ПМТФ, № 1, 1967

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ В ПЛОСКОМ МГД-КАНАЛЕ

Ю. В. Саночкин

(Москва)

Вопросам устойчивости ламинарного течения проводящей жидкости в поперечном магнитном поле — течения Гартмана — посвящены работы [1, 2]. Однако в этих статьях предполагалось, что коэффициенты переноса являются величинами, не зависящими от характеристик потока, в частности от температуры, и не учитывалось влияние диссипации энергии. Учет указанных обстоятельств приводит к тому, что даже при относительно небольших дозвуковых скоростях движения, когда среду можно рассматривать как несжимаемую, распределение температуры оказывает большое влияние на динамические характеристики потока. Такие течения в плоском МГД-канале, которые в дальнейшем будут называться неизотермическими, рассмотрены в работах [3, 4]. Было показано, что при определенных условиях профили скорости сильно деформируются, возможно даже появление немонотонных профилей с точками перегиба.

Однако влияние неизотермичности течения на устойчивость не ограничивается изменением критериев устойчивости вследствие изменения профиля скорости. Учет диссипации энергии и непостоянства коэффициентов переноса приводит к появлению новых «диссипативных» ветвей неустойчивости, таких, как например, перегревная [5-8].

В дальнейшем рассматривается задача о гидродинамической устойчивости неизотермического потока плазмы в скрещенных постоянных электрическом и магнитном полях в плоском канале, ограниченном диэлектрическими стенками. Полученная в работе система уравнений для возмущений, разумеется, учитывает все указанные выше механизмы неустойчивости, однако ее решение представляется затруднительным. Общую систему уравнений удается исследовать в двух предельных случаях, соответствующих перегревной и гидродинамической неустойчивостям.

1. Исходное стационарное состояние. Пусть ось x направлена по потоку, ось y — вдоль внешнего магнитного поля B_0 и ось z — вдоль постоянного электрического поля E. Канал ограничен диэлектрическими стенками $y = \pm l$, расстояние между электродами по z и длина канала по x предполагаются достаточно большими. Предполагается также, что $\omega_e \tau_e \ll 1$, т. е. применима скалярная магнитная гидродинамика. Зависимость коэффициентов переноса от температуры аппроксимируется степенными формулами

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\alpha}, \quad \varkappa = \varkappa_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\beta}, \quad \eta = \eta_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\gamma}, \quad (\alpha, \beta, \gamma - \mathrm{const}) \qquad (1.1)$$

что можно сделать при монотонной зависимости этих параметров от температуры среды и ограниченном изменении температуры в пределах МГД-канала. Считая все величины зависящими только от y, приходим к следующей системе уравнений, описывающих исходное стационарное состояние:

$$p + \frac{d}{dy}\left(\eta \frac{dU}{dy}\right) - jB_0 = 0, \qquad \frac{dB_x}{dy} = -\mu j$$
$$\frac{d}{dy}\left(\varkappa \frac{dT}{dy}\right) + \eta \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \frac{j^2}{\sigma} = 0, \qquad j = \sigma (E + UB_0) \qquad (1.2)$$

которую следует решать с граничными условиями

$$U(\pm l) = 0, \; T(\pm l) = T_0 \qquad (1.3)$$

Решение системы уравнений (1.1) — (1.3) возможно в общем случае лишь численными методами. Оно было проведено в работе [4], результаты которой в дальнейшем будут использоваться. Не имея возможности подробно обсуждать свойства стационарного решения, заметим лишь, что была выбрана простейшая постановка задачи, когда тепло, диссипируемое в канале, отводится через стенки, поддерживаемые в одинаковых условиях. Решение стационарной задачи для U, T и j зависит от шести безразмерных параметров: α, β, γ, K, M, N, т. е. имеет вид

$$U = U\,(y;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ K,\ M,\ N) \qquad \left(M = B_0 l \sqrt{\frac{\sigma_0}{\eta_0}},\ K = -\frac{E\eta_0}{l^2 p B_0},\ N = \frac{l^4 p^2}{\varkappa_0 \eta_0 T_0}\right)$$

Здесь M — число Гартмана, K—безразмерное электрическое поле, N—тепловой параметр. Индуцированное магнитное поле B_x, кроме этих параметров, зависит также от магнитного числа Рейнольдса R_m.

