ПМТФ, № 6, 1974

УДК 533.95

ГАЗОДИНАМИКА ПЛАЗМЫ В МНОГОПРОБОЧНОЙ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ С «ТОЧЕЧНЫМИ» ПРОБКАМИ

Ю. В. Васильев, В. В. Мирнов

(Новосибирск)

Выводятся уравнения газодинамики плотной плазмы, удерживаемой многопробочным магнитным полем. Предельные случаи больших и малых длин свободного пробега: $\lambda \ll l_0$ и $\lambda \gg lk$, где l — длина отдельного пробкотрона, l_0 — размер пробки, k — пробочное отношение,— были рассмотрены ранее. Данная работа посвящена изучению промежуточного диапазона длин свободного пробега $l_0 \ll \lambda \ll lk$. Показано, что в этой области параметров процесс расширения плазмы носит диффузионный характер, вычислены коэффициенты переноса плазмы вдоль магнитного поля.

В последнее время обсуждается возможность продольной термоизоляции плазмы в открытых системах с помощью гофрированного (многопробочного) магнитного поля. Интерес к этому способу удержания связан с успехами экспериментов [1–3], выполненных для проверки предсказаний теории [4–7]. Один из выводов теории заключается в том, что при заданном большом пробочном отношении $k \equiv H_{\max}/H_{\min} \gg 1$ оптимальный режим термоизоляции осуществляется в многопробочной ловушке с «точечными» пробками. Точечными в работах [5,6] условно названы пробки, длина l_0 которых много меньше периода гофрировки поля l.

Помимо наиболее эффективного удержания точечные пробки выгодны с точки зрения энергетических затрат, требуемых для создания магнитного поля. Это важно для плазмы с параметрами, близкими к термоядерным

(1) $$n \approx 10^{18}\ \text{см}^{-3}, \qquad T \approx 5\ \text{кэв}$$

когда для хорошей термоизоляции необходимы большие магнитные поля и пробочные отношения. Теория удержания плазмы гофрированным полем, представленная в [5,6], относится к двум противоположным предельным случаям: случаю чисто кнудсеновского течения, которое реализуется при больших длинах свободного пробега $\lambda \gg lk$, и режиму, когда всюду вдоль силовой трубки течение гидродинамическое $\lambda \ll l_0$. Если теперь, имея в виду область параметров (1), взять для оценок реальные размеры $l_0 \sim$ ~ 5 *см*, $l \sim 50$ *см*, то окажется, что по мере нагрева плазмы быстро устанавливается состояние, когда течение носит кнудсеновский характер только в пробках, тогда как в остальных областях — гидродинамический. Этот промежуточный диапазон длин свободного пробега

(2) $$l_0 \ll \lambda \ll lk$$

в [5,6] не исследовался.

Магнитное поле, удерживающее плазму, будем считать заданным. По конфигурации силовых линий оно представляет собой многопробочную ловушку, состоящую из большого количества пробкотронов, соединенных торцами. Учитывая, что в диапазоне длин свободного пробега $l_0 \ll \lambda$ динамика расширения плазмы не должна зависеть от размера и формы пробки, будем решать задачу в нулевом приближении по параметру l_0 / λ, считая, что $l_0 = 0$, а поле в пространстве между пробками однородно.

Процедура вывода газодинамических уравнений, описывающих разлет вдоль силовой трубки плазменного сгустка с характерным продольным масштабом L, аналогична схеме вычислений, используемой в [5,6]. Вначале необходимо решить стационарную задачу и связать потоки вещества q_a и энергии Q_a обеих компонент плазмы с перепадами концентраций Δn_a, температур ΔT_a (индекс обозначает сорт частиц, $a = i, e$) и потенциала $\Delta\varphi$ между серединами двух соседних пробкотронов. На этом этапе вычислений следует считать, что разности Δn_a, ΔT_a и $\Delta\varphi$ заданы и не зависят от времени.

