

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ
ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ НА ОСНОВЕ
ОПТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

С. М. Белоцерковский, В. С. Сухоруких, В. С. Татаренчик

(Москва)

Приводятся некоторые результаты исследования пространственных газодинамических течений посредством оптических методов. Непосредственно определяются интегральные значения плотности, а местные значения находятся из интегральных уравнений. В этих уравнениях плотность представляет собой функцию трех пространственных координат. Одна из координат играет роль параметра. Если от плотности, как функции двух координат, удастся перейти тем или иным путем к зависимости от одной переменной, то рассматриваемые соотношения окажутся обычными интегральными уравнениями. Такой переход очевиден в случае плоского и осесимметричного распределения плотности.

По указанной причине в экспериментальной газовой динамике оптические методы до настоящего времени применялись только для изучения плоских и осесимметричных течений [1]. Авторами предложен способ исследований пространственных газодинамических течений на основе количественных оптических методов [2]. Его сущность заключается в следующем.

На основании предварительной информации выбираются аппроксимирующие функции, описывающие поле плотностей, в том числе и форму поверхности скачка. Для определения аппроксимирующих функций используются результаты интерференционных или теневых измерений, полученные при различных направлениях хода световых лучей через газовый поток. Необходимое количество направлений зависит от вида исследуемого течения и устанавливается в процессе исследований.

Обозначения

ρ_0 — плотность газа при нормальных условиях,	α — угол атаки,
n_0 — показатель преломления газа при нормальных условиях,	ω_k — угол полраствора конуса,
ρ_∞ — плотность газа в невозмущенном потоке,	λ — длина волны света,
p — давление на поверхности тела,	λ_{\max} — длина волны света в максимуме пропускания интерференционного светофильтра,
p_∞ — давление невозмущенного потока,	$\Delta\lambda$ — полуширина полосы пропускания интерференционного светофильтра.
M — число Маха,	

§ 1. Основные соотношения. На фиг. 1 изображено одно из сечений исследуемого газового потока. Возмущенная область заключена между контуром тела (1) и внешней границей (2). В сверхзвуковых течениях этой внешней границей является головная ударная волна. Скорость невозмущенного потока перпендикулярна плоскости чертежа, а падающие лучи параллельны ей.

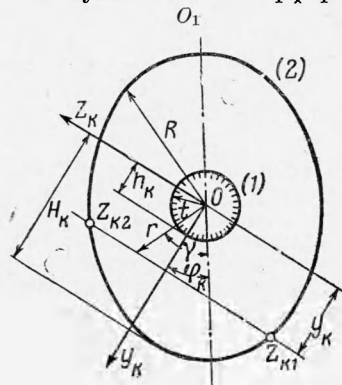
Введем прямоугольную систему координат $Ox y_k z_k$, ось x которой направлена по скорости невозмущенного потока, ось z_k — вдоль падающих лучей. Через φ_k обозначим угол между некоторой фиксированной плоскостью OO_1 и осью y_k . При данном направлении просвечивания получают экспериментальные данные, соответствующие углам φ_k и $\varphi_k + \pi$, так как изменение хода лучей на обратный не меняет результата. Эти данные различны, если ось z_k не совпадает с плоскостью симметрии.

Контур тела в рассматриваемом сечении $x = \text{const}$ описывается уравнением $t = t(\gamma)$, контур внешней границы — уравнением $R = R(\gamma)$.

Текущая точка задается координатами r и γ . Через h_k и H_k обозначены максимальные значения координаты y_k на контуре тела и внешней границе.

Рассмотрим некоторый луч, входящий в возмущенную область в точке с координатами y_k, z_{k1} . Пренебрегая искривлением луча, принимаем за его путь в возмущенной области хорду $y_k = \text{const}$. Точка выхода луча из возмущенной области имеет координаты y_k, z_{k2} .

Результатами интерференционных измерений будут распределения функций $m_k(x, y_k)$, выражающих изменение оптической длины пути света, прошедшего через возмущенную область. Функции m_k связаны с распределением плотности вдоль светового луча соотношением



