ЛИТЕРАТУРА

1. **Налимов В. И., Пухначев В. В.** Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей // Новосибирск: НГУ, 1975.
2. **Андреев В. К., Родионов А. А.** Групповая классификация и точные решения уравнений плоского и вращательно-симметричного течения идеальной жидкости в лагранжевых координатах // Дифференц. уравнения.— 1988.— Т. 24, № 9.
3. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
4. **Овсянников Л. В.** Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей.— Новосибирск: Наука, 1967.
5. **Меньщиков В. М.** О малых возмущениях неустановившихся одномерных движений идеальной несжимаемой жидкости с осевой симметрией // ПМТФ.— 1979.— № 2.
6. **Андреев В. К.** Малые возмущения неустановившегося движения со свободной границей с учетом капиллярных сил // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./ АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1977.— Вып. 32.
7. **Андреев В. К.** Корректность задачи о малых возмущениях движения жидкости со свободной границей // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1973.— Вып. 13.

г. Красноярск *Поступила 5/VI 1991 г.*

УДК 539.376

М. Н. Кирсанов

О ВЛИЯНИИ ВЫБОРА КРИТЕРИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ НА РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Для оценки устойчивости конструкции в условиях ползучести имеется ряд подходов [1]. Неопределенность выбора критерия неустойчивости препятствует точной постановке задачи оптимизации реологических систем. В имеющихся решениях [2, 3] нет сопоставления результатов решения задачи для различных подходов. Однако эти подходы существенно различаются по значению предсказываемого критического времени.

Цель настоящей работы — оценить влияние выбора критерия неустойчивости на решение задачи оптимизации. Рассматриваются так называемые условные критерии [4]. Приводятся уравнения задачи о максимуме критического времени произвольной стержневой конструкции, и на конкретном примере определяется условие минимума объема при фиксированном критическом времени. Показывается, что в первом случае выбор критерия не оказывает никакого влияния на оптимальную форму системы, во втором это влияние незначительно.

Предположим, что материал стержней подчиняется закону ползучести [5]

$$\dot{p}p^{\alpha} = f(\sigma) \tag{1}$$

($p = \varepsilon - \sigma/E$ — деформация ползучести, α — параметр упрочнения). Анализируя варианты условных критериев неустойчивости при ползучести, заметим, что для большинства из них справедливо представление критической деформации сжатого стержня в форме

$$p = \varphi(\sigma_0 - \sigma)/E, \tag{2}$$

где φ зависит от выбранного критерия (см. таблицу); $\sigma_0 = (\pi/l)^2 EI/F$ — критическое напряжение упругого стержня по Эйлеру; I, F — момент инерции и площадь поперечного сечения. Стержни в конструкции предполагаются шарнирно опертыми. Критерий [6] представлен в форме (2) приближенно при напряжениях, близких к σ_0.*

---

* Критическое время в условиях ползучести в [7] получено без учета [6] и повторяет известные результаты.

Критерий	φ			β
	$f(\sigma)$	$f=A\sigma^n$	$\alpha=2/3,\ n=5$	
[8]	$\dfrac{\alpha f(\sigma)}{\sigma f'(\sigma)}$	$\dfrac{\alpha}{n}$	0,133	35°07′
[4]	$\dfrac{2\alpha f(\sigma)}{\sigma f'(\sigma)}$	$\dfrac{2\alpha}{n}$	0,266	35°04′
[10]	$\dfrac{(1+\alpha)f(\sigma)}{\sigma f'(\sigma)}$	$\dfrac{1+\alpha}{n}$	0,333	35°03′
[6]	$\dfrac{(1+\alpha)f(\sigma_0)}{\sigma_0 f'(\sigma_0)}$	$\dfrac{1+\alpha}{n}$	0,333	35°03′
[9]	$\dfrac{3\alpha f(\sigma)}{\sigma f'(\sigma)}$	$\dfrac{3\alpha}{n}$	0,400	35°02′
[12]	$\dfrac{(1+2\alpha)f(\sigma)}{\sigma f'(\sigma)}$	$\dfrac{1+2\alpha}{n}$	0,466	35°01′
[11]	1	1	1,000	34°54′

