

кации однопараметрической модели  $r'_0 = 0,244$ , то после модификации  $r'_0 = 0,091$ , а если до модификации двухпараметрической модели  $r'_0 = 0,142$ , то после  $r'_0 = 0,085$ .

Заметим, что для двухпараметрической модели в [8] был осуществлен учет осесимметричности течения, основанный на соображениях, отличных от описанных в данной работе.

Автор благодарит А. Н. Секундова за ценные замечания, сделанные при обсуждении работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н. Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтономности.— М.: Машиностроение, 1975.
2. Jones W. P., Launder B. E. The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence // Int. J. Heat Mass Transfer.— 1973.— V. 16, N 6.
3. Prandtl L. Bericht uber Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz // ZAMM.— 1925.— Bd 5.— S. 136.
4. Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н. Связь между коэффициентом диффузии и эйлеровыми характеристиками турбулентности в различных потоках // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1970.— № 1.
5. Теория турбулентных струй/Под ред. Г. Н. Абрамовича.— М.: Наука, 1984.
6. Патанкар С., Сполдинг Д. Тепло- и массообмен в пограничных слоях.— М.: Энергия, 1971.
7. Chang K., Lin R. A comparison of turbulence models for uses in calculations of free jets and flames.— N. Y., 1989.— (Pap./AIAA; N 220).
8. Pope S. B. An explanation of the turbulent round-jet/plane-jet anomaly // AIAA J.— 1978.— V. 16, N 3.

г. Москва

Поступила 26/VII 1991 г.,  
в окончательном варианте — 12/II 1992 г.

УДК 533.6.011.5

*А. Н. Богданов, В. А. Куликовский*

### СТАЦИОНАРНЫЕ СЛАБОВОЗМУЩЕННЫЕ ТРАНСЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНО-РЕЛАКСИРУЮЩЕГО ГАЗА

Образование ударных волн в трансзвуковых течениях — проблема, далекая от окончательного решения. В обычной газовой динамике существуют многочисленные примеры построения свободных от разрывов трансзвуковых течений и течений с переходом через скорость звука, содержащих разрывы (см., например, [1]). Эксперименты подтвердили существование непрерывных [2] и содержащих разрывы [3] трансзвуковых течений. Обоснование исключительности безударного течения в местной сверхзвуковой зоне проведено в [4], в связи с чем сформировалось мнение о невозможности непрерывного торможения трансзвукового потока [5]. По мнению авторов [6], такое течение либо делается неустановившимся, либо содержит ударные волны, либо то и другое вместе. Одним из возможных подходов к решению этой проблемы является изучение трансзвукового течения на устойчивость по отношению к стационарным и нестационарным возмущениям, которые могут возникнуть в потоке из-за неровностей ограничивающих течение стенок или вызываться падением на звуковую линию слабых нестационарных волн. В общем виде такое исследование сложно, обычно используются приближенные методы.

© А. Н. Богданов, В. А. Куликовский, 1993

Устойчивость трансзвукового течения по отношению к малым нестационарным возмущениям в малой окрестности звуковой линии на основе квазиодномерного приближения рассмотрена в [7, 8]. Попытка анализа в общем виде предпринята в [9], где после некоторых упрощающих предположений получены результаты, совпадающие с [7]. В [10] приведен анализ устойчивости трансзвукового течения на основе линеаризации уравнения Линя — Рейсснера — Цяня. Получено, что трансзвуковое течение устойчиво по отношению к медленным изменениям формы стенок сопла и условий на входе, если ускорение заданного течения всюду положительно.

Построенные примеры стационарных непрерывных трансзвуковых течений существуют лишь вблизи определенных типов твердых границ. В этой связи существует мнение об исключительности течений такого типа. Исследование поведения стационарных возмущений таких течений, возникших из-за неровностей ограничивающих течение стенок, позволяет изучить появление особенностей течения.

Вопросы образования ударных волн и условия безударного течения в трансзвуковых потоках рассмотрены в [11]. Показано, что ударные волны возникают, если стенки канала вблизи горловины сопла сделаны слишком пологими. Скачки могут образовываться в точке звуковой линии или ниже по течению в сверхзвуковой области. Численные расчеты плоского трансзвукового течения с местной сверхзвуковой зоной показали образование ударной волны внутри зоны сверхзвукового течения [12].

Ниже рассмотрено поведение стационарных и нестационарных возмущений установившихся трансзвуковых течений колебательно-релаксирующего газа.

Использование методов [8] позволяет свести проблему определения устойчивости трансзвукового течения по отношению к малым нестационарным возмущениям к исследованию некоторого нелинейного уравнения в частных производных. Анализ решений этого уравнения при конкретных условиях состояния среды показывает, что течение с переходом от сверхзвукового режима к дозвуковому устойчиво по отношению к малым возмущениям, если газ находится в равновесном состоянии, либо имеет место неравновесность газа при невозбужденных колебательных степенях свободы. В этом случае будет устойчиво и трансзвуковое течение с переходом от дозвукового режима течения к сверхзвуковому.

При изучении поведения стационарных возмущений рассмотрена сверхзвуковая область трансзвукового течения. Аналогично обычной газовой динамике выведены уравнения трансзвукового приближения. Малость имеющихся в области возмущений по сравнению с отклонениями значений параметров от значений при звуковой скорости (трансзвуковое приближение) не предполагалась. При анализе поведения возмущений использовано приближение коротких волн [13]. Показано, что возмущения затухают в ускоряющемся течении и нарастают в замедляющемся. Релаксационный процесс, связанный с возбуждением колебательных степеней свободы молекул, приводит к дополнительному затуханию возмущений.