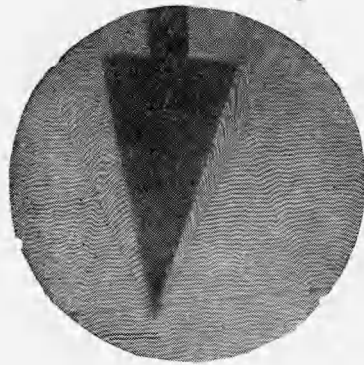
Фиг. 1

$$\int_{z_{k1}}^{z_{k2}} (\rho^* - 1) dz_k = \varepsilon_k m_k(y_k)$$

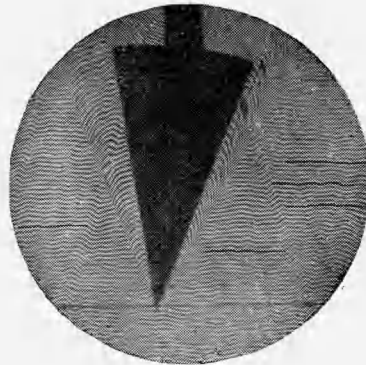
$$\left(\rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad \varepsilon_k = \frac{\rho_0 \lambda}{\rho_\infty (n_0 - 1)} \right) \quad (1.1)$$

Здесь λ — длина волны света; ρ_0, n_0 — плотность и показатель преломления газа при нормальных условиях; ρ_∞ — плотность в невозмущенном потоке.

Результатом теневых измерений будут изменения $\Delta(dx/dz_k)$ и $\Delta(dy_k/dz_k)$ направлений световых лучей, прошедших через возмущен-



Фиг. 2



Фиг. 3

ную область. Эти величины следующим образом связаны с распределением составляющих градиента плотности вдоль светового луча

$$\int_{z_{k1}}^{z_{k2}} \frac{\partial \rho^*}{\partial x} dz_k = (\mu_k + \rho_2^*) \Delta \left(\frac{dx}{dz_k} \right) + \left(\frac{dx}{dz_k} \right)_1 (\rho_2^* - \rho_1^*)$$

$$\int_{z_{k1}}^{z_{k2}} \frac{\partial \rho^*}{\partial y_k} dz_k = (\mu_k + \rho_2^*) \Delta \left(\frac{dy_k}{dz_k} \right) + \left(\frac{dy_k}{dz_k} \right)_1 (\rho_2^* - \rho_1^*) \quad (1.2)$$

$$\int_{z_{k1}}^{z_{k2}} \frac{\partial \rho^*}{\partial z_k} dz_k = \rho_2^* - \rho_1^* \quad \left(\mu_k = \frac{\rho_0}{\rho_\infty (n_0 - 1)} \right)$$

Здесь ρ_1^*, ρ_2^* — значения ρ^* в точках входа и выхода луча из области.

§ 2. Решение интегральных уравнений. Перейдем к цилиндрической системе координат с тем же направлением оси x и полярными координатами r, γ в плоскости $x = \text{const}$.

Плотность в сечении $x = \text{const}$ рассматривается как функция полярного угла γ и безразмерной радиальной координаты

$$\xi = \frac{r-t}{R-t} \quad (2.1)$$

На поверхности тела $\xi = 0$, на границе возмущенной области $\xi = 1$. Для определенности положим, что OO_1 есть плоскость симметрии течения.

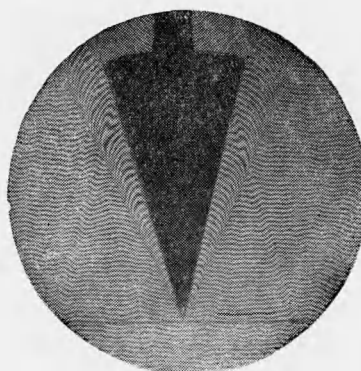
Периодическую непрерывную зависимость плотности от угла представим в следующем виде:

$$\rho(\xi, \gamma) = \sum_{m=0}^{q_p-1} \rho_m(\xi) \cos^m \gamma \quad (2.2)$$

Контуры внешней границы возмущенной области и тела в сечении $x = \text{const}$ аппроксимируются выражениями того же типа

$$R(\gamma) = \sum_{m=0}^{q_R-1} R_m \cos^m \gamma \quad (2.3)$$

$$t(\gamma) = \sum_{m=0}^{q_t-1} t_m \cos^m \gamma$$



Фиг. 4

где R_m и t_m — коэффициенты, определяемые по данным измерений H_k и h_k .

Наивысшая степень полиномов (2.2) и (2.3) выбирается в соответствии с ожидаемым характером аппроксимируемых функций; в процессе обработки эти числа могут быть изменены и уточнены.

