

**ПРИМЕНЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ
УРАВНЕНИЙ «МЕЛКОЙ ВОДЫ»
К ОБЪЯСНЕНИЮ ПРОСТЕЙШИХ ТЕЧЕНИЙ**

Б. Л. Рождественский
(Москва)

Стационарные решения дифференциальных уравнений теории «мелкой воды» с осевой симметрией задаются следствиями этих уравнений

$$(1) \quad rhu = Q = Q_0/2\pi\rho = \text{const};$$

$$(2) \quad rv = D = \text{const};$$

$$(3) \quad \frac{u^2 + v^2}{2} + gh = C = \text{const},$$

где $h = h(r)$ — высота слоя несжимаемой жидкости плотности ρ ; $u = u(r)$, $v = v(r)$ — соответственно радиальная и окружная компоненты вектора скорости жидкости, которая в приближении «мелкой воды» считается постоянной по вертикали во всем слое $0 \leq z \leq h(r)$; g — ускорение силы тяжести; Q_0 — расход жидкости через любое сечение $r = \text{const} \geq r_0$.

Из уравнений (1) — (3) имеем соотношение

$$(4) \quad \frac{Q^2}{2r^2} = \frac{h^2(C - gh)}{1 + \kappa^2 h^2} = \varphi(h, C, \kappa), \quad \kappa = D/Q,$$

неявно определяющее зависимость $h = h(r)$ при известных Q, C, D .

На фиг. 1 приведены графики функции $\varphi(h, C, \kappa)$ при $\kappa = 0$ и $\kappa = 1$.

Из уравнения (4) очевиден способ графического определения зависимости $h = h(r)$, а из фиг. 1 ясно также, что стационарное осесимметрическое решение уравнений «мелкой воды» существует лишь при

$$r > r_*(Q, C, \kappa) > r_*(Q, C, 0) = (\sqrt{27/8})gQC^{-3/2}.$$

При этом (4) задает два решения, отвечающих двум различным режимам течения жидкости.

Первый режим течения отвечает зависимости $h = h(r)$, определяемой из (4) при $0 < h < h_*(C, \kappa)$, второй — при $h_*(C, \kappa) < h < C/g$. Здесь через $h_*(C, \kappa)$ обозначено значение h , при котором $\varphi(h, C, \kappa)$ достигает максимума. Можно видеть, что при $\kappa \neq 0$

$$h_*(C, \kappa) < h(C, 0) = 2C/3g.$$

Первый режим является сверхкритическим, так как выполнено условие $|u| > c = \sqrt{gh}$, второй — докритическим.

В первом режиме течения имеем асимптотику при $r \rightarrow \infty$

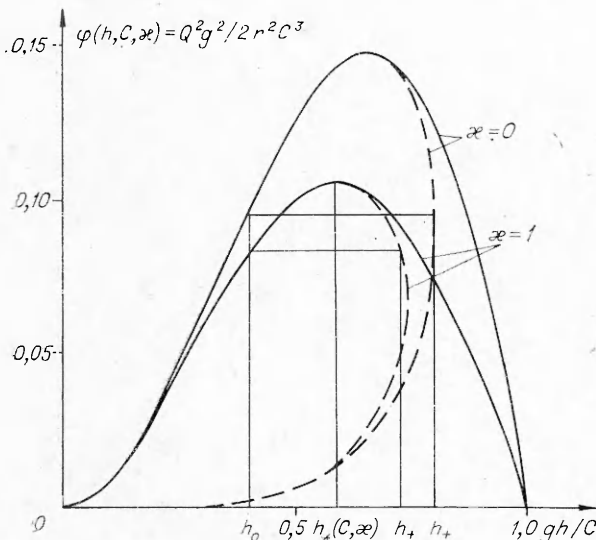
$$(5) \quad h(r) \simeq \frac{|Q|}{\sqrt{2C}} \frac{1}{r}, \quad u(r) \simeq \text{sgn } Q \cdot \sqrt{2C}.$$

Во втором режиме, наоборот, уровень $h(r)$ жидкости повышается с ростом r и при $r \rightarrow \infty$

$$(6) \quad h(r) \rightarrow C/g, \quad u(r) \simeq Qg/Cr.$$

Из уравнений (1) — (4) решение определяется однозначно заданием $h(r)$, $u(r)$, $v(r)$ в какой-либо точке $r = r_0$, так как эти условия определяют принадлежность зависимости $h = h(r)$ одной из двух ветвей кривой (4).