Таким образом, при течениях колебательно-релаксирующего газа может существовать непрерывнотормозящееся трансзвуковое течение, и, следовательно, возможно осуществить непрерывное околозвуковое обтекание профиля с образованием местных сверхзвуковых зон.

1. Система уравнений плоского или осесимметричного стационарного течения газа с учетом колебательной релаксации имеет вид

$$(1.1) \quad (\rho u)_x + (\rho v)_y + \frac{\rho v^2}{y} = 0, \quad \rho (uu_x + vv_y) + p_x = 0, \quad \rho (uv_x + vv_y) + p_y = 0, \\ u p_x + v p_y - a^2 (u \rho_x + v \rho_y) = -\rho (\gamma - 1) (u e_{kx} + v e_{ky}), \\ u e_{kx} + v e_{ky} = \omega (e_k^* - e_k) = F,$$

где  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $u$ ,  $v$  — составляющие скорости по осям  $x$ ,  $y$  соответственно;  $e_k$ ,  $e_k^*$  — энергия колебательных степеней сво-

боды молекул газа и ее равновесное значение;  $a$  — замороженная скорость звука;  $\omega$  — обратное время релаксации;  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $\nu = 0$  и  $1$  для плоских и осесимметричных течений; индексы  $x$  и  $y$  обозначают дифференцирование по соответствующей индексу координате.

Для величин  $e_k^*$  и  $\omega$  примем соотношения [14]

$$\omega = k_1 p \exp(-k_2 T^{-1/3}), \quad e_k^* = R\theta_k / (\exp(\theta_k/T) - 1).$$

Здесь  $R$  — газовая постоянная;  $T$  — поступательная температура;  $\theta_k$  — характеристическая колебательная температура;  $k_1, k_2$  — положительные постоянные, зависящие от свойств газа [14].

Линейная теория стационарных течений колебательно-релаксирующего газа [15] дает

$$(1.2) \quad u = u_0(1 - \delta\Phi_{xx}), \quad v = -u_0\delta\Phi_{xy}, \quad p = \gamma p_0 \left( \frac{1}{\gamma} - \delta M_0^2 \Phi_{xx} \right),$$

$$\rho = \rho_0(1 + \delta\Phi_{xx} + \delta\Phi_{yy}), \quad e_k = a_0^2 \left( \bar{e}_{k0} + \frac{1}{\gamma - 1} (\delta(1 - M_0^2)\Phi_{xx} + \delta\Phi_{yy}) \right),$$

где

$$\Phi_{xx} = f''; \quad \Phi_{xy} = -\sqrt{M_0^2 - 1}(f'' + \Lambda f'); \quad \Phi_{yy} = (M_0^2 - 1)(f'' + 2\Lambda f' + \Lambda^2 f);$$

$$f'' = \left( Y_x - \Lambda \int_0^x Y_\eta \exp(\Lambda(\eta - x)) d\eta \right) / \sqrt{M_0^2 - 1}; \quad \delta \ll 1; \quad M - \text{число Маха};$$

$\Lambda$  — параметр, характеризующий релаксационный процесс;  $Y$  — функция, определяющая начальный профиль возмущения. Видно, что при  $M_0^2 \rightarrow 1$ ,  $\Phi_{xx} \rightarrow \infty$ ,  $\Phi_{yy} \rightarrow 0$ ,  $\Phi_{xy}$  является ограниченной. Следовательно, параметры течения  $u, p, \rho$  возрастают до бесконечности,  $e_k$  и  $v$  стремятся к константам. Рассмотрим трансзвуковое течение, близкое к постоянному равновесному течению со звуковой скоростью вдоль оси  $x$  (ниже его параметры будем обозначать индексом нуль внизу). Полученные выше асимптотики (1.2) дают основание при рассмотрении трансзвукового течения использовать разложения параметров течения вида

$$(1.3) \quad u = a_0(1 + \tau u_1), \quad v = -a_0 \tau^{3/2} v_1,$$

$$p = \gamma p_0 \left( \frac{1}{\gamma} + \tau p_1 \right), \quad \rho = \rho_0(1 + \tau \rho_1), \quad e_k = a_0^2 (e_{k0} + \tau^2 e_{k2}),$$

при этом совершается переход к новым координатам:  $\bar{x} = x/L$ ,  $\bar{y} = y\sqrt{\tau}/L$  ( $L$  — характерная длина). Кроме того, вводятся величины

$$\bar{\omega} = \omega L / u_0, \quad \bar{e}_k^* = e_k^* / a_0^2.$$

Используя (1.3), можно получить

$$u^2 - a^2 = a_0^2 \tau (2u_1 - \gamma p_1 + \rho_1), \quad \sqrt{M^2 - 1} = \sqrt{\tau} \sqrt{2u_1 - \gamma p_1 + \rho_1}.$$

Уравнения системы (1.1) приведем к характеристическому виду [13]. Используя ниже обозначения

$$\frac{d_{\pm}}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{uv \pm a^2 \sqrt{M^2 - 1}}{u^2 - a^2} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{d_0}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{u} \frac{\partial}{\partial y},$$

имеем

$$(1.4) \quad v \frac{d_{\pm} u}{dx} - u \frac{d_{\pm} v}{dx} \mp \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho} \frac{d_{\pm} p}{dx} = \left[ \frac{(\gamma - 1) F}{u^2 - a^2} + \frac{a^2 v v}{y(u^2 - a^2)} \right] \times \\ \times (\pm u \sqrt{M^2 - 1} + v),$$

$$\frac{d_{\pm} y}{dx} = \frac{uv + a^2 \sqrt{M^2 - 1}}{u^2 - a^2}, \quad \rho \frac{d_0}{dx} \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \frac{d_0 p}{dx} = 0,$$

$$\frac{d_0 p}{dx} - a^2 \frac{d_0 \rho}{dx} = -\frac{\rho(\gamma - 1) F}{u}, \quad \frac{d_0 e_k}{dx} = \frac{F}{u}, \quad \frac{d_0 y}{dx} = \frac{v}{u}.$$

Первое уравнение системы (1.4) записано вдоль акустической характеристики. Уравнение этой характеристики приведено вторым (при выборе верхнего знака акустическая характеристика относится к первому семейству, при выборе нижнего — ко второму). Следующие три уравнения записаны вдоль линии тока. Уравнение линии тока — последнее в системе (1.4).