Обозначим через q число различных измерений, определяемых углами φ_k . Если ось z_k не совпадает с плоскостью симметрии течения, то

$$q = 2u$$

где u — число направлений просвечивания. При совпадении одного из направлений просвечивания с плоскостью симметрии

$$q = 2u - 1$$

Число q должно быть не меньше наибольшего из чисел q_p, q_R, q_t . Подстановка разложений (2.2) и (2.3) в соотношения (1.1) и (1.2) приводит к системам интегральных уравнений относительно функций $\rho_m(\xi)$ или их производных.

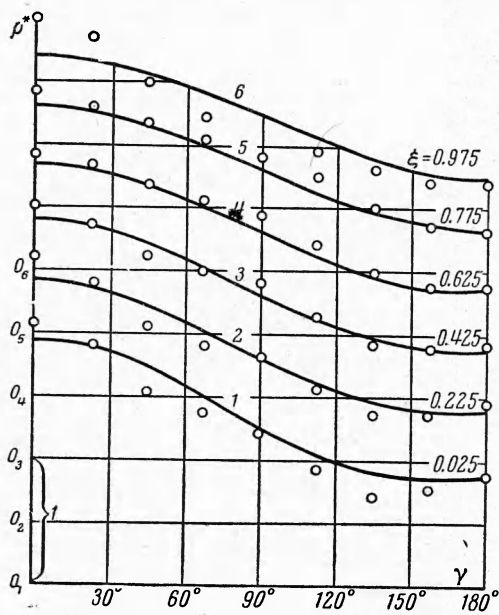
Для интерференционного метода при $q = q_p$ имеем

$$\sum_{m=0}^{q_p-1} \int_{z_{k1}}^{z_{k2}} \rho_m(\xi) \cos^m \gamma dz_k = z_{k2} - z_{k1} + \varepsilon_k m_k(\xi) \quad (2.4)$$

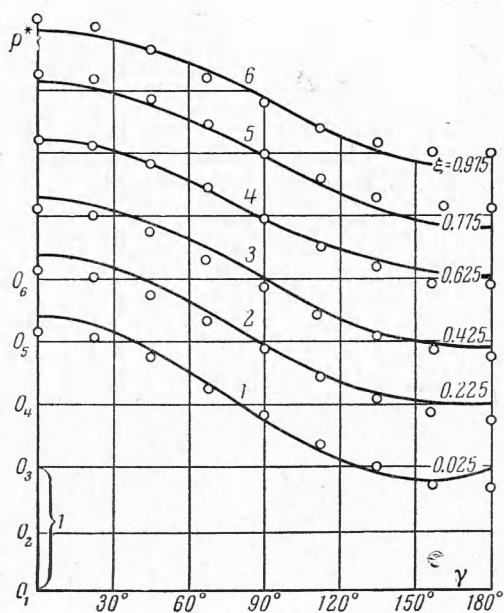
$$\xi = \frac{y_k - h_k}{H_k - h_k} \quad (k = 1, 2, \dots, q)$$

Система интегральных уравнений (2.4) решается численно, путем разбиения диапазона $0 \leq \xi \leq 1$ точками деления ξ_i на N малых интервалов, в пределах которых функции $\rho_m(\xi)$ заменяются постоянными величинами ρ_{mi} .

В результате этого система интегральных уравнений превращается в систему линейных уравнений относительно неизвестных ρ_{ms}



Фиг. 5



Фиг. 6

получения фотографий в монохроматическом свете применялся интерференционный светофильтр ($\lambda_{\text{max}} = 644 \text{ м.к.к.}$, $\Delta\lambda = 5 \text{ м.к.к.}$).

Эксперимент проводился при трех и пяти значениях угла φ_k ($q = 3$ и $q = 5$). Изменение угла φ_k осуществлялось путем поворота модели вокруг оси, параллельной ско-

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{q-1} a_{ms}^{ks} \rho_{ms} &= \\ &= \Phi_{ks} - \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{m=0}^{q-1} a_{mi}^{ks} \rho_{mi} \\ &\quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, q \\ s = 1, 2, \dots, N \end{array} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь s — наибольший из номеров i для $y_k = \text{const}$.

При $q > q_p$ система (2.5) в соответствии с методом наименьших квадратов принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{q_p-1} \rho_{ms} \left(\sum_{k=1}^q a_{ms}^{ks} a_{ns}^{ks} \right) &= \\ &= \sum_{k=1}^q \Phi_{ks} a_{ns}^{ks} - \\ &- \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{m=0}^{q_p-1} \rho_{mi} \left(\sum_{k=1}^q a_{mi}^{ks} a_{ns}^{ks} \right) \\ &\quad (n = 0, 1, \dots, q_p - 1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Вычисления выполнялись на ЭЦВМ. Детали вычислений здесь не рассматриваются.

