ПМТФ, № 2, 1962

СТАЦИОНАРНОЕ КОНВЕКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ КАНАЛЕ

С. А. Регирер

(*Москва*)

Рассматриваются стационарная конвекция и устойчивость вязкой проводящей жидкости, заполняющей круглый вертикальный канал, при наличии джоулевой диссипации и азимутального магнитного поля.

1. Уравнения магнитной гидродинамики для конвективных процессов в вертикальных каналах [1] обладают семейством точных решений в цилиндрических координатах[1]

$$v_r = v_\theta = 0, \qquad v_z = v(r, \theta), \qquad H_r = 0, \qquad H_\theta = \frac{2\pi rj}{c}, \qquad H_z = H_z(r, \theta)$$

$$T = t(r, \theta) + z\gamma, \qquad T_e = t_e(r, \theta) + z\gamma \qquad (\gamma, j = \text{const}) \tag{1.1}$$

причем скорость v, индуцированное магнитное поле H_z и температура в канале t и в окружающей среде t_e удовлетворяют уравнениям

$$\eta \triangle v + \varkappa \frac{H_\theta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} + \rho\beta g t = 0, \qquad \frac{H_\theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu_m \triangle H_z = 0 \tag{1.2}$$

$$c_v \rho v \gamma = k \triangle t + \frac{j^2}{\sigma}, \qquad \triangle t_e = 0 \qquad \left(\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)$$

Рассмотрим при помощи этих уравнений задачу о конвективном течении вязкой жидкости в круглом цилиндрическом канале радиуса r_0 при наличии джоулевой диссипации и азимутального магнитного поля, созданных продольным электрическим током $j_z = j$, пропускаемым через жидкость.

Предельные условия для системы (1.2) состоят в следующем: на оси канала ($r = 0$) скорость, магнитное поле и температура конечны; на стенке канала ($r = r_0$) скорость и индуцированное магнитное поле обращаются в нуль, а температура и тепловой поток непрерывны; при $r \to \infty$ в массиве задан горизонтальный тепловой поток q_e. Ограничиваясь рассмотрением только свободной конвекции, потребуем также, чтобы расход жидкости через сечение канала был равен нулю. Заметим, что обращение H_z в нуль при $r = r_0$ связано с предположением о диэлектричности массива.

Рассматриваемая задача решалась в работе [1] для простого частного случая, когда вертикальный градиент температуры γ был равен нулю.

Введем безразмерные величины

$$r' = \frac{r}{r_0}, \quad v' = v\frac{r_0}{\nu}, \quad H_\theta' = \frac{cH_\theta}{2\pi r_0 j}, \quad H_z' = \frac{cH_z}{2\pi r_0 j}, \quad t' = \frac{t}{|\gamma| r_0}$$

$$t_e' = \frac{t_e}{|\gamma| r_0}, \quad \chi = \frac{k_e}{k}, \quad q_e' = \frac{q_e}{|\gamma| k_e}, \quad \Phi' = \frac{r_0 j^2}{c_v \eta |\gamma| \sigma}, \quad P = \frac{c_v \eta}{k}$$

$$P_m = \frac{\nu}{\nu_m}, \quad M = \frac{2\pi\mu r_0^2 j}{c^2}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}, \quad G = \frac{\beta g |\gamma| r_0^4}{\nu^2}, \quad R = PG, \quad \delta = \frac{\gamma}{|\gamma|}$$

[1] Здесь и далее сохранены обозначения статьи [1].