Введем для определенности координату s вдоль силовой трубки так, чтобы пробка, отделяющая пробкотроны, была расположена в точке $s = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta n_a &= n_a(l/2) - n_a(-l/2) \\ \Delta T_a &= T_a(l/2) - T_a(-l/2) \\ \Delta\varphi &= \varphi(l/2) - \varphi(-l/2) \end{aligned} \tag{3}$$

Как и в [5,6], будем предполагать, что плазменный сгусток достаточно протяженный и занимает большое число пробкотронов ($N \sim L/l \gg 1$). В этом случае величины n_a, T_a и φ незначительно меняются на масштабах одного пробкотрона ($\Delta n_a \ll n_a$, $\Delta T_a \ll T_a$). Характер их изменения существенно разный в различных участках силовой трубки: внутри пробкотронов, где течение носит столкновительный характер, параметры n_a, T_a и φ плавно меняются в соответствии с уравнениями двухжидкостной гидродинамики. В области пробки гидродинамическое приближение нарушается. Здесь параметры плазмы могут испытывать резкие скачки, пространственный масштаб которых порядка размеров пробки. Поэтому при решении задачи в нулевом приближении по l_0/λ следует учитывать, что граничные значения h_a, T_a и φ справа и слева от пробки могут не совпадать.

Определим скачки этих величин при переходе через пробку равенствами

$$\begin{aligned} &\delta n_a = n_a(+0) - n_a(-0), \quad \delta T_a = T_a(+0) - T_a(-0) \\ &\delta\varphi = \varphi(+0) - \varphi(-0) \end{aligned} \tag{4}$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся предположением, что пробочное отношение велико ($k \gg 1$). Это предположение позволяет найти в явном виде связь между потоками вещества и энергии, с одной стороны, и величинами (4), с другой стороны. Рассмотрим течение какой-либо компоненты плазмы через пробку. Если бы пробочное отношение было равно бесконечности, то обмен частицами между пробкотронами отсутствовал, и внутри каждого из них установилось бы максвелловское распределение по скоростям с параметрами, соответствующими данному пробкотрону. При конечном пробочном отношении максвелловское распределение вблизи пробки возмущается потоком частиц из соседнего пробкотрона, имеющего другие значения параметров (концентрации, температуры и потенциала). Возмущение функции распределения пропорционально разнице в значениях параметров, а также, поскольку пробочное отношение велико, малости числа частиц $\sim n/k$, проникающих из пробкотрона в пробкотрон

$$f(\mathbf{v}) - f_M(\mathbf{v}) = \delta f(\mathbf{v}) \sim \frac{1}{k}\,\frac{\Delta n}{n}$$

При вычислении потоков вещества и энергии вклад в интегралы от функции $f(\mathbf{v})$ дает узкая область фазового пространства $v_\perp^2 / v^2 =$

$= \sin^2\theta \leqslant 1/k$. Принимая это во внимание, можно проверить, что учет возмущения $\delta f(\mathrm{v})$ привел бы к появлению в формулах для потоков слагаемых, содержащих малую величину k^{-1}. Поэтому с точностью до членов порядка k^{-1} потоки вещества и энергии можно вычислять, полагая, что функции распределения вблизи пробки максвелловские. Результаты этих вычислений, выполненных в линейном приближении по δh_a, δT_a, $\delta\varphi$ имеют вид

$$q_a = -\frac{n_a}{k}\left(\frac{T_a}{2\pi m_a}\right)^{1/2}\left(\frac{\delta n_a}{n_a} + \frac{1}{2}\frac{\delta T_a}{T_a} \pm \frac{e\delta\varphi}{T_a}\right) \tag{5}$$

$$Q_a = -\frac{n_a T_a}{k}\left(\frac{T_a}{2\pi m_a}\right)^{1/2}\left(2\frac{\delta n_a}{n_a} + 3\frac{\delta T_a}{T_a} \pm 2\frac{e\delta\varphi}{T_a}\right)$$