Оставляя главные по  $\tau$  члены после подстановки разложений (1.3) в систему (1.4), получим уравнения трансзвукового приближения (в первом уравнении оставленные члены имеют порядок  $\tau^{3/2}$ , в остальных — порядок  $\tau$ ; предполагается, что  $\bar{\omega}_0$  имеет порядок  $\tau$ , черточки над  $x$  и  $y$  опущены):

$$(1.5) \quad -\frac{d_{\pm}v_1}{dx} \mp \sqrt{2u_1 - \gamma p_1 + \rho_1} \frac{d_{\pm}p_1}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{2u_1 - \gamma p_1 + \rho_1}} \times \\ \times \left[ (\gamma - 1) \frac{\bar{\omega}_0}{\tau} \bar{e}_{k1}^* + \frac{v_1 v}{y} \right], \\ \frac{d_{\pm}y}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{2u_1 - \gamma p_1 + \rho_1}}, \quad \frac{d_0 u_1}{dx} + \frac{d_0 p_1}{dx} = 0, \quad \frac{d_0 v_1}{dx} - \frac{d_0 \rho_1}{dx} = 0, \quad \frac{d_0 y}{dx} = 0$$

$\left( \bar{e}_{k1}^* = \gamma e_{k0}^* \exp \frac{\theta_k}{T_0} (\gamma p_1 - \rho_1) \right)$ . Уравнение системы (1.4), определяющее  $e_k$ , давало бы главные члены порядка  $\tau^2$  и здесь не приведено. Первые два уравнения системы (1.5) имеют смысл только при  $2u_1 - \gamma p_1 + \rho_1 > 0$  (область сверхзвукового течения).

Пусть в потоке есть стационарное возмущение, обусловленное неровностями ограничивающих поток стенок. Параметры возмущенного течения можно представить суммами

$$u_1 + u_{11}, \quad v_1 + v_{11}, \quad p_1 + p_{11}, \quad \rho_1 + \rho_{11},$$

где первые слагаемые соответствуют известному трансзвуковому течению, вторые — стационарному возмущению.

Параметры невозмущенного течения можно определить в виде рядов по пространственным координатам  $x$  и  $y$ . Связав начало системы координат со звуковой линией и рассматривая течение в малой окрестности этой линии, можно ограничиться учетом лишь старших членов этих рядов по координатам. Удобно преобразовать систему (1.5) следующим образом. Выбирая в первом уравнении системы верхний знак, получим

$$(1.6) \quad -\frac{dv_1}{dx} - \sqrt{2u_1 - \gamma p_1 + \rho_1} \frac{dp_1}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2u_1 - \gamma p_1 + \rho_1}} \left[ (\gamma - 1) \frac{\bar{\omega}_0}{\tau} \bar{e}_{k1}^* + \frac{v_1 v}{y} \right].$$

Складывая уравнение (1.6) с получаемым из первого уравнения системы (1.5) при выборе в нем нижнего знака, имеем

$$(1.7) \quad v_{1x} + p_{1y} = 0.$$

Далее продифференцируем уравнение (1.6) по  $x$  и, используя уравнения системы (1.5) и (1.7), имеем нелинейное уравнение в частных производных относительно  $u_1$ :

$$(1.8) \quad ((\gamma + 1)u_1 u_{1x})_x - u_{1yy} - \frac{v}{y} u_{1y} + E u_{1x} = 0 \\ \left( E = \frac{1}{\tau} \gamma (\gamma - 1)^2 \bar{\omega}_0 e_{k0}^* \exp \frac{\theta_k}{T_0} \right).$$

В обычной газовой динамике (в отсутствие релаксации  $\bar{\omega}_0 \rightarrow 0$ ) (1.8) переходит в уравнение трансзвукового приближения Кармана — Гудерля [16]:

$$(1.9) \quad -(\gamma + 1) \Phi_x^0 \Phi_{xx}^0 + \Phi_{yy}^0 + \frac{v}{y} \Phi_y^0 = 0$$

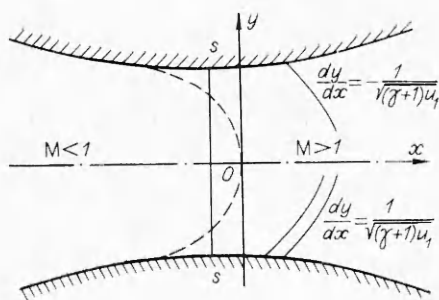


Рис. 1

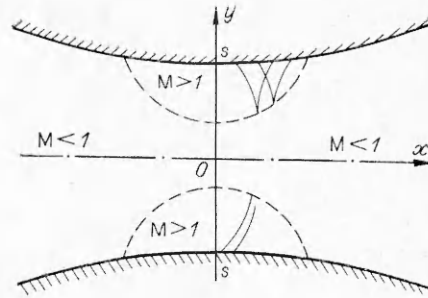


Рис. 2

( $\Phi_x^0 = u_1$ ). Уравнения (1.8) и (1.9) принадлежат к смешанному типу: гиперболическому при  $(\gamma + 1)u_1 > 0$ ,  $(\gamma + 1)\Phi_x^0 > 0$ , эллиптическому при  $(\gamma + 1)u_1 < 0$ ,  $(\gamma + 1)\Phi_x^0 < 0$ . Для (1.9) построены два типа стационарных трансзвуковых течений, носящих имена своих первоисследователей: Мейера [16] и Тейлора [17]. Параметры течений представляются в виде рядов по пространственным координатам  $x$  и  $y$  (введение координат см. по рис. 1 и 2). Построим подобные решения для уравнения (1.8).

