К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ ПО КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Л. М. Куршин

(Новосибирск)

В работе [1] была предложена квазистатическая постановка задач устойчивости стержней в условиях ползучести на основе критерия $\dot{\tau} = 0$, где τ — прогиб стержня. Смысл предложенного критерия, как было показано в [2], состоит в том, что если приложить к первоначально прямолинейному стержню некоторую поперечную нагрузку и затем снять ее, то в зависимости от величины осевой деформации ползучести, накопленной к моменту снятия нагрузки, прогибы стержня будут убывать (устойчивость) или возрастать (неустойчивость). В критический момент времени для рассматриваемого движения $\dot{\tau} = 0$.

При решении задач устойчивости пластин в постановке [1] в случае, когда пространственные соотношения ползучести формулируются на основе теории течения, к получающемуся уравнению третьего порядка [3,4] должны быть присоединены начальные условия, которые позволили бы выделить класс движений, допускающий применение критерия устойчивости [1].

Выделение интегралов для пластинки путем рассмотрения ее движения после воздействия поперечной нагрузки, как это было сделано в [2] для стержней, не приводит к нужным результатам, так как, чтобы выделить однозначный класс движений, на нагрузку необходимо наложить некоторые дополнительные условия, которые непосредственно установить не удается.

В § 1 возмущенное движение стержня, к которому применяется критерий $\dot{\tau} = 0$, рассматривается с несколько иной точки зрения с тем, чтобы установить начальные условия, определяющие рассматриваемый класс движений.

В § 2 дано обобщение этих условий на пластинки.

§ 1. Рассмотрим шарнирно опертый стержень, нагруженный постоянной осевой силой T. Уравнение состояния при ползучести имеет вид

$$\dot{p} = A\sigma^n p^{-\alpha} \left(p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}\right) \tag{1.1}$$

Здесь σ — напряжение, p — деформация ползучести, ε — полная деформация. Линеаризируя уравнение (1.1) при малых прогибах стержня, получим уравнение

$$\delta\dot{p} = An\sigma^{n-1}p^{-\alpha}\delta\sigma - A\alpha\sigma^n p^{-\alpha-1}\delta p \tag{1.2}$$

где p и σ относятся к оси стержня, а δp, $\delta\sigma$ означают малые приращения соответствующих величин по толщине стержня.

Пусть в начальный момент движения, при котором $t = t^*$ и $p = p^*$, в результате воздействия некоторых возмущений стержень имеет начальный прогиб w^* и начальную деформацию ползучести δp^*. Интегрируя уравнение (1.2) при начальном условии $(\delta p)_{p=p^*} = \delta p^*$, получим

$$\delta p = \left(\frac{p}{p^*}\right)^{-\alpha} \delta p^* + \frac{n}{\sigma} p^{-\alpha} \int_{p^*}^{p} p^\alpha \delta\sigma \, dp \tag{1.3}$$

Учтем соотношения

$$\delta p = \delta\varepsilon - \frac{1}{E}\delta\sigma, \quad \delta\varepsilon = -zw_{xx} \tag{1.4}$$

и условие равновесия

$$\int \delta\sigma \, z dF = Tw \tag{1.5}$$

Полагая $\delta p^* = -zw_{cxx}$ и вводя для шарнирно опертого стержня $w = \tau(p) \sin \pi x/l$, $w_p = \tau_c^* \sin \pi x/l$, придем к уравнению для прогиба $\tau(p)$

$$(1 - \sigma^\circ)\tau - \left(\frac{p}{p^*}\right)^{-\alpha} \tau_c^* - \frac{En}{\sigma}\sigma^\circ p^{-\alpha} \int_{p^*}^{p} p^\alpha \tau(p)\, dp = 0 \tag{1.6}$$

$$\left(\sigma^\circ = \frac{T}{T_e}, \; T_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}\right)$$

где I — момент инерции сечения.

Решение уравнения (1.6)

$$\tau(p) = \frac{\tau_c^*}{1-\sigma^\circ}\left(\frac{p}{p^*}\right)^{-\alpha} e^{k(p-p^*)} \qquad \left(k = \frac{\sigma^\circ}{1-\sigma^\circ}\frac{En}{\sigma}\right) \tag{1.7}$$

соответствует возмущенному движению, исследуемому в квазистатической постановке [1,2]. Границе устойчивости ($kp = \alpha$) соответствует минимум функции (1.7).

В начальный момент движения при $p = p^*$ и $\tau = \tau^*$ имеем согласно (1.7)

$$\tau_c^* = (1-\sigma^\circ)\,\tau^* \tag{1.8}$$

Если ввести для $\delta\sigma$ выражение

$$\delta\sigma = z\tau_\sigma(p)\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}$$

то из уравнения (1.5) получим $\tau_\sigma = E\sigma^\circ\tau$, так что соотношение (1.8), определяющее начальную деформацию ползучести, примет вид

$$\tau_c^* = \tau^* - \tau_\sigma^*/E$$

Легко видеть, что это условие эквивалентно соотношению (1.4), отнесенному к начальной деформации ползучести δp^* при условии, что $\delta\sigma$ подчинены уравнению (1.5).