Отбрасывая далее штрихи, запишем в новых переменных уравнения (1.2) и сформулированные выше предельные условия

$$\triangle v + \frac{M^2}{P_m}\frac{\partial H_z}{\partial \theta} + Gt = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{P_m}\triangle H_z = 0 \tag{1.3}$$

$$\delta v = \frac{1}{P}\triangle t + \Phi, \qquad \triangle t_e = 0$$

$$v,\ H_z,\ t \text{ конечны при } r = 0$$

$$v = H_z = 0, \qquad t = t_e, \qquad \frac{\partial t}{\partial r} = \chi \frac{\partial t_e}{\partial r} \quad \text{при } r = 1 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial t_e}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial t_e}{\partial \theta}\sin\theta \to -q_e \quad \text{при } r \to \infty$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 rv(r,\theta)\,dr\,d\theta = 0$$

Решение системы (1.3), (1.4) при отличных от нуля Φ и q_e будем искать в виде

$$v = u_0(r) + u_1(r)\cos\theta, \qquad t = t_0(r) + t_1(r)\cos\theta$$
$$H_z = h_0(r) + h_1(r)\sin\theta, \qquad t_e = t_{e0}(r) + t_{e1}(r)\cos\theta \tag{1.5}$$

Тем самым предполагается, что асимметричная составляющая скорости имеет различное направление по обе стороны плоскости $\theta = \pm\pi/2$, которая перпендикулярна горизонтальному тепловому потоку на бесконечности.

Подстановка (1.5) в (1.3), (1.4) приводит к уравнениям

$$D_0u_0 + Gt_0 = 0, \qquad D_0h_0 = 0, \qquad \delta u_0 = \frac{1}{P}D_0t_0 + \Phi, \qquad D_0t_{e0} = 0 \tag{1.6}$$

$$D_1u_1 + \frac{M^2}{P_m}h_1 + Gt_1 = 0, \qquad -u_1 + \frac{1}{P_m}D_1h_1 = 0, \qquad \delta u_1 = \frac{1}{P}D_1t_1$$

$$D_1t_{e1} = 0 \qquad \left(D_\nu = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2}\right) \tag{1.7}$$

с предельными условиями

$$u_i,\ \ h_i,\ \ t_i \text{ конечны при } r = 0 \quad (i = 0, 1)$$

$$u_i = h_i = 0, \quad t_i = t_{ei}, \quad t_i' = \chi t'_{ei} \quad \text{при } r = 1$$

$$t_{e1}'\cos^2\theta + \frac{1}{r}t_{e1}\sin^2\theta \to -q_e \quad \text{при } r \to \infty \tag{1.8}$$

$$\int_0^1 ru_0(r)\,dr = 0$$

Системы (1.6) и (1.7) решаются независимо. Каждая из них сводится к одному уравнению четвертого порядка, общее решение которого выражается через цилиндрические функции. Удовлетворяя условиям (1.8), получим следующие окончательные формулы:

$$v = \frac{\Phi\delta}{2F_0}[2F_0 + (\lambda_0 I_{00} - 2I_{10})J_0(\lambda_0 r) + (2J_{10} - \lambda_0 J_{00})I_0(\lambda_0 r)] +$$
$$+ \frac{2q_e\lambda_1^2\cos\theta}{P\delta(F_1 - f_1)}\left[\frac{J_1(\lambda_1 r)}{J_{11}} - \frac{I_1(\lambda_1 r)}{I_{11}}\right] \tag{1.9}$$

$$H_z = \frac{2q_e P_m \sin\theta}{P\delta(F_1 - f_1)}\left[2r - \frac{J_1(\lambda_1 r)}{J_{11}} - \frac{J_1(\lambda_1 r)}{I_{11}}\right] \tag{1.10}$$

$$t = \frac{\Phi\delta\lambda_0^2}{2GF_0}\left[(\lambda_0 I_{00} - 2I_{10}) J_0(\lambda_0 r) - (2J_{10} - \lambda_0 J_{00}) I_0(\lambda_0 r)\right] - \\ - \frac{2q_e\cos\theta}{F_1 - f_1}\left[\frac{2M^2 r}{R\delta} + \frac{J_1(\lambda_1 r)}{J_{11}} + \frac{I_1(\lambda_1 r)}{I_{11}}\right] \tag{1.11}$$

$$t_e = \frac{\Phi\delta\lambda_0^2}{GF_0}\left(\lambda_0 J_{00} I_{00} - J_{00} I_{10} - J_{10} I_{00} - \frac{RF_0}{2\chi\lambda_0^2\delta}\ln r\right) - \\ - q_e\cos\theta\left\{r - \frac{1}{r}\left[1 + \frac{4\lambda_1^4}{R\delta(F_1 - f_1)}\right]\right\} \tag{1.12}$$