2. Линеаризованные уравнения для малых возмущений. В гидродинамике, согласно теореме Сквайра [9], обычно ограничиваются рассмотрением двумерных возмущений, определяющих наименьшее значение критического числа Рейнольдса. Хотя в магнитной гидродинамике теорема Сквайра доказана лишь для течений в продольном магнитном поле [10], по соображениям простоты будет рассмотрен также лишь этот случай.

Получение уравнений для возмущений состоит в обычном процессе линеаризации общих уравнений магнитной гидродинамики около стационарного состояния, описываемого уравнениями (1.2). Удобно ввести функции тока для возмущений скорости и магнитного поля

$$u' = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v' = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad B_x' = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad B_y' = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{2.1}$$

и величину $\Theta = T'/T$ вместо возмущения температуры T'. В результате получим систему линеаризованных уравнений в безразмерном виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\triangle\psi - U''\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{R}\left[\eta\triangle\triangle\psi + 2\eta'\triangle\frac{\partial\psi}{\partial y} + \eta''\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\right] +$$
$$+ A\left[(\mathbf{B}\nabla)\triangle\varphi - B_x''\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] + \frac{\gamma}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\eta U'\Theta) \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\triangle\varphi - (\mathbf{B}\nabla)\,\psi = \frac{1}{R_m}\frac{1}{\sigma}\triangle\varphi - \frac{\alpha}{R_m}\frac{B_x'}{\sigma}\Theta \tag{2.3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\Theta - (\ln T)'\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{RP}\left[\varkappa\triangle\Theta + 2\,(1+\beta)\,\varkappa\,(\ln T)'\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right] +$$
$$+ \frac{N}{P}\left[(\gamma - \beta - 1)\frac{1}{R}\frac{\eta U'^2}{T} - (\alpha + \beta + 1)\frac{A}{R_m}\frac{B_x'^2}{\sigma T}\right]\Theta +$$
$$+ 2\frac{N}{PR}\frac{\eta U'^2}{T}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) + 2\frac{NA}{PR_m}\frac{B_x'}{\sigma T}\triangle\varphi \tag{2.4}$$

$$\left(R = \frac{\rho l v^*}{\eta_0};\ A = \frac{B_0^2}{\mu\rho v^{*2}},\ R_m = \mu\sigma_0 l v^*,\ P = \frac{\eta_0 c_p}{\varkappa_0}\right)$$

Здесь R — число Рейнольдса, A — число Альфвена, R_m — магнитное число Рейнольдса, P — число Прандтля, U — скорость невозмущенного потока, $\mathbf{B}$ — невозмущенное магнитное поле, T — невозмущенная температура; σ, $\varkappa$, η — проводимость, теплопроводность и вязкость в невозмущенном потоке; штрихи — дифференцирование по y.

Как обычно, решение системы ищется в виде

$$\psi = \psi\,(y)\exp ik(x - ct) \tag{2.5}$$

где k — безразмерное волновое число, kc — безразмерная частота колебаний. Уравнения (2.2) — (2.4) необходимо решать при следующих очевидных условиях:

$$\psi\,(\pm 1) = \psi'\,(\pm 1) = 0, \qquad \Theta\,(\pm 1) = 0 \tag{2.6}$$

Граничные условия для магнитного поля в случае непроводящих стенок имеют вид

$$(\varphi'/\varphi)_{\pm 1} = \mp k \qquad (2.7)$$

Если система (2.2) — (2.4) не распадается, имеет место одновременное влияние на устойчивость гидродинамических, электродинамических и тепловых эффектов.