Таким образом, те возмущения, которые определяют движение вида (1.7), соответствуют следующим условиям: прогиб w^* при $p = p^*$ сопровождается напряжениями $\delta\sigma^*$, определяемыми условием (1.5), и в этот момент времени имеется деформация ползучести δp^*, причем

$$\delta p^* = \delta\varepsilon^* - \tau_\sigma^*/E \qquad (\delta\varepsilon = -zw_{xx}^*)$$

§ 2. Рассмотрим постановку задачи устойчивости пластинки и попытаемся сформулировать начальные условия, обобщая начальные условия для стержней.

Пусть уравнение состояния при ползучести имеет вид

$$\dot p_i = g(p_i, \sigma_i)\,\sigma_i \tag{2.1}$$

и пусть между составляющими тензора скоростей деформаций ползучести $\dot p_{ij}$ и составляющими девиатора напряжений $\sigma_{ij}^{\circ\circ}$ имеют место соотношения теории течения

$$\dot p_{ij} = \frac{3}{2}g(p_i, \sigma_i)\,\sigma_{ij}^{\circ\circ}, \qquad p_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2G}\sigma_{ij}^{\circ\circ} \tag{2.2}$$

Для интенсивностей напряжений и скоростей деформаций ползучести имеем

$$\sigma_i^2 = \frac{3}{2}\sigma_{ij}^{\circ\circ}\sigma_{ij}^{\circ\circ}, \qquad \dot p_i^2 = \frac{2}{3}\dot p_{ij}\dot p_{ij}, \qquad p_i = \int_0^t \dot p_i\,dt \tag{2.3}$$

Варьируя (2.1), (2.2), получим уравнения для малых приращений δp, $\delta\sigma$, $\delta\varepsilon$ по толщине пластинки

$$\delta\dot p_i = a\delta p_i + g(b+1)\,\delta\sigma_i$$

$$\delta\dot\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2G}\delta\dot\sigma_{ij}^{\circ\circ} = \frac{3}{2}g\delta\sigma_{ij}^{\circ\circ} + \frac{3}{2}\alpha_{ij}^{\circ\circ}(a\delta p_i + gb\delta\sigma_i) \tag{2.4}$$

$$a = \sigma_i\frac{\partial g}{\partial p_i}, \qquad b = \frac{\sigma_i}{g}\frac{\partial g}{\partial\sigma_i}, \qquad \alpha_{ij}^{\circ\circ} = \frac{\sigma_{ij}^{\circ\circ}}{\sigma_i}$$

При этом напряжения в срединной поверхности σ_{ij} от времени не зависят.

Рассмотрим движение пластинки в условиях ползучести после воздействия некоторого возмущения, вызвавшего к моменту времени, при котором $p_i = p_i^*$, некоторый прогиб w^* и деформацию ползучести δp_i^*.

Переходя к переменной p_i и интегрируя уравнения (2.4) при начальных условиях

$$\delta p_i = \delta p_i^*, \quad \delta\sigma_{ij}^{\circ\circ} = \delta\sigma_{ij}^{*\circ\circ} \text{ при } p_i = p_i^*$$

найдем

$$\delta p = \frac{g}{g^*}\delta p^* + \frac{g}{\sigma_i}\int_{p^*}^{p}\frac{1+b}{g}\delta\sigma_i dp \tag{2.5}$$

$$\delta\sigma_{ij}{}^{\circ\circ} = \delta\sigma_{ij}{}^{*\circ\circ} e^{\xi^*-\xi} + \frac{2}{3}Ee^{-\xi}\int_{p^*}^{p} e^{\xi}\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial p}dp -$$

$$-\alpha_{ij}{}^{\circ\circ}Ee^{-\xi}\int_{p^*}^{p} e^{\xi}\left[\frac{a}{g^*}\delta p^* + b\delta\sigma_i + \frac{a}{\sigma_i}\int_{p^*}^{p}\frac{1+b}{g}\delta\sigma_i dp\right]\frac{dp}{\sigma_i} \tag{2.6}$$

$$\xi = \frac{Ep_i}{\sigma_i}, \qquad \xi^* = \frac{Ep_i^*}{\sigma_i}, \qquad \alpha_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i}, \qquad p = p_i, \qquad p^* = p_i^*, \qquad \delta p^* = \delta p_i^*$$

Полагая для деформаций

$$\delta\varepsilon_{11} = -zw_{xx}, \qquad \delta\varepsilon_{22} = -zw_{yy}, \qquad \delta\varepsilon_{12} = -zw_{xy}$$