Решения системы законов сохранения, положенных в основу теории «мелкой воды», могут иметь разрыв — «прыжок воды». В случае стационарных осесимметричных течений они располагаются на линии $r = \text{const}$.



Ф и г. 1

Очевидно, что величина расхода Q_0 жидкости и тангенциальная компонента DQ_0/r импульса непрерывны на разрыве. Это означает, что соотношения (1), (2) выполнены и в разрывных решениях и, в частности, что величина κ постоянна во всем течении.

Третье условие, которое необходимо поставить на разрыве, не столь очевидно и в принципе может зависеть от условий задачи. При решении этого вопроса следует принять во внимание сущность приближения «мелкой воды», которое за-

меняет распределение импульса по вертикали его средним значением и пренебрегает потерей импульса за счет трения жидкости о дно. По существу, скачок уровня жидкости при горизонтальном дне означает, что в этом месте трение о дно инициирует возникновение зоны преобразования потока, в которой внутреннее трение жидкости тормозит верхние слои жидкости, создавая при этом повышение уровня жидкости.

Наиболее естественным и сравнительно точным в рамках теории «мелкой воды» можно считать предположение о сохранении полного импульса слоя жидкости на разрыве. Поэтому будем требовать непрерывности на разрыве радиальной компоненты тензора потока импульса, т. е. непрерывности величины

$$j = \rho \left(\frac{g}{2} h^2 + hu^2 \right).$$

Отметим, что непрерывность величины j на скачке противоречит условию (3) и поэтому величина C терпит разрыв на скачке. Пусть $h_0 < h_*(C, \kappa)$ и h_+ — значения высоты уровня жидкости по разные стороны разрыва, расположенного на окружности радиуса r , при этом h_0 — вверх по течению.

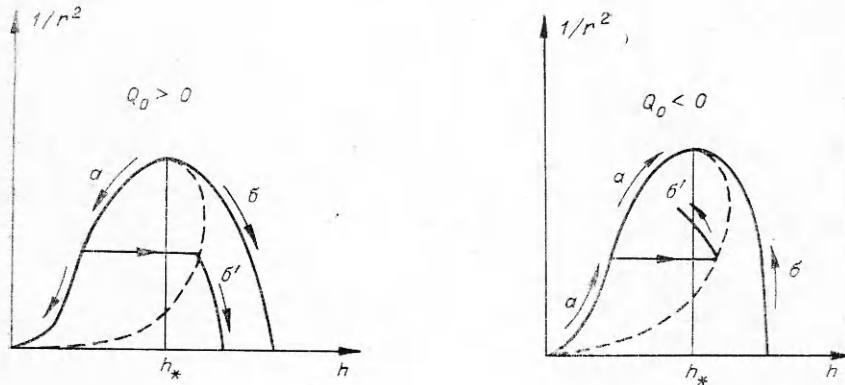
Тогда условие непрерывности потока импульса приводит к уравнению

$$\frac{g}{2} h_+^2 + \frac{2\varphi(h_0, C, \kappa)}{h_+} = \frac{g}{2} h_0^2 + \frac{2\varphi(h_0, C, \kappa)}{h_0},$$

которое с учетом (1), (2) легко решается. Получаем формулы

$$\frac{h_+}{h_0} = K = \frac{\sqrt{1+8\alpha}-1}{2}, \quad \alpha = \frac{2\varphi(h_0, C, \kappa)}{h_0^3 g} = \frac{2\left(\frac{C}{gh}-1\right)}{1+\kappa^2 h_0^2}.$$

Устойчивым скачком является лишь переход в направлении течения из сверхкритической зоны (до скачка) в докритическую зону (после скачка). Поэтому надо полагать, что $h_0 < h_*(C, \kappa)$, что приводит к условиям $\alpha > 1$,



Ф и г. 2

$K > 1, h_+ > h_0$. Таким образом, каждому $h_0 = h(r) < h_*(C, \kappa)$ соответствует значение уровня жидкости $h_+ = h_+(r)$, множество точек $\{h_+(r), Q^2 g^2 / 2C^3 r^2\}$ образует кривую ударного перехода из сверхкритической зоны течения в докритическую. На фиг. 1 изображены штриховыми линиями две такие кривые, соответствующие случаям $\kappa = 0$ и $\kappa = 1$.

