$Q\left(\alpha^-\left(\frac{1}{3}\right)\right) = Q\left(\frac{1}{3}\right)\Big|_{h_0=1/3} = 1 - \frac{4}{3}\eta - 3^{-4} > 0$ для $0 \leqslant \eta \leqslant 1/2$. Лемма доказана.

Заметим, что рассмотренная в п. 4 задача возникает при изучении обтекания решетки профилей конечной толщины потоком идеальной жидкости.

Предлагаемая модель является попыткой математического описания развития сдвиговой неустойчивости движения идеальной жидкости в длинно-волновом приближении. Условие устойчивости (1.9) приводит к гиперболичности полученной системы уравнений и позволяет надеяться на корректность постановки задачи Коши для этой системы.

Поступила 2 XII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Модели двухслойной «мелкой воды».— ПМТФ, 1979, № 2.
2. **Friedrichs K. O.** On the derivation of the shallow water theory. Appendix to «The formation of breakers and bores» by J. J. Stoker.— Comm. Pure Appl. Math., 1948, vol. 1, p. 81—85.
3. **Rosenbluth M. N., Simon A.** Necessary and sufficient condition for the stability of plane parallel inviscid flow.— Phys. Fluids, 1964, vol. 7, N 4.
4. **Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей)**. Теория звука. М., ГИТТЛ, 1955.

УДК 532.527

АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ТЭЙЛОРА — ПРАУДМЕНА В ТЕЧЕНИЯХ СО СДВИГОМ СКОРОСТИ

В. А. Владимиров

(*Новосибирск*)

Широко известен ряд свойств малых возмущений твердотельно вращающейся жидкости, которые можно квалифицировать как проявление своеобразной «упругости» потока. Такими свойствами являются волновой характер развития возмущений и явление образования «столбов Тэйлора». Последний результат называется также теоремой Тэйлора — Праудмена и состоит в том, что при медленном движении твердого тела во вращающейся жидкости течение в первом приближении оказывается двумерным (не зависит от координаты z вдоль оси вращения). Существование такой структуры течения, вначале предсказанной теоретически, было подтверждено затем в ряде экспериментов [1]. Как свойства волновых движений [1, 2], так и явления типа «столбов Тэйлора» говорят о сильной анизотропии «упругих» свойств среды. «Упругость» оказывается связанной с искривлениями вихревых линий и проявляется тем слабее, чем меньше эти искривления. Если поля возмущений являются двумерными, так что движение происходит без изгиба вихревых линий, то «упругость» вовсе не проявляется и имеется течение типа «столбов Тэйлора». Причиной этих свойств жидкости является гироскопическое поведение вращающихся жидких частиц (см. [3—5]). Основываясь на таком качественном представлении, можно ожидать, что «упругими» свойствами обладает любое устойчивое вихревое течение. Однако жидкие частицы в общем случае подвержены также и деформациям. Последние могут играть дестабилизирующую роль в потоке, уменьшая его «упругость» и даже приводя к неустойчивости [5—7]. Примеры того, как наличие деформаций изменяет свойства волнового движения в устойчивых потоках, даны в [8, 9]. Возникает вопрос: возможны ли в вихревых течениях, отличных от твердотельного вращения, явления типа «столбов Тэйлора»? Ниже построены три примера, которые показывают теоретическую возможность таких явлений. Способ доказательства в каждом случае практически повторяет доказательство теоремы Тэйлора — Праудмена. Во всех примерах рассматривается модель идеальной несжимаемой жидкости с постоянной плотностью.

1. Течения с круговыми линиями тока. Рассмотрим осесимметричное стационарное течение с круговыми линиями тока. Введем цилиндрические координаты (φ, r, z), направляя ось z по оси симметрии. Отличны от нуля только угловая компонента скорости $U = U(r)$ и осевая компонента завихренности $\Omega = dU/dr + U/r$. Пусть в этом потоке находится осесимметричное твердое тело, проекция которого на плоскость $z = \text{const}$ представляет собой кольцо $a < r < b$. Это тело с малой постоянной скоростью w_0 движется вдоль оси z. Требуется найти поле скоростей жидкости.

Предполагаем, что величина $w_0/(b-a)\Omega$ настолько мала, что поля возмущений описываются линеаризованной системой уравнений

$$\Omega v = 0, \frac{2U}{r} u = -\frac{\partial p}{\partial r}, 0 = \frac{\partial p}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1.1}$$

где u, v, w — компоненты возмущений поля скорости, соответствующие координатам φ, r, z; p — поле возмущений давления. В силу симметрии задачи поля возмущений не зависят от φ.