В режиме, когда плазменный сгусток свободно расширяется, условие квазинейтральности выражается равенством $q_e = q_i \equiv q$, которое позволяет исключить из (5) скачок потенциала на пробке. Формулы (5) принимают вид

$$q = -\frac{1}{k(2\pi m_i T_i)^{1/2}}\left[(T_e + T_i)\delta n + \frac{n}{2}(\delta T_e + \delta T_i)\right] \tag{6}$$

$$Q_e = -\frac{n}{k}\left(\frac{2T_e}{\pi m_e}\right)^{1/2}\delta T_e$$

$$Q_i = -\frac{1}{k}\left(\frac{T_i}{2\pi m_i}\right)^{1/2}[2(T_e + T_i)\delta n + 3n\delta T_i + n\delta T_e]$$

В формулах (6), опущены слагаемые, содержащие малую величину m_e/m_i.

Найдем теперь, как связаны скачки на пробке, фигурирующие в (6), с заданными перепадами параметров (3) между серединами пробкотронов. Переход от свободного течения в пробках к гидродинамическому в центральной части пробкотрона происходит вблизи пробки на расстояниях порядка эффективной длины свободного пробега. Эффективной длиной пробега считаем расстояние $\lambda_{eff} \sim \lambda/k$, на котором пролетная частица рассеивается на угол $\Delta^2\theta \sim k^{-1}$ и попадает в область фазового пространства, занятую запертыми частицами. Если $\lambda_{eff} \ll l$, а выполнение этого условия гарантируется неравенством (2), то всюду внутри пробкотронов можно пользоваться для описания течения плазмы уравнениями двухжидкостной гидродинамики [8].

Сшивку стационарных решений для областей кнудсеновского и гидродинамического течений произведем, пользуясь тем, что потоки вещества и энергии с хорошей точностью постоянны вдоль силовой трубки. Изменения этих величин на длине пробкотрона являются величинами второго порядка малости по параметру l/L, в то время как потоки — величинами первого порядка малости. Приравнивая гидродинамические выражения для потоков вещества и энергии и найденные величины (6), получаем уравнения, описывающие распределения температур в гидродинамической области

$$-\varkappa_a\frac{\partial T_a}{\partial s} + \frac{5}{2}qT_a = Q_a \tag{7}$$

Значения коэффициентов теплопроводности задаются формулами

$$\varkappa_i = 1.63\frac{T_i^{5/2}}{\Lambda e^4 m_i^{1/2}}, \qquad \varkappa_e = 0.93\frac{T_e^{5/2}}{\Lambda e^4 m_e^{1/2}}$$

Эти уравнения необходимо дополнить условием стационарности течения. В пренебрежении вязкостью оно сводится к требованию постоянства полного давления вдоль силовой трубки

(8) $$\frac{\partial}{\partial s} n (T_e + T_i) = 0$$

Проинтегрируем уравнения (7), (8) по s между серединами пробкотронов (от точки $s = -l/2$ до $s = l/2$), исключая область шириной $\delta(\lambda_{eff} \ll \delta \ll l)$ с обеих сторон от пробки, где нарушается гидродинамическое приближение. В результате получим

(9) $$\frac{\varkappa_a}{l} [\Delta T_a - T_a(\delta) + T_a(-\delta)] = Q_a - \frac{5}{2} q T_a$$

$$n(\Delta T_e + \Delta T_i) + (T_e + T_i)\Delta n = (T_e + T_i)[n(\delta) - n(-\delta)] + $$
$$+ n[T_e(\delta) - T_e(-\delta)] + n[T_i(\delta) - T_i(-\delta)]$$

Поскольку $\delta \ll l$, разности $T_a(\delta) - T_a(-\delta)$, $n(\delta) - n(-\delta)$ с точностью до членов порядка δ / l равны скачкам (4) концентрации и температур на пробке. Учитывая это, перепишем (9) в виде

(10) $$\frac{\varkappa_a}{l} (\Delta T_a - \delta T_a) = Q_a - \frac{5}{2} q T_a$$

$$T_a \Delta n + n \Delta T_a = n(\delta T_e + \delta T_i) + (T_e + T_i)\delta n$$

Вместе с выражениями (6) соотношения (10) образуют алгебраическую систему уравнений, связывающих скачки δn и δT_a с полными перепадами Δn и ΔT_a.