Таким образом, задача о растекании жидкости по горизонтальной плоскости с заданными $h(r_0), u(r_0), v(r_0)$ имеет в рамках теории «мелкой воды» бесчисленное множество решений — одно непрерывное и бесчисленное множество разрывных (разрыв может быть поставлен в любой точке $r > r_0$) при $h(r_0) < h_*(C, \kappa)$.

В случае $h(r_0) > h_*(C, \kappa)$ решение единственно. На фиг. 2 схематически показаны возможные типы решения (и течения), стрелка указывает перемещение точки при движении вниз по течению.

Таким образом, теория «мелкой воды» не может однозначно определить картину течения при $h(r_0) < h_*(C, \kappa)$ и требуются дополнительные соображения для ее уточнения.

С этой целью рассмотрим условия применимости приближения «мелкой воды» в нашей задаче, считая, что жидкость обладает малой вязкостью.

Для применимости приближения «мелкой воды» необходимо, чтобы полный напор $gh^2/2 + hu^2$ слоя жидкости существенно превышал вязкие напряжения, которые оценим как $|vh\partial u/\partial z| \sim \nu|u|$, где ν — коэффициент кинематической вязкости.

Итак, имеем условие применимости

$$gh^2/2 + hu^2 \gg \nu|u|,$$

или

$$\frac{h|u|}{\nu} + \frac{h|u|gh^2}{\nu u^2} = \text{Re} \left(1 + \frac{1}{\text{Fr}} \right) \gg 1,$$

где $Re = h|u|/\nu = |Q|/rv$ — число Рейнольдса; $Fr = u^2/gh$ — число Фруда.

Учитывая асимптотическое поведение решений (5), (6) при $r \rightarrow \infty$, заключаем, что

$$Re \rightarrow 0, Fr \rightarrow \infty, E = Re(1 + 1/Fr) \rightarrow 0$$

в случае сверхкритического потока ($h(r_0) < h_*(C, \kappa)$) и

$$Re \rightarrow 0, Fr \rightarrow 0, E = Re(1 + 1/Fr) \rightarrow \infty \text{ при } r \rightarrow \infty$$

в случае докритического потока ($h(r_0) > h_*(C, \kappa)$). Поэтому ясно, что условия применимости этого приближения с ростом r улучшаются для докритического потока и ухудшаются для сверхкритического потока. Следовательно, сверхкритический поток не реализуется при всех $r > r_0$ и можно предположить, что течение скачком переходит из сверхкритического режима в докритический режим именно в той точке r , в которой нарушаются условия применимости теории «мелкой воды», т. е. там, где действие вязкости существенно и величина E становится достаточно малой

$$(7) \quad E = Re(1 + 1/Fr) = E_*.$$

Величина E_* в рамках такой модели должна быть универсальной и не зависеть от расхода Q_0 , начальных условий и от конкретной жидкости. Величина E_* должна быть определена из опыта или из более общей модели. Условие (7) при известном E_* определяет $h_0 < h_*(C, \kappa)$ и координату r скачка, где происходит смена режима течения.

Эта простая модель неплохо объясняет качественные и количественные характеристики двух простейших течений: растекание по горизонтальной плоскости жидкости, подаваемой источником с постоянным расходом $Q_0 > 0$, и слив жидкости, лежащей на бесконечной горизонтальной плоскости, через круглое отверстие.