Для течения мейеровского типа на оси сопла (при  $y = 0$ ) задается линейное по  $x$  изменение продольной скорости  $\bar{u}$  (гипотеза Мейера). Кроме того, по физическим соображениям принимается, что течение симметрично относительно оси  $x$  (разложение содержит члены  $y^2, y^4, \dots$ ). Вместо составляющих скорости  $u_1, v_1$  удобно ввести потенциал течения  $\Phi$  так, что  $u_1 = \Phi_x, v_1 = \Phi_y$ . Коэффициенты разложения потенциала по  $x$  и  $y$  можно получить подстановкой разложения в уравнение (1.9):

$$(1.10) \quad \Phi_m = \frac{\alpha}{2} x^2 + \frac{\alpha(E + \alpha(\gamma + 1))}{2(\nu + 1)} xy^2 + \frac{\alpha(E + \alpha(\gamma + 1))^2}{8(\nu + 1)(\nu + 3)} y^4.$$

Течение с таким потенциалом есть трансзвуковое ускоряющееся течение при  $\alpha > 0$ .

По потенциалу можно определить линии тока, а следовательно, границы течения. Из граничных условий найдем

$$\alpha = \frac{1}{2(\nu + 1)} \sqrt{E^2 + \frac{4(\gamma + 1)(\nu + 1)}{R_s y_s}},$$

где  $y_s$  — ордината минимального сечения сопла;  $R_s$  — кривизна сопла в минимальном сечении.

Звуковая линия определяется равенством

$$(1.11) \quad u_1 = 0.$$

По уравнению (1.11), используя (1.10), можно вывести уравнение звуковой линии

$$x = -\frac{1}{4(\nu + 1)} \left( E + \sqrt{E^2 + \frac{4(\gamma + 1)(\nu + 1)}{R_s y_s}} \right) y^2.$$

Отличие от обычной газовой динамики состоит в наличии параметра  $E > 0$ . Звуковая линия в релаксирующем газе располагается выше по течению (за исключением точки  $x = y = 0$ ) и, следовательно, более искривлена.

Для тейлоровского течения также характерна симметрия относительно оси  $x$ . Подстановкой разложения общего вида в уравнение (1.9) получим

$$\Phi_t = -\eta x - \frac{E}{2(\gamma + 1)} x^2 - \frac{\beta}{3} x^3 + \frac{(\gamma + 1)\eta\beta}{\nu + 1} xy^2$$

$$\left( \beta = 2\frac{\gamma + 1}{\nu + 1} \eta y_s R_s > 0, \quad \eta = 1 - \frac{u}{a} > 0, \quad \eta \ll 1 \right).$$

Звуковая линия определяется по уравнению (1.11) и имеет вид

$$\eta + \frac{E}{\gamma + 1} x + \beta x^2 = \frac{(\gamma + 1) \eta \beta}{\nu + 1} y^2.$$

В обычной газовой динамике ( $\omega_0 \rightarrow 0$ ,  $E \rightarrow 0$ ) звуковая линия ограничивает две зоны сверхзвукового течения около стенок сопла, симметричные относительно оси  $y$  (поле течения симметрично также относительно оси  $x$ ). Релаксация приводит к нарушению симметрии относительно оси  $y$  и смещению сверхзвуковой зоны вверх по течению.

Для величин с индексами 11, отвечающих возмущениям, из системы (1.5) имеем

$$(1.12) \quad -\frac{dv_{11}}{dy} \pm \frac{2}{3} \sqrt{\gamma + 1} \frac{d}{dy} [(u_{11} + u_1)^{3/2} - u_1^{3/2}] = \pm \left[ \frac{v_{11} \nu}{y} - Eu_{11} \right],$$

$$\frac{d_{\pm} y}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{(\gamma + 1)(u_1 + u_{11})}}, \quad u_{11} = -p_{11}, \quad p_{11} = \rho_{11}.$$

Полученная система показывает, что рассматриваемое возмущение можно представлять как совокупность волн (акустических, энтропийно-вихревых, релаксационных), распространяющихся вдоль характеристик соответствующих семейств. Если характерная длина возмущающей поток неровности на стенке  $L$  достаточно мала, то и создаваемые ею волны возмущений имеют малую протяженность (от переднего до заднего фронта), и можно пренебречь влиянием друг на друга возмущений, распространяющихся вдоль характеристик различных семейств. Рассмотрим акустическую волну первого семейства, определяемую первым уравнением системы (1.12) при выборе в нем верхнего знака:

$$-\frac{dv_{11}}{dy} + \frac{2}{3} \sqrt{\gamma + 1} \frac{d}{dy} [(u_{11} + u_1)^{3/2} - u_1^{3/2}] = \frac{v_{11} \nu}{y} - Eu_{11}.$$

Остальные возмущения будем считать нулевыми:

$$\frac{dv_{11}}{dy} + \frac{2}{3} \sqrt{\gamma + 1} \frac{d}{dy} [(u_{11} + u_1)^{3/2} - u_1^{3/2}] = 0.$$

Для течений мейеровского типа это предположение справедливо, если возмущения течения определяются только слабыми неровностями твердых границ (стенок) в сверхзвуковой зоне потока. Возникнув, такие возмущения сносятся вдоль характеристик вниз по потоку, и течение вверх по потоку можно считать невозмущенным.