найдем, интегрируя (2.6) по толщине пластинки $2h$, изгибающие и крутящий моменты

$$G_1 = G_1^* e^{\xi^*-\xi} - EP^*\frac{\alpha_{11}e^{-\xi}}{g^*}\int_{p^*}^{p} e^{\xi}\frac{\partial g}{\partial p}dp -$$

$$-e^{-\xi}\int_{p^*}^{p} e^{\xi}\left[\frac{D}{2}\frac{\partial}{\partial p}(2w_{xx} + w_{yy}) + \alpha_{11}ER(M)\right]dp \qquad \left(D = \frac{8}{9}Eh^3\right) \tag{2.7}$$

Здесь

$$R(M) = \frac{b}{\sigma_i}M + \frac{a}{\sigma_i^2}\int_{p^*}^{p}\frac{1+b}{g}Mdp$$

$$M = \left(\alpha_{11} - \frac{1}{2}\alpha_{22}\right)G_1 + \left(\alpha_{22} - \frac{1}{2}\alpha_{11}\right)G_2 + 3\alpha_{12}H \tag{2.8}$$

$$P^* = \int_{-h}^{h}\delta p^* zdz \tag{2.9}$$

Вводя в уравнение

$$G_{1xx} + G_{2yy} + 2H_{xy} + 2h\sigma_i\Lambda w = 0 \tag{2.10}$$

выражения моментов (2.7) и исключая затем функцию M тем же путем, что и в работе [3], придем к уравнению

$$e^{\xi^*-\xi}(G_{1xx}^* + 2H_{xy}^* + G_{2yy}^*) - \frac{E}{g^*}\Lambda P^* e^{-\xi}\int_{p^*}^{p} e^{\xi}\frac{\partial g}{\partial p}dp +$$

$$+2h\sigma_i\Lambda w - De^{-\xi}\int_{p^*}^{p} e^{\xi}\left[\Delta\Delta\frac{\partial w}{\partial p} + \frac{bE}{\sigma_i}T + \frac{Ea}{\sigma_i^2}\int_{p^*}^{p}\frac{1+b}{g}T\,dp\right]dp = 0 \tag{2.11}$$

Здесь

$$T = \frac{1}{D}e^{\xi^*-\xi}\Lambda M^* - \frac{1}{D}e^{\xi^*-\xi}(G_{1xx}{}^* + G_{2yy}^* + 2H_{xy}^*) -$$

$$-\frac{2h\sigma_i}{D}\Lambda w + e^{-\xi}\int_{p^*}^{p} e^{\xi}\left[\Delta\Delta - \frac{3}{4}\Lambda\Lambda\right]\frac{\partial w}{\partial p}dp$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \Lambda = \alpha_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\alpha_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \alpha_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

В уравнение (2.11) входят величины, связанные с начальным моментом выжения: G_1^*, G_2^*, H^*, M^*, P^*.

Варьируя второе из соотношений (2.3) с учетом (2.1) и (2.2), получим

$$\delta p_i^* = \alpha_{ij}^{00} \, \delta p_{ij}^*$$

Интегрируя по толщине и учитывая соотношения (2.8) и (2.9), найдем

$$P^* = -\frac{2}{3} h^3 \Lambda w^* - \frac{1}{E} M^* \tag{2.12}$$

Выразим начальные значения моментов через прогибы при помощи обычных формул теории упругих пластин, но при этом введем некоторый множитель β, учитывающий релаксацию за счет начальной ползучести и позволяющий подчинить начальное состояние условиям равновесия (по аналогии с начальными условиями для стержней).

Таким образом

$$G_1^* = -\beta D \left(w_{xx}^* + \frac{1}{2} w_{yy}^* \right)$$

$$G_2^* = -\beta D \left(w_{yy}^* + \frac{1}{2} w_{xx}^* \right)$$

$$H^* = -\beta \frac{D}{2} w_{xy}^* \tag{2.13}$$

Для M^* согласно (2.8) получим

$$M^* = -{}^3/_4 \, D \beta \Lambda w \tag{2.14}$$

Имеем далее

$$G_{1xx}^* + G_{2yy}^* + 2H_{xy}^* = -\beta D \Delta\Delta w^* \tag{2.15}$$

Начальные условия (2.12)—(2.15) определяют движение, для которого при некотором значении p_i обращается в нуль производная от прогиба по времени.

Критическое значение p_i можно найти при помощи уравнения (2.11), если ввести начальные условия (2.12)—(2.15) и потребовать, чтобы в начальный момент движения при $p_i = p_i^*$ производная $\partial w / \partial p_i$ обращалась в нуль.