При степенном законе $f = A\sigma^n$ коэффициент φ является константой, зависящей только от свойств материала (см. таблицу). Пренебрегая изменением геометрии системы во времени, будем считать, что при постоянных внешних нагрузках напряжения в стержнях также постоянны. Интегрируя (1) со степенной зависимостью $f(\sigma)$, получим

$$p = (At(\alpha+1))^{\gamma/n},\quad \gamma = n/(1+\alpha). \tag{3}$$

Введем безразмерный параметр времени

$$\tau = (At(\alpha+1)E^n)^{\gamma/n}/\varphi. \tag{4}$$

Уравнения (2) и (3) с учетом последнего обозначения дают

$$\sigma - \sigma_0 + \tau\sigma^\gamma E^{1-\gamma} = 0. \tag{5}$$

Напряжение в стержне с номером j ($j = 1, \ldots, m$) выразим через усилие $S_j = \sigma_j F_j$. Равенство (5) перепишем в форме

$$S_j - (\pi/l_j)^2 E_j I_j + \tau_j S_j^\gamma (F_j E_j)^{1-\gamma} = 0. \tag{6}$$

Пусть геометрия конструкции однозначно описывается некоторым набором параметров. Объединим их в условный вектор $\bar{Z}$. Длины стержней и усилия в них являются известными (из статической задачи) функциями $l_j(\bar{Z})$, $S_j(\bar{Z})$. Остальные параметры, входящие в (6), есть неизвестные функции Z либо константы (в зависимости от постановки задачи). Меняя Z в пределах пространства допустимых значений, можно определить $\bar{Z}$, когда некоторая характеристика системы является оптимальной.

Например, в задаче о минимуме объема (веса) конструкции требуется найти экстремум суммы

$$V = \sum_{j=1}^{m} V_j, \tag{7}$$

где объемы отдельных стержней, выраженные через их длины и площади сечений, определяются из (6). В общем случае это уравнение нелинейно и аналитического решения не имеет. Приведем один частный случай. Пусть моменты инерции I_j не зависят от Z, т. е. фиксированы для каждого стержня. Неизвестную функцию $F_j(Z) = V_j/l_j$ исключим из (6) и запишем

$$V_j = \left(\tau_j S_j^\gamma / \left(\pi^2 E I_j / l_j^2 - S_j\right)\right)^{1/(\gamma-1)} l_j/E.$$

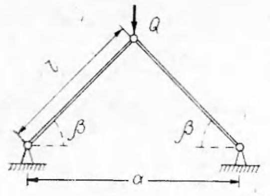
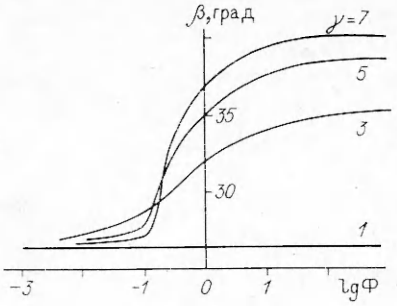


Рис. 1

Рис. 2



Критическое время примем одинаковым для всех стержней $\tau_j = \tau$. При этом τ выносится как общий множитель из суммы (7) и, следовательно, условие минимума V не будет зависеть от его значения и коэффициента φ, входящего в него.

Таким образом, в данном случае оптимальная геометрия не зависит от выбора критерия неустойчивости. Легко показать, что в задаче о максимуме критического времени (общего для всех стержней конструкции) при фиксированном объеме системы этот факт справедлив в общем случае. Действительно, уравнением для кривой $\tau(\overline{Z})$ будет (7), где отдельные объемы V_j определены (численно или аналитически) из (6). Коэффициент φ не входит в это уравнение и, следовательно, влияет только на значение $t_{\text{кр}}$, выраженное из (4) через φ, но не на оптимальную геометрию $\overline{Z}$.

Приведем пример решения задачи оптимизации простейшей конструкции в постановке о минимуме ее объема. Рассмотрим систему, состоящую из двух стержней (рис. 1). Вектор геометрии здесь одномерный $Z = \beta$. Примем сечения квадратными: $F = b^2$, $I = b^4/12$. Размер b — неизвестная функция параметра β. Исключая b из (6), получим

(8) $$S - E(\pi V/l^2)^2/12 + \tau S^{\gamma}(l/(VE))^{\gamma-1} = 0.$$

Известны функции $S(\beta) = 0{,}5Q/\sin\beta$, $l(\beta) = 0{,}5a/\cos\beta$. Введем переменную $x = \operatorname{tg}\beta$. Перепишем (8) в виде

(9) $$(xV)^{\gamma-1}(1 + x^2)^{1-\gamma} - KV^{\gamma+1}x^{\gamma}(1 + x^2)^{-\gamma-3/2} + M = 0.$$

Здесь $K = 8\pi^2E/(3a^4Q)$; $M = \tau(Qa/(4E))^{\gamma-1}$. Условием экстремума V является равенство $dV/dx = 0$. Продифференцируем последнее уравнение с учетом этого. Получим

(10) $$(\gamma - 1)(1 - x^2) - KV^2x(1 + x^2)^{-5/2}(\gamma - x^2(\gamma + 3)) = 0.$$