$$\lambda_0^4 = -R\delta, \qquad \lambda_1^4 = -(M^2 + R\delta), \qquad J_{\nu\mu} = J_\nu(\lambda_\mu), \qquad I_{\nu\mu} = I_\nu(\lambda_\mu)$$

$$F_0 = J_{00} I_{10} - J_{10} I_{00}, \qquad F_1 = \lambda_1\left(\frac{J_{01}}{J_{11}} + \frac{I_{01}}{I_{11}}\right), \qquad f_1 = 2\left(1 + \frac{M^2 - \chi\lambda_1^4}{M^2 + \lambda_1^4}\right)$$

Осесимметричная часть найденного решения не связана с магнитогидродинамическим взаимодействием и определяется только величиной джоулевой диссипации. Если одновременно устремить Φ и M^2 к нулю, то в формулах (1.9), (1.11), (1.12) останутся лишь члены, отражающие асимметричную часть процесса, которые известны из обычной гидродинамической теории [2]. В предельном случае, когда Φ конечно и $M^2 \to \infty$, с ростом магнитного поля асимметричная часть потока подавляется. В этом легко убедиться, введя в (1.9) функции Томсона и их асимптотические представления при больших $|\lambda_1|$ (см., например, [1]).

2. Исследуем далее трансцендентные уравнения

$$F_0(z) = J_0(z^{1/4}) I_1(z^{1/4}) - J_1(z^{1/4}) I_0(z^{1/4}) = 0 \tag{2.1}$$

$$F_1(z) - f_1(z) = z^{1/4}\left[\frac{J_0(z^{1/4})}{J_1(z^{1/4})} + \frac{I_0(z^{1/4})}{I_1(z^{1/4})}\right] - 2\left(1 + \frac{M^2 - \chi z}{M^2 + z}\right) = 0 \tag{2.2}$$

Обозначим через z_0 корень уравнения (2.1), которому соответствует наименьшее положительное значение $R_0 = -\delta z_0$; аналогично определим z_1 как корень (2.2), которому соответствует наименьшее положительное значение $R_1 = -\delta(M^2 + z_1)$. Очевидно, что при $R = R_0$ и $R = R_1$ решение (1.9) — (1.12) теряет устойчивость.

Корни уравнения (2.1) не зависят от M^2 и χ; все они положительны и наименьший из них $z_0 \approx 451$ лежит между первым и вторым корнями функции $J_1(z^{1/4})$. Критическое число Рэлея, определяемое через z_0, есть $R_0 = z_0$, а соответствующий критический градиент температуры отрицателен ($\delta = -1$).

При отсутствии магнитного поля ($M^2 = 0$) наименьший вещественный корень уравнения (2.2) также положителен и всегда меньше первого корня функции $J_1(z^{1/4})$. Поэтому соответствующее ему критическое число Рэлея есть $R_1(0, \chi) = z_1(0, \chi)$ и $R_1(0, \chi) < R_0$. Значения $R_1(0, \chi)$ вычислены в работе [2].

В предельном случае бесконечной теплопроводности массива ($\chi \to \infty$) и при конечной величине поля $z_1(M^2, \infty)$ совпадает с первым корнем $J_1(z^{1/4})$. Поэтому $R_1(M^2, \infty) = M^2 + z_1 \approx M^2 + 215{,}8$. Легко видеть, что при слабых полях, как и в обычной гидродинамике, $R_1(M^2, \infty) < R_0$, а при бóльших может иметь место обратное неравенство.