3. Перегревная неустойчивость. Рассмотрим прежде всего случай, когда $S \ll R_m$, где $S = M^2/R$ — параметр гидромагнитного взаимодействия. В этом случае, очевидно, возмущения поля, обусловленные движением среды, могут превосходить возмущения скорости за счет поля. В пределе $A \to 0$ при $\gamma = 0$ можно представить ситуацию, когда возмущения скорости также стремятся к нулю, и членами, содержащими ψ, в уравнениях (2.3, 4) можно пренебречь. Если предположить еще, что $R_m \ll 1$, то из (2.3) находим

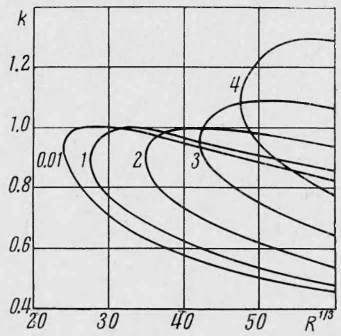
$$\triangle\varphi = \alpha B_x'\Theta \qquad (3.1)$$

Используя (2.4), (2.5) и (3.1) и пренебрегая для упрощения записи вязкой диссипацией и непостоянством $\varkappa$, после формальных преобразований получаем

$$\Theta'' + (E - V)\,\Theta = 0 \qquad (3.2)$$

$$E = -k^2 + ikc\,RP$$

$$V = -\alpha\Pi\,\frac{j^2}{\sigma T} + ik\,URP \qquad \left(\Pi = \frac{j^{*2}l^2}{\sigma_0\varkappa_0 T_0}\right)$$



Фиг. 1

Таким образом, задача сведена к задаче на собственные значения для уравнения Шредингера с комплексным потенциалом V. Если исходное стационарное состояние является симметричным по y, то нетрудно убедиться, что $\operatorname{Re} V$ — «потенциальная яма», а $\operatorname{Im} V$ имеет вид горба. Можно разложить потенциал в ряд, тогда вблизи оси канала получаем уравнение Шредингера для гармонического осциллятора. Убедившись таким образом в существовании финитных решений [11], можно применить для исследования (3.2) простые приближенные способы. В квазиклассическом приближении, например, заменяя d/dy на ik_y, сразу находим критерий устойчивости (в размерном виде)

$$\varkappa_0 k^2 > \frac{d\ln\sigma}{d\ln T}\,\frac{j^2}{\sigma T} \qquad (3.3)$$

Формула (3.3) для общего случая была получена ранее в работе [7], однако в ней не был рассмотрен вопрос о существовании финитных решений. Наличие множителя α в неравенстве (3.3) позволяет назвать неустойчивость перегревной [5,7]. Для простоты ограничимся рассмотрением случая $S \ll R_m \ll 1$ в квазиклассическом приближении. Можно провести аналогичный анализ, отказавшись от последнего ограничения.

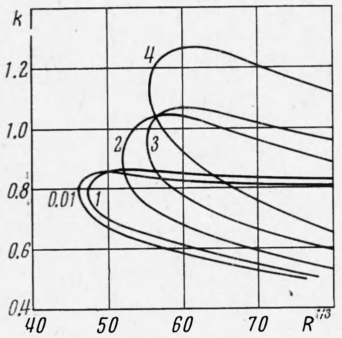
4. Гидродинамическая неустойчивость. Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда неустойчивость обусловлена чисто гидродинамическим механизмом раскручивания вихря градиентом скорости. Как известно, гидродинамическая неустойчивость наступает при достаточно больших числах R. Поэтому можно пренебречь малыми членами в правой части (2.2), сохранив, разумеется, старшую производную. Ограничимся далее случаем $R_m \ll 1$, когда можно пренебречь членами, содержащими B_x, по сравнению с B_0. Из уравнения (2.3) находим

$$\varphi'' - k^2\varphi = -R_m\,\sigma\psi' + \alpha B_x'\Theta \qquad (4.1)$$

Если параметр гидромагнитного взаимодействия $S \ll 1$, т. е. число Гартмана не очень велико, то исключая при помощи (4.1) φ из (2.2) и пренебрегая малыми членами, окончательно приходим к задаче на собственные значения для уравнения типа Орра—Зоммерфельда

$$(U - c)(\psi'' - k^2\psi) - U''\psi = \frac{1}{ikR}\,\eta\psi^{IV} \qquad (4.2)$$

