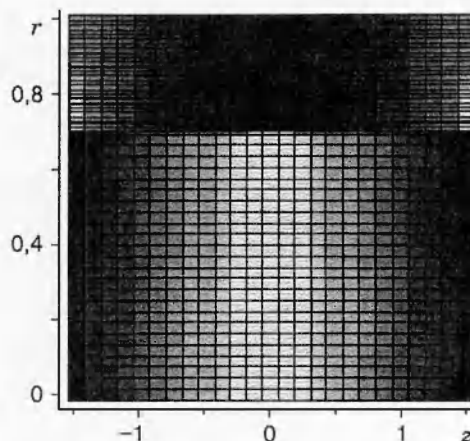


Рис. 6

Направление акустических скоростей потока. На рис. 5 изображено поле акустических скоростей около препятствия (заштрихованная часть) для первой моды собственных колебаний в фазе сжатия внутри препятствия и разрежения между препятствием и цилиндрическим каналом.

На рис. 6 показано поле давления для акустических собственных колебаний первой моды в фазе разрежения внутри препятствия и сжатия в области между препятствием и цилиндрическим каналом. Необходимо отметить, что наибольшая интенсивность колебаний первой моды наблюдается в середине препятствия.

Проведенные исследования позволяют понять механику собственных колебаний около препятствия в канале. Из рис. 5, 6 следует, что собственные колебания есть перетекание газа из области I в область II и наоборот в зависимости от фазы колебаний.

Заключение. 1. Построена и обоснована математическая модель, описывающая собственные колебания около тонкостенного цилиндрического препятствия в канале. Проведены численные исследования собственных колебаний.

2. Показано, что собственные колебания существуют для любых длин произвольного препятствия в произвольном канале.

3. Численно найдена зависимость частоты собственных колебаний от координат, поле скоростей, распределение плотности для первых двух мод собственных колебаний и механика колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сухинин С. В. Собственные колебания в открытых цилиндрических областях // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1995. Вып. 110. С. 139–152.
2. Сухинин С. В. Эффект волновода // ПМТФ. 1989. № 2. С. 92–101.
3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М.: Мир, 1982. Т. 4.
4. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.

Поступила в редакцию 5/VIII 1997 г.,
в окончательном варианте — 13/X 1997 г.