Такая же картина наблюдается и для течения тейлоровского типа, если возмущения, порожденные неровностями стенок внутри сверхзвуковой зоны течения, затухают внутри этой зоны. Если же возмущения не затухают, то они достигают звуковой линии и выходят в дозвуковую область, которую возмущают всю целиком, в том числе и течение вверх по потоку. В этом случае в сверхзвуковой зоне появятся и приходящие на стенку возмущения, которые будут отражаться от твердой границы и давать вклад в уходящие от стенки возмущения. Кроме того, эти приходящие от звуковой линии возмущения сами могут стать причиной возникновения особенностей течения (ударных волн). Такие задачи в данной работе не рассматриваются.

Полученную систему можно свести к одному дифференциальному уравнению первого порядка — неоднородному, нелинейному и неинтегрируемому в общем виде:

$$\frac{4}{3} \sqrt{\gamma + 1} \frac{d}{dy} [(u_{11} + u_1)^{3/2} - u_1^{3/2}] = -\frac{2\nu}{3y} \sqrt{\gamma + 1} \frac{d}{dy} [(u_{11} + u_1)^{3/2} - u_1^{3/2}] - Eu_{11} + C,$$

$$C = -\frac{\nu}{y} \left\{ v_{11}(0) + \frac{2}{3} \sqrt{\gamma + 1} [(u_{11}(0) + u_1(0))^{3/2} - u_1(0)^{3/2}] \right\}.$$

Перепишем это уравнение:

$$(1.13) \quad \frac{du_{11}}{dy} = \frac{-\frac{2\nu}{3y} \sqrt{\gamma+1} \frac{d}{dy} [(u_{11} + u_1)^{3/2} - u_1^{3/2}] - Eu_{11} + C}{\sqrt{4(\gamma+1)(u_1 + u_{11})}} - \frac{\frac{du_1}{dy} \frac{\sqrt{u_1 + u_{11}} - \sqrt{u_1}}{\sqrt{u_1 + u_{11}}}}{\sqrt{u_1 + u_{11}}}.$$

Для обычной газовой динамики ( $\omega \rightarrow 0$ ,  $E \rightarrow 0$ ) в случае плоского течения ( $\nu = 0$ ) уравнение (1.13) имеет вид

$$\frac{du_{11}}{dy} = -\frac{du_1}{dy} \frac{\sqrt{u_1 + u_{11}} - \sqrt{u_1}}{\sqrt{u_1 + u_{11}}},$$

откуда видно, что возмущения затухают, если невозмущенное течение ускоряется ( $du_1/dy > 0$ ). В противном случае (если течение замедляется ( $du_1/dy < 0$ )) возмущения нарастают. Релаксационный процесс в газе, допускающем возбуждение колебательных степеней свободы, приводит к появлению в уравнении (1.13) члена  $-Eu_{11}$  и, следовательно, вызывает дополнительное затухание возмущений. При осесимметричном течении ( $\nu = 1$ ) расхождение волн также ослабляет возмущения.

Характеристики, представленные нелинейным уравнением (1.12), могут пересекаться. В точке пересечения возникает ударная волна. Эту точку — начало ударной волны — можно определить из уравнения  $\partial y / \partial y_0 = 0$ . Пусть решение уравнения (1.13) имеет вид  $u_{11} = u_{11}(y, y_0)$ . Находя производную  $\partial y / \partial y_0$  из (1.12), условие пересечения характеристик представим как

$$\frac{dy}{dy_0} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\gamma+1}} \int \frac{\partial u_{11}}{\partial y_0} \frac{1}{(\sqrt{u_1 + u_{11}})^3} dy = 0,$$

откуда следует, что пересечение характеристик может происходить только, если  $\partial u_{11} / \partial y_0 > 0$ , т. е. ударные волны получаются только из возмущений, содержащих участки нарастания скорости в направлении поперек течения (возмущений сжатия).

2. Рассмотрим систему уравнений нестационарного квазидномерного течения газа, допускающего возбуждение колебательных степеней свободы:

$$(2.1) \quad u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0, \quad p_t + up_x + \rho a^2 u_x = -\rho(\gamma-1)F - \rho u a^2 \frac{1}{S} \frac{dS}{dx},$$

$$T(s_t + us_x) = -F, \quad e_{ht} + ue_{hx} = F, \quad F = \omega(e_h^* - e_h).$$

Здесь  $u$  — скорость газа;  $s$  — энтропия поступательных степеней свободы молекул газа;  $S$  — площадь поперечного сечения трубки тока; индексы  $x$  и  $t$  обозначают дифференцирование по соответствующей индексу координате.