с граничными условиями (2.6). Таким образом, при $R_m \ll 1$, $S \ll 1$, $\alpha S < 1$ магнитное поле и неизотермичность течения влияют на устойчивость движения косвенно, изменяя профиль скорости и вводя профиль вязкости в уравнение (4.2). Для решения задачи воспользуемся известной схемой Гейзенберга — Линя [9]. Как обычно, ограничимся рассмотрением четных возмущений на полуширине (— 1,0) канала. С точностью до членов $\sim (kR)^{-1}$ два частных решения можно получить из невязкого уравнения разложением по k^2



Фиг. 2

$$\psi_1 = v\{h_0 + k^2 h_2(y) + k^4 h_4(y) + \cdots\} \qquad (4.3)$$

$$\psi_2 = v\{q_1(y) + k^2 q_3(y) + k^4 q_5(y) + \cdots\}$$

$$(v = U - c)$$

$$h_0 = 1, \quad h_{2n+2} = \int_{-1}^{y} \frac{dy}{v^2} \int_{-1}^{y} h_{2n} v^2 dy \quad (n \geqslant 0)$$

$$q_1 = \int_{-1}^{y} \frac{dy}{v^2}, \quad q_{2n+1} = \int_{-1}^{y} \frac{dy}{v^2} \int_{-1}^{y} q_{2n-1} v^2 dy$$

$$(n \geqslant 1)$$

Два других фундаментальных решения находятся в сходящихся рядах из полного уравнения (4.2) и с точностью до членов $\sim (kR)^{-1/3}$ имеют вид

$$\psi_3 = \int_{\infty}^{\zeta} \int_{\infty}^{\xi} \chi^{1/2} H_{1/3}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\chi)^{3/2}\right] d\chi\, d\xi, \qquad \psi_4 = \int_{-\infty}^{\zeta} \int_{-\infty}^{\xi} \chi^{1/2} H_{1/3}^{(2)} \left[\frac{2}{3} (i\chi)^{3/2}\right] d\chi\, d\xi$$

$$\zeta = \left(\frac{U_c' kR}{\eta_c}\right)^{1/3} (y - y_c), \quad U_c' = U'(y_c), \quad \eta_c = \eta(y_c), \quad U_1' = U'(-1) \qquad (4.4)$$

Здесь $H_{1/3}^{(1,2)}$ — функции Ганкеля, а y_c определяется из уравнения $U(y_c) = c$. Зная фундаментальную систему решений (4.3), (4.4), нетрудно получить характеристическое уравнение для определения кривых нейтральных колебаний

$$F(z) = \frac{(1+\lambda)g}{1+\lambda g} \qquad (g = u^\circ + iv^\circ) \qquad (4.5)$$

где $F(z)$ — комплексная табулированная функция [9],

$$z = \left(\frac{U_c' kR}{\eta_c}\right)^{1/3} (1 + y_c), \qquad \lambda = (1 + y_c)\frac{U_1'}{c} - 1$$

$$u^\circ = 1 + U_1' c K_1 + \frac{U_1' c}{k^2} \frac{1 - k^2 N_2 - k^4 N_4 - \cdots}{H_1 + k^2 H_3 + k^4 H_5 + \cdots}$$