Громоздкие в общем случае решения этой системы существенно упрощаются, если безразмерный параметр $\lambda k / l$, фигурирующий в (10), мал или велик по сравнению с единицей. Так, в случае, когда $\lambda k / l \gg 1$, решения имеют вид

(11) $$\delta n = \Delta n, \qquad \delta T_a = \Delta T_a$$

При этом весь перепад плотности и температур приходится на область пробки. В противоположном предельном случае $\lambda k / l \ll 1$ изменения n и T_a распределяются вдоль пробкотронов более равномерно, а скачки на пробке составляют

(12) $$\delta n = \frac{7}{9}\left(\Delta n + n\frac{\Delta T_e + \Delta T_i}{T_e + T_i}\right), \qquad \delta T_e = \frac{k\varkappa_e}{nl}\left(\frac{\pi m_e}{2T_e}\right)^{1/2} \Delta T_e$$

$$\delta T_i = \frac{2}{9}\left[\frac{\Delta n}{n}(T_e + T_i) + \Delta T_i + \Delta T_e\right]$$

Подставляя соотношения (11) или (12) в формулы (6), приходим к искомым выражениям для потоков вещества и энергии при заданных между серединами пробкотронов перепадах Δn и ΔT_a

(13) $\lambda k / l \ll 1$

$$q = -\frac{8}{9k}(2\pi m_i T_i)^{-1/2}[(T_e + T_i)\Delta n + n(\Delta T_e + \Delta T_i)]$$

$$Q_e = -\varkappa_e \frac{\Delta T_e}{l}$$

$$Q_i = -\frac{20}{9k}\left(\frac{T_i}{2\pi m_i}\right)^{1/2}[(T_e + T_i)\Delta n + n(\Delta T_e + \Delta T_i)]$$

$\lambda k / l \gg 1$

$$q = -\frac{(2\pi m_i T_i)^{-1/2}}{k}\left[(T_e + T_i)\Delta n + \frac{1}{2}(\Delta T_e + \Delta T_i)\right]$$

$$Q_e = -\left(\frac{2T_e}{\pi m_e}\right)^{1/2}\frac{n}{k}\Delta T_e$$

$$Q_i = -\frac{1}{k}\left(\frac{T_i}{2\pi m_i}\right)^{1/2}[(T_e + T_i)\Delta n + 3\Delta T_i + \Delta T_e]$$

Дальнейшая последовательность вывода уравнений, описывающих временное и пространственное распределение параметров плазмы, аналогична описанной в [5,6]. Ограничимся рассмотрением одного практически интересного частного случая эволюции достаточно длинных сгустков $L \gg l\,(m_i\,/\,m_e)^{1/4}$, когда температуры электронов и ионов за время расширения успевают выровняться между собой и вдоль магнитного поля

$$T_e = T_i = T, \qquad \frac{\partial T}{\partial s} = 0 \tag{14}$$

В этих условиях динамика плазменного сгустка описывается одним уравнением для концентрации. Чтобы вывести его, запишем уравнение баланса числа частиц в отрезке силовой трубки, заключенном между серединами двух соседних пробкотронов

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{l}\int\limits_{-l/2}^{l/2} n\,ds\right) = -\frac{q\,(l/2) - q\,(-l/2)}{l} \tag{15}$$

Введем величину

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{1}{l}\,[q\,(l/2) - q\,(-l/2)]$$

с которой можно формально оперировать как с обычной производной. Учитывая, что на длине одного пробкотрона концентрация плазмы меняется незначительно, можем считать в формулах (13)

$$n = \bar{n} = \frac{1}{l}\int\limits_{-l/2}^{l/2} n\,ds$$

Подставляя эти формулы в (15) и принимая во внимание (14), получаем уравнение для $\bar{n}$