Полагая $p_i = p_i^*$ в (2.11), получим уравнение

$$-\beta D \Delta\Delta w^* + 2h\sigma_i \Lambda w^* = 0 \tag{2.16}$$

Дифференцируя (2.11) и полагая $p_i = p_i^*$ и $\partial w / \partial p_i = 0$, получим условие, определяющее границу устойчивости, которое с учетом (2.16) запишется в виде

$$\frac{E}{\sigma_i} \beta \Delta\Delta w^* + \frac{3}{4} \left[\beta \frac{E}{g^*} \frac{\partial g^*}{\partial \sigma_i} + (1-\beta) \frac{1}{g^*} \frac{\partial g^*}{\partial \sigma_i} \right] \Lambda\Lambda w^* = 0 \tag{2.17}$$

При заданных краевых условиях для w и заданном σ_i уравнением (2.16) определяется собственная функция w и фундаментальное число β. Уравнение (2.17) определяет границу устойчивости p_i^*. В общем случае p_i^* для разных точек пластины может получиться различным и для решения вопроса об устойчивости необходимо определить минимальное p_i^*.

В случае, когда переменные разделяются, критическое значение p_i^* будет общим для всей пластинки.

§ 3. Рассмотрим некоторые примеры. Пусть уравнение состояния имеет вид

$$\dot{p}_i = A \sigma_i^n p_i^{-\alpha}$$

Условие (2.17) запишется в виде

$$\beta \Delta\Delta w + \frac{3}{4} \left[\beta (n-1) - \alpha (1-\beta) \frac{\sigma_i}{E p_i} \right] \Lambda\Lambda w = 0 \tag{3.1}$$

Рассмотрим случай цилиндрической потери устойчивости шарнирно опертой пластинки при сжатии.

Имеем

$$\sigma_{11} = -\sigma, \qquad \sigma_{22} = -\frac{1}{2}\sigma, \qquad \sigma_{12} = 0, \qquad \sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma$$

$$\alpha_{11} = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad \alpha_{22} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \alpha_{12} = 0$$

Введем обозначение

$$\sigma^\circ = \frac{\sigma_i}{\sigma_e} \qquad \left(\sigma_e = \frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{E\pi^2h^2}{l^2}\right)$$

Здесь σ_e — интенсивность напряжений при упругой потере устойчивости.

Полагая $w = \tau \sin \pi x/l$, из уравнений (2.16) и (3.1) найдем

$$p_i^* = \frac{1-\sigma^\circ}{\sigma^\circ}\frac{\alpha\sigma_i}{En}$$

Это совпадает с результатом, полученным в работе [1] для стержней.

Для квадратной шарнирно опертой пластинки, сжатой в двух направлениях одинаковыми усилиями, имеем

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\sigma, \qquad \sigma_{12} = 0, \qquad \sigma_i = \sigma, \qquad \sigma_e = \frac{8}{9}\frac{E\pi^2h^2}{l^2}$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = -1, \qquad \alpha_{12} = 0, \qquad \sigma^\circ = \frac{\sigma_i}{\sigma_e}$$

Полагая

$$w = \tau \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}$$

из уравнений (2.16) и (3.1) найдем

$$p_i^* = \frac{1-\sigma^\circ}{\sigma^\circ}\frac{3\alpha\sigma_i}{(1+3n)E}$$

Для длинной шарнирно опертой пластинки, сжатой равномерно в продольном направлении, имеем

$$\sigma_{11} = -\sigma, \qquad \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0, \qquad \sigma_i = \sigma, \qquad \sigma_e = \frac{16}{9}\frac{E\pi^2h^2}{b^2}$$

$$\alpha_{11} = -1, \qquad \alpha_{22} = \alpha_{12} = 0, \qquad \sigma^\circ = \frac{\sigma_i}{\sigma_e}$$

Здесь b — ширина пластинки.

Полагая

$$w = \tau \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}, \qquad \lambda = \frac{a}{b}$$

получим из (2.16)

$$\beta = 4\sigma^\circ\frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}$$

Значение λ определим из условия, чтобы β было максимальным, что соответствует минимальной начальной деформации ползучести. Таким образом

$$\lambda = 1, \qquad \beta = \sigma^\circ$$

Из уравнения (3.1) найдем

$$p_i^* = \frac{1-\sigma^\circ}{\sigma^\circ}\frac{3\alpha\sigma_i}{(13+3n)E}$$

Отметим, что во всех случаях решения удовлетворяют условию $p_i^* = 0$ при $\sigma^\circ = 1$.

Поступила 28 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.
2. Rabotnow Y. N. The Theory of Creep and its Applications. «Plasticity». Pergamon Press., 1960.
3. Куршин Л. М. Устойчивость пластинок в условиях ползучести. ПМТФ, 1962, № 1.
4. Куршин Л. М. Устойчивость стержней в условиях ползучести. ПМТФ, 1961, № 6.