Стационарность достигается переходом в систему отсчета, связанную с телом. Из первого уравнения (1.1) следует $v = 0$, из второго (после дифференцирования по z) — $u = u(r)$, из уравнения непрерывности — $w = w(r)$. Определяя $w(r)$ из граничных условий, получим, что искомое поле скорости задается равенствами

$$v(r) = 0, w(r) = \begin{cases} -w_0 \text{ при } r < a, \quad r > b, \\ 0 \text{ при } a < r < b. \end{cases} \tag{1.2}$$

Функция $u(r)$ может задаваться произвольно. Случай $u(r) \neq 0$ эквивалентен изменению $U(r)$. Таким образом, показано, что, как и в случае твердотельно вращающегося потока [1], медленно движущееся тело «проталкивает» целый столб жидкости. Отметим, что поля возмущений не затухают при $z \to +\infty$. Если потребовать такого затухания, то решение будет нестационарным и будет соответствовать движению с излучением волн. Для случая твердотельного вращения показано [1], что такие нестационарные режимы при $t \to \infty$ стремятся к решениям со «столбами Тэйлора». Тангенциальные разрывы при $r = a$, $r = b$ в (1.2) относятся к тому же типу, что и инерциальные пограничные слои [1]. Случай кругового потока является прямым обобщением твердотельного вращения жидкости, поэтому наличие результата, похожего на теорему Тэйлора — Праудмена, здесь кажется естественным.

2. Плоскопараллельное течение. Более неожиданным является то, что аналогичные результаты можно получить и для плоскопараллельного потока. Рассмотрим такой поток. Введем декартовы координаты x, y, z так, что ось x направлена вдоль потока, единственная ненулевая x-компонента скорости зависит только от y : $U = U(y)$. Пусть в этом потоке находится цилиндрическое тело такое, что образующая цилиндра параллельна оси x. Это тело с малой постоянной скоростью w_0 движется вдоль оси z. Требуется найти поле скоростей жидкости.

Рассуждения проводятся по той же схеме, что и в предыдущем примере. В силу симметрии задачи поля возмущений не зависят от x. Линеаризованные уравнения движения дают

$$U'v = 0, \ \partial p/\partial y = 0, \ \partial p/\partial z = 0, \ \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0.$$

Здесь u, v, w — компоненты поля возмущений скорости, соответствующие координатам x, y, z. Из первого уравнения следует $v = 0$, из второго и третьего — $p = 0$, из четвертого — $w = w(y)$. Пусть проекция тела на плоскость (x, y) представляет собой полосу $a < y < b$. Удовлетворяя граничным условиям, получаем, что поле скорости (в системе координат, связанной с цилиндром) задается в виде

$$v(y) = 0, \; w(y) = \begin{cases} -w_0 & \text{при } y < a, \, y > b, \\ 0 & \text{при } a < y < b. \end{cases}$$

Функция $u(y, z)$ может задаваться произвольно.

Таким образом, в задаче поле скоростей необходимо является двумерным, так что тело при своем движении «проталкивает» целый слой жидкости $a < y < b$.

3. Осесимметричное течение с прямолинейными линиями тока. В примерах 1 и 2 вихревые линии основного течения были прямолинейными. В этом примере показано, что похожие результаты можно получить и для течений с криволинейными вихревыми линиями.

Рассмотрим осесимметричный поток с прямолинейными линиями тока (например, течение в трубе). Пусть z — ось симметрии течения. В цилиндрической системе координат (φ, r, z) отлична от нуля только z-компонента скорости потока $W = W(r)$. В этом потоке находится твердая полоска ($a < r < b$, $\varphi = \varphi_0$, $-\infty < z < +\infty$), которая медленно вращается вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω_0, так что $\varphi_0 = \omega_0 t$. Требуется найти поле скоростей, соответствующее такой задаче обтекания.

Во вращающейся со скоростью ω_0 системе координат поля возмущений не зависят от z и t. После линеаризации уравнений движения, записанных в этой системе, способом, аналогичным применявшимся, получаем условия $v = 0$, $u = u(r)$; $w = w(r, \varphi)$ может задаваться произвольно. Обозначения для компонент возмущений скорости те же, что в примере 1. Удовлетворяя граничным условиям, получаем, что вместе с полоской твердотельно вращается цилиндрический объем жидкости $a < r < b$ (кольцо).

Отметим, что во всех примерах ничего не говорилось об устойчивости потоков. Задачи об устойчивости перечисленных течений идеальной жидкости являются сложными и еще во многом не решенными [5, 10, 11].

Построенные примеры иллюстрируют единство гироскопических свойств вихревых потоков и условия, при которых эти свойства даже при наличии сдвиговых слоев могут порождать явления, сходные со «столбами Тэйлора».