Стационарное трансзвуковое течение, устойчивость которого будет исследоваться, описывается системой уравнений, вытекающих из системы (2.1), после пренебрежения в ней зависимостью параметров течения от времени:

$$\overline{\rho u u_x} + \overline{p_x} = 0, \quad \overline{u p_x} + \overline{\rho u u_x^2} = -\overline{\rho}(\gamma-1)\overline{F} - \overline{\rho u a^2} \frac{1}{S} \frac{dS}{dx}, \quad \overline{T u s_x} = -\overline{F},$$

$$\overline{u e_{hx}} = \overline{F},$$

откуда легко получить

$$(2.2) \quad \frac{d\overline{u}}{dx} = \frac{1}{M^2 - 1} \left[ \frac{(\gamma-1)\overline{F}}{\overline{a^2}} + \overline{u} \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \right].$$

Пусть в точке  $x = 0$  оси  $x$  скорость стационарного потока достигает скорости звука ( $\overline{u} = \overline{a}$  (и  $\overline{M} = 1$ )). Для существования непрерывного



стационарного течения с переходом через скорость звука необходимо выполнение условия, следующего из (2.2):

$$(2.3) \quad \left| \frac{(\gamma-1)}{a^3} \bar{F} = - \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \right|_{x=0}.$$

Как вытекает из (2.2), выделение энергии из-за колебательного возбуждения молекул газа ( $\bar{F} < 0$ ) ускоряет дозвуковое течение ( $\bar{M}^2 < 1$ ) и замедляет сверхзвуковое ( $\bar{M}^2 > 1$ ). В неравновесном газе с невозбужденными колебательными степенями свободы ( $F > 0$ ) дозвуковое течение замедляется за счет перекачки энергии во внутренние степени свободы, сверхзвуковое при этом ускоряется.

Изменение поперечного сечения трубки тока (сужение или расширение) аналогично влиянию колебательной релаксации в том смысле, что, например, сужение трубки тока вызывает ускорение потока так же, как релаксация возбуждения колебательных степеней свободы газа.

В газе с замороженными колебательными степенями свободы переход через скорость звука может происходить только, если  $dS/dx = 0$  (минимальное сечение трубки тока).

В колебательно-возбужденном газе  $F < 0$  в соответствии с (2.3) должно быть  $dS/dx > 0$  при  $\bar{M} = 1$  и переход через скорость звука происходит в расширяющейся части трубки тока. В неравновесном газе с невозбужденными колебательными степенями свободы  $F > 0$ , и из (2.3) (при  $\bar{M} = 1$ ) необходимо следует  $dS/dx < 0$  — переход через скорость звука происходит в сужающейся части трубки тока.

Другим необходимым условием существования непрерывного трансзвукового течения является условие устойчивости этого течения по отношению к малым нестационарным возмущениям [8].

Рассмотрим малую окрестность точки перехода через скорость звука  $x = 0$   $[-\delta, \delta]$  (предполагается, что  $\delta \ll 1$ ). Введем новую пространственную переменную  $x' = x/\delta$ , параметры течения будем раскладывать в ряды по малой величине  $\delta$  в окрестности точки  $x = 0$ :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u &= a_0 + \delta u_1(x', t) + \delta^2 u_2(x', t) + \dots, \\ p &= p_0 + \delta p_1(x', t) + \delta^2 p_2(x', t) + \dots, \quad \rho = \rho_0 + \delta \rho_1(x', t) + \delta^2 \rho_2(x', t) + \dots, \\ s &= s_0 + \delta s_1(x', t) + \delta^2 s_2(x', t) + \dots, \quad e_k = e_{k0} + \delta e_{k1}(x', t) + \delta^2 e_{k2}(x', t) + \dots. \end{aligned}$$

Здесь индексом нуль снизу отмечены значения параметров течения газа в точке  $x = 0$ , следующие члены соответствуют отклонениям от значений в этой точке из-за стационарного изменения основного течения и имеющихся в потоке слабых нестационарных возмущений.

Подставляя разложения (2.4) в систему (2.1), в нулевом приближении по  $\delta$  имеем

$$\begin{aligned} \rho_0 a_0 u_{1x'} + p_{1x'} &= 0, & a_0 p_{1x'} + \gamma p_0 u_{1x'} &= 0, \\ a_0 s_{1x'} &= 0, & a_0 e_{k1x'} &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$(2.5) \quad a_0 p_1 + \gamma p_0 u_1 = 0, \quad s_1 = 0, \quad e_{k1} = 0.$$

В первом приближении по  $\delta$  из (2.1) вытекает

$$(2.6) \quad \begin{aligned} p_{1t} + u_1 p_{1x'} + a_0 p_{2x'} + \gamma (p_1 u_{1x'} + p_0 u_{2x'}) &= (\gamma - 1) [(\rho_1 \omega_0 + \rho_0 \omega_1)(e_{k0}^* - \\ &- e_{k0}) + \rho_0 \omega_0 (e_{k1}^* - e_{k1})] - \left[ \frac{a_0 p_1 + u_1 p_0}{a_0 p_0} \rho_0 (\gamma - 1) \omega_0 (e_{k0}^* - e_{k0}) + \right. \\ &\left. + p_0 a_0 \left( \frac{x^2 \ln S}{dx^2} \right)_0 x' \right], \end{aligned}$$

$$\rho_0 (u_{1t} + u_1 u_{1x'} + a_0 u_{2x'}) + \rho_1 a_0 u_{1x'} + p_{2x'} = 0,$$

$$s_{1t} + u_1 s_{1x'} + a_0 s_{2x'} = \frac{1}{T_0} \left( \frac{1}{T_0} \omega_0 (e_{k0}^* - e_{k0}) T_1 - \omega_1 (e_{k0}^* - e_{k0}) + \omega_0 (e_{k1}^* - e_{k1}) \right),$$

$$e_{k1t} + u_1 e_{k1x'} + a_0 e_{k2x'} = \omega_1 (e_{k0}^* - e_{k0}) + \omega_0 (e_{k1}^* - e_{k1}).$$