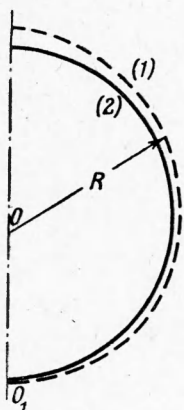
§ 3. *Примеры.* Приводятся результаты определения поля плотностей около конуса с углом полураствора ω равном 15° при угле атаки $\alpha = -7.5^\circ$ и значениях числа $M = 3.5$ и $M = 4.2$.

Экспериментальная часть работы выполнялась на четырехзеркальном интерферометре Маха — Цендера с полем зрения 225 мм. В качестве источника света использовался искровой разряд между кадмиевыми электродами. Интерференционные картины фотографировались одновременно в белом и в монохроматическом свете. Фотографии в белом свете использовались для измерения целой части изменения оптической длины пути, выраженной в длине волны света. Для

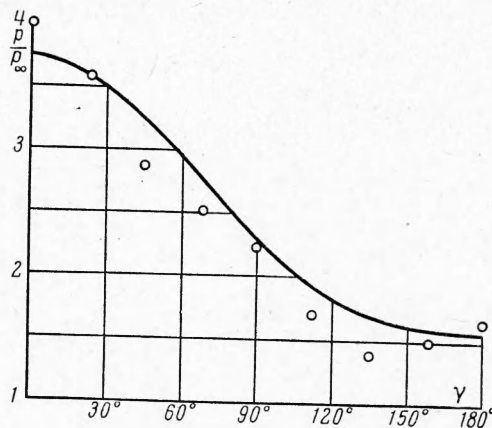
рости невозмущенного потока. Данные для углов φ_k и $\varphi_k + \pi$ получались в одной продувке при фиксированном положении модели. Значения q оказались нечетными вследствие того, что одно из значений φ_k было равно $1/2 \pi$, и течение обладало плоскостью симметрии.

Полученные фотографии в монохроматическом свете при $M = 3.5$ представлены на фиг. 2, 3 и 4. Им соответствуют углы φ_k , равные 0 и π (фиг. 2), $1/4 \pi$ и $3/4 \pi$ (фиг. 3) и $1/2 \pi$ (фиг. 4).

Результаты обработки эксперимента по описанному выше методу представлены на фиг. 5 и 6 в виде зависимости $\rho/\rho_\infty = \rho^*(\xi, \gamma)$. Луч $\gamma = 0$ расположен на наветренной стороне течения. Экспериментальные значения ρ^* даны точками, а сплошными линиями показаны результаты численного расчета плотности по методу работы [3]. Каждой кривой соответствует свое начало координат с тем же индексом, что и номер кривой. Единица отсчета вдоль оси ординат отмечена фигурной скобкой.



Фиг. 7



Фиг. 8

Экспериментальные данные на фиг. 5 соответствуют значениям $M = 3.5$ и $q = 5$, на фиг. 6 — значениям $M = 4.2$ и $q = 3$. Число интервалов N , на которые разбивался диапазон $0 \leq \xi \leq 1$, в обоих случаях равнялось 20. Вследствие этого соотношения (2.5) для первого случая сводились к 20 системам из 5 уравнений, для второго — к 20 системам из 3 уравнений.

Из приведенных данных видно, что при определении плотности около конуса, обтекаемого под небольшим углом атаки, можно ограничиться числом $q = 3$.

Форма ударной волны при $M = 3.5$ показана на фиг. 7. Кривая (1) соответствует рассматриваемому эксперименту, кривая (2) получена по методу работы [3].

На фиг. 8 приведены результаты пересчета плотности в давление p на поверхности тела ($\xi = 0$), произведенного в предположении, что на поверхности конуса энтропийная функция $\vartheta^* = p/\rho^*$ постоянна и равна ее значению на наветренной стороне фронта ударной волны. Давление невозмущенного потока обозначено через p_∞ ; $M = 3.5$.

Поступила 29 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Физические измерения в газовой динамике и при горении. ИЛ, 1957.
2. Белоцерковский С. М., Сухоруких В. С., Татаренчик В. С. Исследование пространственных газодинамических течений на основе количественных оптических методов. Доклад на втором Всесоюз. съезде по теорет. и прикл. мех. Аннотации докладов, АН СССР, 1964.
3. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П. Численный метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком. Ж. вычислит. матем. и математ. физ., 1961, т. 1, № 6.