Совместно с (9) уравнение (10) дает

$$V^{\gamma-1} = M(x + 1/x)^{\gamma-1}(\gamma - x^2(\gamma + 3))/(4x^2 - 1).$$

При $V > 0$ отсюда вытекает, что x лежит в достаточно узкой области допустимых значений $0{,}5 < x < \sqrt{\gamma/(\gamma + 3)}$. Размер области определяется лишь параметром материала γ и не зависит ни от действующих нагрузок, ни от выбора критерия неустойчивости при ползучести. Точное значение x можно получить из уравнения, следующего из (9) и (10):

(11) $$\Phi(\gamma - x^2(\gamma + 3))^{(1+\gamma)/(\gamma-1)} = (\gamma - 1)(1 - x^2)(4x^2 - 1)^{2/(\gamma-1)}\, x(1 + x^2)^{-1/2}$$

($\Phi = KM^{2/(\gamma-1)}$). Решение (11) в зависимости от Φ при различных γ представлено на рис. 2. Горизонтальной асимптотой всех кривых является прямая $\beta = 26°34'$, отвечающая решению упругой задачи, а также случаю $\gamma = 1$.

Для сопоставления различных критериев неустойчивости вычислим β для конкретного случая. Пусть $\alpha = 2/3$, $n = 5$ ($\gamma = 3$), $\tau(\pi/a)^2Q/E = 800$. Соответствующие значения β приведены в последнем столбце таблицы. Очевидно, что влияние выбора критерия на β несущественно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Колмановский В. Б.** Устойчивость вязкоупругих тел и конструкций // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела.— М.: ВИНИТИ, 1987.— Т. 19.
2. **Wojdanowska R., Zyszkowski M.** Optimum design of lattice structures in creep conditions with consideration of Kempner — Hoff theory of buckling // Bull. Acad. Polon. Sci. ser. techn.— 1973.— V. 21, N 6.
3. **Zyczkowski M.** Optimal structural design in rheology // J. Appl. Mech.— 1971.— N 3.
4. **Куршин Л. М.** О постановках задачи устойчивости в условиях ползучести (обзор) // Проблемы теории пластичности и ползучести.— М.: Мир, 1979.
5. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций.— М.: Наука, 1966.
6. **Иванов Г. В.** Об устойчивости равновесия сжато-изогнутых тонких стержней при неупругих деформациях // ПМТФ.— 1961.— № 3.
7. **Гараган И. А.** Об определении критического времени в условиях ползучести // Вестн. АН КазССР.— 1981.— № 4.
8. **Работнов Ю. Н., Шестериков С. А.** Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести // ПММ.— 1957.— Т. 21, № 3.
9. **Клюшников В. Д.** Лекции по устойчивости деформируемых систем.— М.: Изд-во МГУ, 1986.
10. **Shanley R. F.** Weight-strength analysis of aircraft structures.— N. Y.: Mc Graw-Hill Book Co, 1952.
11. **Gerard G.** A creep buckling hypothesis // J. Aeron. Sci.— 1956.— V. 23, N 9.
12. **Кирсанов М. Н.** Неустойчивость цилиндрической оболочки при ползучести // Изв. АН СССР. МТТ.— 1986.— № 6.

г. Воронеж *Поступила 27/VI 1991 г.*

УДК 539.3

В. М. Корнев, А. О. Мулькибаев

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ И ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Исследуются задачи о свободных колебаниях трансверсально-изотропных и трехслойных прямоугольных пластин (уточненная теория изгиба, учитывающая сдвиг по толщине). Задачи описываются системой двух уравнений, где первое порядка $2m$ ($m = 2$, 3 для трансверсально-изотропных и трехслойных пластин соответственно), второе — сингулярно возмущенное уравнение второго порядка, содержащее малый параметр ε. Для трансверсально-изотропных пластин параметр ε характеризует влияние поперечных сдвигов, а для трехслойных — сдвиговую жесткость трехслойного пакета. Построены асимптотические разложения решений с учетом угловых погранслойных решений, когда параметр ε мал. В данном случае второе уравнение является возмущающим, решение которого носит характер погранслоя (краевого эффекта).

Для исходных систем рассматриваются различные виды краевых условий. Изучается взаимосвязь краевых условий исходной и укороченной задач (отброшено возмущающее уравнение). Обоснован переход от краевых условий в уточненной постановке к классической постановке в окрестности угловых точек (т. е. для кусочно-гладкого контура). Для свободного края в окрестности угла обосновано преобразование Кирхгофа. Для укороченных задач часто возможно разделение переменных, хотя полная система уравнений не допускает их разделения.