Первая задача иллюстрируется привычным растеканием воды по горизонтальному дну раковины при падении на нее струи воды из крана; более точная иллюстрация получается при замене раковины горизонтально поставленной плоской гладкой поверхностью из стекла, металла, плексигласа и т. п. сравнительно небольшого размера ($\sim 30 \times 30$ см). Вторая задача ассоциируется с конечным этапом процесса слива воды из ванны через круглое сливное отверстие.

Имея в виду первую задачу, естественно положить $\kappa = 0$. Видно, что при $Q_0 > 0$ возможны два режима, указанные на фиг. 2; режим b и режим $a \rightarrow b'$ с прыжком воды в точке r , определенной из условия (7). Оба режима осуществляются на практике, однако при падении струи даже с небольшой высоты осуществляется вторая возможность, с образованием прыжка.

В этом случае $Fr > 1$ (так как $h(r_0) < h_*$) и $Fr \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Прыжок воды происходит при достаточно малых h_0 и больших r , так что величиной $1/Fr$ в (7), по-видимому, можно пренебречь. Тогда из (7) имеем

$$(8) \quad Re = Re_* = Q_0/2\pi r\nu = Q_0/2\pi\eta r.$$

Простейшие измерения в домашних условиях приводят к выводу, что $Re_* = E_* \simeq 150$. Если это число принять за Re_* , то формула (8) весьма неплохо выполняется при варьировании различных параметров задачи: расхода Q_0 , высоты падения струи (величины C).

В задаче о сливе условия устойчивости в рамках теории «мелкой воды» также допускали два режима: b и $a \rightarrow b'$ (см. фиг. 2, $Q_0 < 0$). Однако последний режим следует признать нереальным, так как теория «мелкой

воды» применяется в режиме *a* при $r \rightarrow \infty$, где $E \rightarrow 0$. Таким образом, при $Q_0 < 0$ остается один единственный режим слива *b*. При заданной высоте h слоя жидкости на бесконечности расход жидкости $Q_0 < 0$ через любое сечение $r = r_0$ ограничен $|Q_0| < r_0 h \sqrt{\frac{8}{27} gh} \cdot 2\pi r_0$. При $h \rightarrow 0$ максимальный расход через отверстие радиуса r_0 стремится к нулю и станет меньше безнапорного расхода сливного отверстия. В этом случае произойдет прорыв поверхности воды в середине сливного отверстия.

Что касается обычно возникающего при этом закручивания жидкости, то оно объясняется, по нашему мнению, несимметрией реальных условий задачи, а также уменьшением расхода через отверстие при закручивании жидкости. Эта задача изучалась как теоретически, так и экспериментально. В работе [1] построена весьма сложная модель течения, которая тем не менее дает не очень хорошее совпадение с результатами экспериментов [2].

Поступила 28 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Watson E. J. The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane.— *J. Fluid Mech.*, 1964, vol. 20, N 3, p. 481—501.
- . Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Троян Е. Н., Алексеев С. В. Течение тонких пленок жидкости.— В кн.: Волновые процессы в двухфазных системах. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1975.

УДК 532.529.6

О ДВИЖЕНИИ КОНЕЧНОЙ МАССЫ ЖИДКОСТИ

В. К. Андреев, В. В. Пухначев

(Красноярск, Новосибирск)

В работе рассматриваются качественные свойства неустановившегося движения конечного объема жидкости, целиком ограниченного свободной поверхностью. Движение возникает из заданного начального состояния. Внешние массовые силы — известные функции координат и времени. Жидкость может быть вязкой или идеальной, обладающей поверхностным натяжением или лишенной его.

1. Постановка задачи. Задача о движении конечной массы жидкости сводится к отысканию области $\Omega_t \in R^3$ и решения $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t), v_3(\mathbf{x}, t))$, $p(\mathbf{x}, t)$ системы уравнений Навье—Стокса

$$(1.1) \quad \mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

в этой области так, чтобы на границе Γ_t области Ω_t выполнялись краевые условия

$$(1.2) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_t} = V_n \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Gamma_t;$$

$$(1.3) \quad p \mathbf{n}_{\Gamma_t} - 2\nu D \mathbf{n}_{\Gamma_t} = 2\sigma H \mathbf{n}_{\Gamma_t} \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Gamma_t,$$