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \bar{n}}{\partial z^2}, \qquad D = \begin{cases} D_1 = \dfrac{8l}{9k}\left(\dfrac{2T}{\pi m_i}\right)^{1/2}, & l_0 \ll \lambda \ll l/k \\ D_2 = \dfrac{l}{k}\left(\dfrac{2T}{\pi m_i}\right)^{1/2}, & l/k \ll \lambda \ll lk \end{cases} \tag{16}$$

Сформулированное уравнение описывает процесс диффузионного растекания плазмы вдоль магнитного поля. Неравенства, относящиеся к коэффициенту диффузии, получены путем комбинирования условия (2) и неравенств $\lambda k\,/\,l \ll 1$, $\lambda k\,/\,l \gg 1$, которые использовались при решении системы уравнений (10). При промежуточных значениях параметра $\lambda k\,/\,l$ значения коэффициента диффузии лежат в пределах $D_1 < D < D_2$.

Пользуясь уравнением (16), можно оценить скорость расширения u и время продольного удержания $\tau \sim L\,/\,u$ плазмы гофрированным полем в диапазоне длин свободного пробега (2)

$$u \sim v_{Ti} \frac{l}{Lk}, \qquad \tau \sim \frac{L}{v_{Ti}} \frac{Lk}{l}$$

Предполагается, что длина установки равна по порядку величины длине плазменного сгустка L.

Из приведенных оценок видно, что с переходом от гладкой конфигурации поля к многопробочной с точечными пробками время продольного удержания плазмы значительно увеличивается и растет пропорционально произведению числа пробкотронов на их пробочное отношение.

Полученные формулы на пределах их применимости по длине свободного пробега (2) совпадают с точностью до численного коэффициента с соответствующими формулами, выведенными в [5,6]. Представленные результаты являются промежуточными между чисто кинетическими и гидродинамическими режимами, рассмотренными в [5,6], и вместе с результатами этих работ дают полную картину динамики течения плазмы в сильно гофрированном ($k \gg 1$) магнитном поле.

Авторы благодарны Д. Д. Рютову за постановку задачи и интерес к работе.

Поступила 6 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Будкер Г. И., Данилов В. В., Кругляков Э. П., Рютов Д. Д., Шунько Е. В.* Эксперименты по удержанию щелочной плазмы в гофрированном магнитном поле. Письма ЖЭТФ, 1973, т. 17, вып. 2.
2. *Будкер Г. И., Данилов В. В., Кругляков Э. П., Рютов Д. Д., Шунько Е. В.* Эксперименты по удержанию плазмы в многопробочной магнитной ловушке. ЖЭТФ, 1973, т. 65, вып. 2.
3. *Logan B. G., Brown I. G., Lieberman M. A., Lichtenberg A. J.* Experimental evidence of multiple-mirror plasma continement. Phys. Rev. Letters, 1972, vol. 29. No. 21, p. 1435.
4. *Будкер Г. И., Мирнов В. В., Рютов Д. Д.* Влияние гофрировки магнитного поля на расширение и остывание плотной плазмы. Письма ЖЭТФ, 1971, т. 14, вып. 5.
5. *Будкер Г. И., Мирнов В. В, Рютов Д. Д.* Газодинамика плотной плазмы в гофрированном магнитном поле. В сб. «Проблемы теории плазмы». Киев, Ин-т теорет. физ. АН УССР , 1972.
6. *Mirnov V. V. Ryutov D. D.* Gas-dynamic description of a plasma in a corrugated, magnetic field. Nucl. Fusion, 1972, vol. 12, No. 6.
7. *Мирнов В. В., Рютов Д. Д.* Труды 5-й Европейской конференции по физике плазмы. Гренобль, 1972, стр. 100.
8. *Брагинский С. И.* Явления переноса в плазме. В сб. «Вопросы теории плазмы», т. 1. М., Атомиздат, 1963.