Система уравнений (2.6) относительно неизвестных  $p_2$ ,  $u_2$ ,  $s_2$ ,  $e_{k2}$  является вырожденной и имеет решение, только если выполняется условие совместности уравнений системы

$$(\gamma - 1) [(\rho_1 \omega_0 + \rho_0 \omega_1)(e_{k0}^* - e_{k0}) + \rho_0 \omega_0 (e_{k1}^* - e_{k1})] - \\ - \left[ \frac{a_0 p_1 + u_1 p_2}{a_0 p_0} \rho_0 (\gamma - 1) \omega_0 (e_{k0}^* - e_{k0}) + p_0 a_0 \left( \frac{d^2 \ln S}{dx^2} \right)_0 x' \right] + p_{1t} - u_1 p_{1x'} - \\ - \gamma p_1 u_{1x'} + \rho_0 a_0 (u_{1t} + u_1 u_{1x'}) + \rho_1 a_0^2 u_{1x'} = 0.$$

С учетом соотношений (2.5) условие совместности приводится к уравнению для  $c = \frac{2\gamma + 1}{\gamma - 1} u_1$ :

$$(2.7) \quad c_t + c c_{x'} = \alpha c + \beta x'.$$

Здесь

$$\alpha = - \frac{\gamma (\gamma - 1)^2}{(\gamma + 1) a_0^4} \omega_c \left[ a_0^2 (e_{k0}^* - e_{k0}) \left( \frac{2\gamma}{\gamma - 1} + \frac{k_2}{3T_0^{1/3}} \right) + \gamma e_{k0}^{*2} \exp \frac{\theta_k}{T_0} \right]; \\ \beta = - \frac{(2\gamma + 1) a_0^2}{(\gamma + 1)^2 S_0} \left[ \frac{1}{S_0} \left( \frac{dS}{dx} \right)_0^2 - \left( \frac{d^2 S}{dx^2} \right)_0 \right].$$

Уравнение (2.7) можно переписать в виде автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(2.8) \quad \frac{dc}{dt} = \alpha c + \beta x', \quad \frac{dx'}{dt} = c.$$

Исследование решений системы (2.8) в окрестности особой точки  $c = x' = 0$  качественно проведено в [8]. Как следует из полученных результатов, возможна классификация течений колебательно-релаксирующего газа с переходом через скорость звука: трансзвуковое течение устойчиво при  $\alpha < 0$  и неустойчиво при  $\alpha > 0$ , за исключением случая  $\beta > 0$ ,  $du_1/dx' > 0$ . Заметим, что  $\alpha > 0$  имеет место при достаточно сильном возбуждении колебательных степеней свободы:

$$(2.9) \quad e_{k0} - e_{k0}^* > \frac{\gamma e_{k0}^{*2} \exp \frac{\theta_k}{T_0}}{a_0^2 \left( \frac{2\gamma}{\gamma - 1} + \frac{k_2}{3T_0^{1/3}} \right)}.$$

Рассмотрим конкретные условия течений колебательно-релаксирующего газа. Если изучается течение равновесного газа, то  $e_{k0}^* = e_{k0}$ , в минимальном сечении трубки тока  $(dS/dx)_0 = 0$  и  $(d^2 S/dx^2)_0 > 0$ , поэтому  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$  и течения с переходом через скорость звука типа дозвук — сверхзвук, сверхзвук — дозвук устойчивы.

Достаточно сильное возбуждение колебательных степеней свободы (см. (2.9)) приведет к тому, что значение  $\alpha$  будет положительным, при этом  $e_{k0}^* < e_{k0}$  и  $(dS/dx)_0 > 0$ . Если теперь  $\beta < 0$  (т. е.  $(d^2 S/dx^2)_0 < (dS/dx)_0^2/S_0$ ), то трансзвуковое течение становится неустойчивым (в том числе неустойчивым станет и течение с переходом типа дозвук — сверхзвук). Таким образом, течение с переходом от дозвукового режима к сверхзвуковому неустойчиво в колебательно-возбужденном газе, текущем по каналу с постоянно или ускоренно уменьшающимся поперечным сечением. Если же  $\beta > 0$  (трубки тока расширяются очень быстро), то трансзвуковое течение с переходом дозвук — сверхзвук устойчиво, течение с переходом сверхзвук — дозвук неустойчиво.

Если имеет место неравномерность газа в том смысле, что  $e_{k0}^* > e_{k0}$ , то  $\alpha < 0$ , но при этом  $(dS/dx)_0 < 0$ , и возможны случаи  $\beta < 0$  (сужение трубок тока постоянно или увеличивается) и  $\beta > 0$  (сужение трубок тока замедляется). И в первом, и во втором случаях все возможные трансзвуковые течения устойчивы.

Газ	$\theta_h$ , К	$T_h$ , К	$\omega$ , с <sup>-1</sup>	$\alpha$ , с <sup>-1</sup>	$\beta$ , с <sup>-2</sup>	$\bar{x}$ , м
N <sub>2</sub>	3395	100	31,98	-0,0086	10 <sup>5</sup>	0,5
N <sub>2</sub>	3395	300	31,98	-0,0033	10 <sup>5</sup>	0,5
N <sub>2</sub>	3395	1000	31,98	15,02	10 <sup>5</sup>	0,506
N <sub>2</sub>	3395	2000	31,98	97,11	10 <sup>5</sup>	0,5349
CO	3080	300	7199	-1,759	93,840	0,5
CO	3080	500	7199	159,4	92 550	0,5589
O <sub>2</sub>	2239	300	21·10 <sup>5</sup>	-4427	87 970	0,5

Проведем расчеты коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  для конкретных газов по данным [14]. Пусть площадь поперечного сечения трубки тока определяется формулой

$$S = 1 - \bar{x}(1 - \bar{x}), \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1.$$

Для давления и температуры приняты следующие значения:  $p = 101\,320$  Па,  $T = 300$  К. По заданным параметрам состояния газа определяется критическая точка и в этой точке рассчитываются  $\alpha$ ,  $\beta$ . Результаты расчетов сведены в таблицу, откуда видно, что колебательное возбуждение молекул азота и окиси углерода приводит к превращению устойчивых трансзвуковых течений этих газов в неустойчивые. Трансзвуковые течения молекулярного кислорода устойчивы, так как колебательное возбуждение молекул этого газа быстро релаксирует к равновесию.