В общем случае корни уравнения (2.2) могут быть как положительными, так и отрицательными. Используя численный расчет вместе с некоторыми оценками, удается установить, что $R_1(M^2, \chi)$ есть возрастающая функция своих аргументов ($M^2 \geqslant 0$, $\chi \geqslant 0$), причем критический градиент температуры всегда отрицателен ($\delta = -1$), так как $z_1(M^2, \chi) + M^2 > 0$, Заметим, что нулевое значение z, хотя оно и удовлетворяет уравнению (2.2), не является собственным числом задачи. Исключение составляет специальный случай, когда $M^2 = 96(\chi + 1)$. Это обнаруживается путем непосредственного решения исходных уравнений при $R\delta + M^2 = 0$.

Так как $z_1(M^2, \chi)$ стремится к конечному пределу при $M^2 \to 0$, то $f_1(z)$, а вместе с ней и корень z_1 при $M^2 \ll 1$ практически не зависят от M^2. Следовательно, для слабых полей

$$R_1(M^2, \chi) \approx z_1(0, \chi) + M^2 \tag{2.3}$$

Возрастание M^2 приводит к убыванию z_1, причем $z_1 = 0$ при $M^2 = 96(\chi + 1)$. Справедливы неравенства

$$z_1 \geqslant 0, \quad R_1 \geqslant M^2 \quad \text{при } M^2 \leqslant 96(\chi + 1)$$
$$z_1 < 0, \quad R_1 < M^2 \quad \text{при } M^2 > 96(\chi + 1)$$

показывающие, что увеличение R_1 с ростом M^2 ослабляется.

Чтобы исследовать асимптотическое поведение $R_1(M^2, \chi)$ для $M^2 \gg 1$, воспользуемся тем, что тогда $z_1 < 0$. Для отрицательных z имеем

$$\overline{J_0(z^{1/4})} = I_0(z^{1/4}), \qquad \overline{z^{-1/4}J_1(z^{1/4})} = z^{-1/4}I_1(z^{1/4})$$

(чертой обозначены комплексно сопряженные величины). С их помощью (2.2) может быть переписано в виде [1]

$$|z|^{1/4}\psi(|z|^{1/4})\cos\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2} + \beta(|z|^{1/4})\right] = 1 + \frac{M^2 - \chi z}{M^2 + z} \tag{2.4}$$

где

$$\frac{J_0(z^{1/4})}{J_1(z^{1/4})} = \psi(|z|^{1/4})\exp\frac{i\pi}{2}\beta(|z|^{1/4})$$

Вещественные функции $\psi(|z|^{1/4})$ и $\beta(|z|^{1/4})$ при возрастании $|z|$ от 0 до ∞ убывают соответственно от $+\infty$ до $+1$ и от -0.5 до -1 (см. [3], стр. 366). Левая часть уравнения (2.4) есть монотонно возрастающая функция $|z|$, равная двум при $|z| = 0$. Используя это обстоятельство, рассуждением от противного легко показать, что при $M^2 \to \infty$ корень уравнения (2.4) также неограниченно возрастает по модулю, но при этом всегда $z_1 + M^2 > 0$.

Поэтому большие по модулю корни (2.4) должны удовлетворять приближенному уравнению

$$\frac{\sqrt{2}}{2}|z|^{1/4} \approx 1 + \frac{M^2 - \chi z}{M^2 + z} \qquad (z < 0) \tag{2.5}$$

которое выведено на основе отмеченных выше свойств функций ψ и β. Отсюда получаем

$$R_1 = M^2 + z_1 \approx \frac{2z_1(\chi + 1)}{4 - \sqrt{2}|z_1|^{1/4}} \approx \sqrt{2}|z_1|^{3/4}(\chi + 1) \sim \sqrt{2}M^{3/2}(\chi + 1) \tag{2.6}$$

Асимптотическая формула (2.6) справедлива только при $M^2 \gg 96(\chi + 1)$, когда z_1 отрицательно и велико по модулю.

3. Результаты предыдущего раздела позволяют сделать некоторые выводы относительно устойчивости рассматриваемых конвективных течений.

Будем называть потерей устойчивости первого рода или разрушением течения случай, когда при достижении критического числа Рэлея $R^\times$ ста-

[1] Аналогичное преобразование позволяет доказать высказанное ранее утверждение об отсутствии отрицательных корней у уравнения (2.1).