В реальной вязкой жидкости наличие сдвиговых слоев в потоке вместе с условиями прилипания на границах тела будет вносить дополнительные возмущения в поток. Поэтому экспериментальная реализация рассмотренных течений связана со значительными трудностями.

Математическая формулировка полученных результатов такова. В перечисленных примерах в линейном приближении не существует гладких стационарных решений задач обтекания. Решения здесь разрывны и относятся к типу «столбов Тэйлора».

Поступила 15 X 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гринспен Х.** Теория вращающихся жидкостей. Л., Гидрометеоиздат, 1975.
2. **Phillips O. M.** Energy transfer in rotating fluids by reflection of inertial waves.— Phys. Fluids, 1963, vol. 6, N 3.
3. **Во Хонг Ань, Тверской Б. А.** О влиянии вращения на турбулизацию плоских потоков.— ДАН СССР, 1965, т. 161, № 5.
4. **Владимиров В. А., Тарасов В. Ф.** Структура турбулентности вблизи ядра вихревого кольца.— ДАН СССР, 1979, т. 245, № 6.
5. **Владимиров В. А.** Устойчивость течения типа смерча.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 37. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1978.
6. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М., Наука, 1965.

7. **Дикий Л. А.** Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л., Гидрометеоиздат, 1976.
8. **Филлипс О. М.** Динамика верхнего слоя океана. М., Мир, 1969.
9. **Moffatt H. K.** The interaction of turbulence with strong wind shear.— В кн.: Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн. М., Наука, 1967.
10. **Владимиров В. А.** Устойчивость течений идеальной жидкости с круговыми линиями тока.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 42. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1979.
11. **Шноль Э. Э.** О неустойчивости плоскопараллельных течений идеальной жидкости.— ПММ, 1974, т. 38, № 3.

УДК 532.526.013.4

О ГЕНЕРАЦИИ ВОЛН НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ВНЕШНЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

В. Н. Жигулев, Н. В. Сидоренко, А. М. Тумин

(*Москва*)

В настоящее время в результате многочисленных экспериментальных и теоретических исследований достаточно четко сформулированы принципы расчета критических чисел Рейнольдса перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный на основе линейной теории гидродинамической устойчивости. Возможность применения линейной теории для определения «точки перехода» обусловлена тем, что при достаточно малых амплитудах возмущений, присутствующих в потоке, переход начинается с развития так называемых волн Толмина — Шлихтинга, которые описываются линеаризованными уравнениями гидродинамики. При этом значительная часть области перехода приходится именно на волны Толмина — Шлихтинга, а область нелинейного развития возмущений сравнительно мала [1]. Поэтому с достаточно хорошей точностью эволюцию возмущений в пограничном слое можно описать на основе линейной теории и приближенно определить критическое число Рейнольдса перехода по сечению, в котором возмущение впервые достигает порогового значения безразмерной амплитуды $\varepsilon_* \sim 1\%$, начиная с которой наступает сильно нелинейная область развития [1]. Однако основной проблемой в разработке соответствующей методики расчета на сегодняшний день является проблема преобразования возмущений, имеющихся в условиях эксперимента, в волны Толмина — Шлихтинга. В работе [2] предполагаются следующие возможные механизмы возбуждения волн Толмина — Шлихтинга в пограничном слое: а) непрерывная генерация по всей протяженности пограничного слоя; б) генерация в окрестности передней кромки модели; в) генерация в развитом пограничном слое путем сосредоточенного воздействия.

Наиболее изученным в настоящее время является механизм генерации волн Толмина — Шлихтинга в окрестности передней кромки модели. Однако по мере их распространения вниз по потоку до точки потери устойчивости они могут сильно затухнуть, и тем самым их влияние на переход пограничного слоя будет несущественным. Для таких моделей на первый план выходит механизм генерации по всей протяженности пограничного слоя. В работе [3] был проведен анализ взаимодействия вихревой дорожки малой интенсивности с несжимаемым пограничным слоем на плоской пластине в предположении о параллельности основного течения. Результат показал, что рассмотренные возмущения слабо проникают в пограничный слой и генерация волн Толмина — Шлихтинга отсутствует. В данной работе проведен анализ задачи, поставленной в [3] с учетом слабой непараллельности течения в пограничном слое. Показано, что имеет место взаимодействие вихревых возмущений в набегающем потоке с волнами Толмина — Шлихтинга, и получены аналитические соотношения для определения интенсивности источников волн Толмина — Шлихтинга.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о развитии возмущений в несжимаемом пограничном слое на плоской пластине в рамках линеаризованных уравнений Навье — Стокса. При этом граничные условия будут следующие: при $y = 0$ (на поверхности пластины) выполнены условия прилипания; при $x = x_0$ (в некотором сечении на расстоянии x_0 от перед-