Полученные результаты применимы в задачах трансзвукового течения газа через сопло и в задачах обтекания тела с образованием местной сверхзвуковой зоны.

Авторы выражают благодарность А. Г. Куликовскому за обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике.— М.: Наука, 1973.
2. Michel R., Marchaud F., Le Gallo J. Etude des écoulements transsoniques autour des profils lenticulaires, a incidence nulle // Office National d'Etudes et de Recherches Aeronautiques.— 1953.— N 65.
3. Ван Дайк М. Альбом течений жидкости и газа.— М.: Мир, 1986.
4. Никольский А. А., Таганов Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения // ПММ.— 1946.— Т. 10, № 4.
5. Черный Г. Г. Газовая динамика.— М.: Наука, 1988.
6. Куо И. Х., Сирс У. Р. Плоские дозвуковые и трансзвуковые потенциальные течения // Общая теория аэродинамики больших скоростей/Под ред. У. Р. Сирса.— М.: Воениздат, 1962.
7. Кантровиц А. Образование и устойчивость прямых скачков при установившихся течениях в каналах // Основы газовой динамики/Под ред. Г. Эммонса.— М.: ИЛ, 1963.
8. Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А. Об устойчивости произвольных стационарных течений в окрестности точек перехода через скорость звука // ПММ.— 1967.— Т. 31, вып. 4.
9. Куо У. Н. On the stability of two-dimensional smooth transonic flows // J. Aeronaut. Sciences.— 1951.— V. 18.
10. Кузьмин А. Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1990.
11. Рыжов О. С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лавалья.— М.: ВЦ АН СССР, 1965.
12. Еременко В. А., Рыжов О. С. О течении в местной сверхзвуковой зоне у профиля крыла бесконечного размаха // ДАН СССР.— 1978.— Т. 240, № 3.

13. Богданов А. Н., Куликовский В. А. Распространение нестационарных слабых ударных волн в колебательно-неравновесном газе, подверженном действию внешнего излучения // ПМТФ.— 1990.— № 5.
14. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике/Под ред. Г. И. Майкапара.— М.: Машиностроение, 1972.
15. Богданов А. Н., Куликовский В. А. Стационарные сверхзвуковые течения колебательно-возбужденного газа около тонких тел // ПМТФ.— 1993.— № 1.
16. Гудерлей К. Г. Теория околосвуковых течений.— М.: ИЛ, 1960.
17. Зауер Р. Течения сжимаемой жидкости.— М.: ИЛ, 1954.

г. Москва

Поступила 10/XII 1991 г.

УДК 537.86/87 : 530.182; 533.6.013.42

В. П. Реутов

### НЕЛИНЕЙНЫЙ ФЛАТТЕР ПЛАСТИН В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ СЛАБОСЖИМАЕМОГО ТЕЧЕНИЯ

Изучение установившихся колебаний пластин в потоках жидкости и газа (нелинейного панельного флаттера) позволяет определить реальный уровень вибраций обтекаемой поверхности. В настоящее время имеется большое число работ по нелинейному флаттеру пластин в сверхзвуковом однородном потоке (см., например, [1—3]). В [4] продемонстрирована возможность возникновения динамического хаоса при сверхзвуковом панельном флаттере. Решение аналогичной задачи для дозвукового течения связано с принципиальной необходимостью учета взаимодействия прогиба пластин с пограничным слоем этого течения.

В данной работе изучается нелинейный флаттер одной пластины и системы из двух смежных пластин с закрепленными краями, находящихся под турбулентным пограничным слоем слабосжимаемого (существенно дозвукового) течения. Пластины состыкованы вплотную последовательно по течению на одном уровне с жесткой плоской поверхностью. Плотность неподвижной среды с противоположной стороны поверхности предполагается пренебрежимо малой. Выясняется возможность возникновения динамического хаоса в такой системе. Анализ основывается на результатах работ [5, 6], в которых определялся линейный отклик среднего течения на одноименные гармонические колебания пластинок.

**1. Аналитические аппроксимации для элементов матрицы присоединенных упругостей.** Следуя [6], рассмотрим колебания смежных пластинок в плоскопараллельном потоке, профиль скорости которого совпадает с профилем продольной скорости среднего течения в турбулентном пограничном слое. Прогиб каждой пластинки будем аппроксимировать первой модой галеркинских разложений, использованного в [6], где даны также граничные условия на краях пластин и ограничения на их геометрические размеры. Для силового отклика течения на гармонические ( $\sim e^{-i\omega t}$ ) колебания пластин можно записать выражение вида [6]

$$(1.1) \quad F_{1,2\omega}^{(0)} = -\rho u_{\infty}^2 k_0 (GA_{1,2\omega} + G_{1,2}A_{2,1\omega}).$$

Здесь и далее сохранены обозначения [6]:  $A_{j\omega}$  — амплитуда первой моды прогиба  $j$ -й пластинки;  $G$  и  $G_{1,2}$  — элементы матрицы безразмерных присоединенных упругостей (для колебаний на первой моде);  $\rho$  — плотность движущейся жидкости;  $\delta$  — толщина пограничного слоя;  $k_0 = \pi/L_1$  ( $L_1$  — размер пластин по потоку); верхний индекс (0) означает приближение несжимаемой жидкости.

Для описания негармонических колебаний пластин с нулевыми начальными возмущениями в потоке будем рассматривать (1.1) как связь