новится невозможным течение, характеризуемое формулами (1.5) — при этом коэффициенты в формулах (1.9) — (1.12) неограниченно возрастают. Потерей устойчивости второго рода назовем случай, когда при достижении критического числа Рэлея $R^\times$ на стационарное движение или состояние равновесия, существующее при $R < R^\times$, накладывается критический режим, существующий только при $R = R^\times$. Оба этих частных вида потери устойчивости можно встретить в задачах обычной гидродинамической теории конвекции [2,4].

Характер потери устойчивости зависит от значений Φ и q_e. Возможны следующие частные случаи:

(а) Случай $\Phi \neq 0$, $q_e \neq 0$. При $R = R_1$ и $R = R_0$ происходит разрушение течения.

(б) Случай $\Phi \neq 0$, $q_e = 0$. При $R = R_1$ происходит потеря устойчивости второго рода: на стационарный осесимметричный процесс накладывается критический асимметричный. Решение при $R = R_1$ имеет вид (1.5), где u_0, t_0, t_{e0} определены так же, как и в (1.9) — (1.12), и

$$
\begin{aligned}
u_1(r) &= C\,[J_1(\lambda_1 r)\,I_{11} - J_{11} I_1(\lambda_1 r)] \qquad (C = \text{const})\\
h_1(r) &= \frac{CP_m}{\lambda_1^2}\{2J_{11}I_{11}r - [J_1(\lambda_1 r)\,I_{11} + J_{11}I_1(\lambda_1 r)]\}\\
t_1(r) &= -\frac{CP}{\lambda_1^2}\left\{\frac{2M^2}{R}J_{11}I_{11}r - [J_1(\lambda_1 r)\,I_{11} + J_{11}I_1(\lambda_1 r)]\right\}\\
t_{e1}(r) &= 2CJ_{11}I_{11}\lambda_1^2 / Gr
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

При $R = R_0$ течение разрушается без возникновения асимметрии.

(в) Случай $\Phi = 0$, $q_e \neq 0$. При $R = R_1$ происходит разрушение асимметричного течения; при $R = R_0$ наступает потеря устойчивости второго рода: на стационарный асимметричный процесс накладывается критический осесимметричный. Решение при $R = R_0$ имеет вид (1.5), где u_1, h_1, t_1, t_{e1} те же, что и в (1.9) — (1.12), и

$$
\begin{aligned}
u_0(r) &= C\,[J_0(\lambda_0 r)\,I_{00} - J_{00}I_0(\lambda_0 r)] \qquad (C = \text{const})\\
t_0(r) &= \frac{C\lambda_0^2}{G}[J_0(\lambda_0 r)\,I_{00} + J_{00}I_0(\lambda_0 r)]\\
t_{e0}(r) &= t_0(1) = 2CJ_{00}I_{00}\lambda_0^2 / G
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

(г) Случай $\Phi = 0$, $q_e = 0$. При $R = R_1$ и $R = R_0$ происходит потеря устойчивости равновесия второго рода и возникают асимметричный ($R = R_1$) или осесимметричный ($R = R_0$) критические режимы, описываемые формулами (3.1) с соответствующими тригонометрическими множителями или (3.2).

Последние два случая не могут встретиться в задачах с конечной проводимостью жидкости и приводятся лишь для удобства сравнения с расчетом, выполненным при отсутствии поля и диссипативного разогрева [2].

Принимая во внимание результаты п. 2, можно утверждать, что для слабых полей $R_1 < R_0$ и неустойчивость того или иного рода наступает всегда при $R = R_1$, причем начало неустойчивости затягивается с ростом магнитного поля. Для сильных полей $R_1 > R_0$ и неустойчивость возникает при $R = R_0$; это критическое число, так же как и вся осесимметричная часть процесса, от магнитного поля не зависит.

Зависимость R_1 от M^2 при $M^2 \ll 1$ оказывается квадратичной, подобно некоторым другим задачам [5, 6]. Асимптотическое же поведение $R_1(M^2, \chi)$ существенно отличается от найденных в работе [5] формул $R^\times \sim M$ и $R^\times \sim M^2$, относящихся к случаям, когда внешнее магнитное поле параллельно или перпендикулярно плоскости раздела асимметричной части течения. Установление в рассматриваемой задаче зависимости промежуточного типа ($R^\times \sim M^{3/2}$) представляется естественным, так как здесь положение плоскости раздела не влияет на магнитогидродинамические эффекты.

4. Уместно поставить вопрос о существовании критических режимов более сложного вида

$$u_n(r)\cos n\theta, \quad t_n(r)\cos n\theta, \quad t_{en}(r)\cos n\theta, \quad h_n(r)\sin n\theta \quad (n \geqslant 2) \tag{4.1}$$

или

$$u_n(r)\sin n\theta, \quad t_n(r)\sin n\theta, \quad t_{en}(r)\sin n\theta, \quad h_n(r)\cos n\theta \quad (n \geqslant 1) \tag{4.2}$$

Вычисления, аналогичные п. 2, показывают, что задача (1.3), (1.4) имеет нетривиальные решения вида (4.1), если $z = -(M^2n^2 + R\delta)$ удовлетворяет уравнению

$$z^{1/4}\left[\frac{J_{n-1}(z^{1/4})}{J_n(z^{1/4})} + \frac{I_{n-1}(z^{1/4})}{I_n(z^{1/4})}\right] = 2n\left(1 + \frac{M^2n^2 - \chi z}{M^2n^2 + z}\right) \tag{4.3}$$

Обозначая через R_n наименьшее критическое число Рэлея, соответствующее (4.3), можно показать, что при фиксированных M^2, χ всегда $R_n > R_{n-1} > \ldots > R_1$. Поэтому критическое число, которому в действительности отвечает потеря устойчивости того или иного рода, есть либо R_1, либо R_0 в зависимости от величины магнитного поля.

Добавление к ранее найденным решениям составляющих типа (4.2) также возможно только при $R = R_n$ ($n \geqslant 1$), причем оно сводится к повороту плоскости раздела и, следовательно, может не приниматься во внимание.

Заметим в заключение, что для идеально проводящей жидкости вообще не существует асимметричных решений типа (1.5). Могут иметь место равновесие (при $R < R_0$) и критический осесимметричный режим (при $R = R_0$), если $q_e = 0$. Если же $q_e \neq 0$, то не существует решений типа (1.1), что связано с невозможностью поддержания прямолинейного течения. Этот вывод может быть объяснен с точки зрения принципа «вмороженности» силовых линий.

Примечание при корректуре. Автору стала известна работа [7], в которой выведено уравнение (4.3) при $\chi = 0$ и вычислены значения его корней для $n = 1$ и различных чисел M^2. Выводы относительно устойчивости, как сделанные на основе этого вычисления, так и полученные из других соображений, совпадают с излагаемыми в данной статье. Однако в работе [7] без достаточных оснований пренебрегается джоулевым теплом от продольного тока и связанным с ним стационарным конвективным течением.

Поступила 2 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Регирер С. А. Магнитогидродинамические задачи об установившейся конвекции в вертикальных каналах. ПМТФ, 1962, № 1.
2. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. Гостехиздат, М.— Л., 1952.
3. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехиздат, М.— Л., 1949.
4. Morton B. R. Laminar convection in uniformly heated vertical pipes. J. Fluid Mech., 1960, vol. 8, No. 2, p. 227—240.
5. Жуховицкий Е. М. Об устойчивости неравномерно нагретой электропроводящей жидкости в магнитном поле. Физ. металлов и металловед., 1958, т. VI, вып. 3, стр. 386—394.
6. Регирер С. А. О конвективном движении проводящей жидкости между параллельными вертикальными пластинами в магнитном поле. ЖЭТФ, 1959, т. 37, вып. 1 (7), стр. 212—216.
7. Yih Chia-shun. Inhibition of hydrodynamic instability by an electric current. Phys. Fluids, 1959, vol. 2, No. 2, p. 125—130.