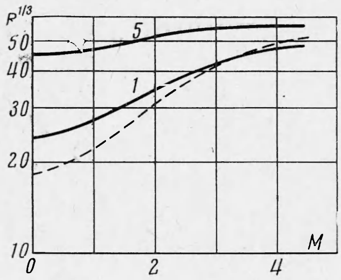
$$v^\circ = -\pi c U_1' \frac{U_c''}{U_c'^3}, \qquad K_1 = \int_{-1}^{0} \frac{dy}{v^2}, \quad H_1 = \int_{-1}^{0} v^2 dy$$

$$N_2 = \int_{-1}^{0} v^2 dy \int_{y}^{0} \frac{dy}{v^2}, \qquad H_3 = \int_{-1}^{0} v^2 dy \int_{-1}^{y} v^{-2} dy \int_{-1}^{y} v^2 dy$$

и т. д. При расчетах удерживались члены $\sim k^2$, учет N_4 и H_5 дает уточнение в несколько процентов.

Уравнение (4.5) удобно для численного счета. Однако до проведения вычислений можно сделать качественные выводы из анализа профилей скорости. Как показано Локком [1], увеличение числа Гартмана M приводит к росту критического значения числа Рейнольдса R_*, т. е. стабилизации потока. Иными словами, монотонные, более наполненные профили скорости соответствуют более высоким значениям R_*. Поскольку в плазме проводимость растет с ростом температуры, то в центре потока, где температура выше, пондеромоторная сила увеличивается, что приводит к дополнительному уплощению профиля скорости в случае неизотермического течения [4]. Поэтому можно ожидать увеличения величины R_*, причем этот эффект тем сильнее, чем больше показатель α и ток, текущий через плазму.

На фиг. 1, 2 представлены кривые нейтральных колебаний для значений $N = 1{,}5$ соответственно в случае полностью ионизованной плазмы ($\alpha = {}^3/_2$, $\beta = \gamma = {}^5/_2$). Цифры на кривых указывают значения M. Следует отметить, что при $M > 5$ вычисление кривых применявшимся здесь способом нецелесообразно вследствие ухудшения сходимости разложений по k^2. Для сравнения с результатами работы [1], вычисления были проведены для режима течения с нулевым полным током. На фиг. 3 изображена зависимость $R_*^{1/3}$ от M для указанных тепловых режимов (пунктирная линия соответствует результатам [1]). Из сопоставления кривых следует вывод о дополнительной стабилизации потока вследствие неизотермических эффектов при $M < 5$, причем разница в значениях R_* уменьшается с ростом M. Это объясняется тем, что при заданном N с увеличением M отличие в профилях скорости для изотермического и неизотермического течений уменьшается [4]. Обращает на себя внимание также уменьшение скорости нарастания R_* в зависимости от M при увеличении N, так что возможно даже пересечение с кривой, соответствующей изотермическому случаю. Однако требуется специальное рассмотрение для определения критерия устойчивости при $M > 5$.



Фиг. 3

В заключение заметим, что в случае неизотермического течения жидкого металла поведение нейтральных кривых может существенно измениться, поскольку проводимость металла убывает с ростом температуры и неизотермические эффекты будут приводить к более вытянутым профилям скорости.

Автор глубоко благодарен В. Калитенко за программирование задачи и С. Филиппову за советы и обсуждения.

Поступила 18 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Lock R. C. The Stability of the Flow of an Electrically Conducting Fluid between Parallel Planes under a Transverse Magnetic Field. Proc. Roy. Soc. A, 1955, vol. 233, No. 1192.
2. Тверской Б. А. Об устойчивости течения хорошо проводящей жидкости поперек магнитного поля. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, No. 2.
3. Heywood J. B. An MHD Channel Flow with Temperature Dependent Electrical Conductivity. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 9.
4. Саночкин Ю. В., Филиппов С. С. Неизотермическое течение плазмы в плоском МГД-канале. ПМТФ 1966, № 6.
5. Кадомцев Б. Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы. Сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 2, Госатомиздат, 1963.
6. Wright J. K. A Temperature Instability in Magnetohydrodynamic Flow. Proc. Phys. Soc, 1963, vol. 81, pt. 3, No. 521.
7. Саночкин Ю. В. О диссипативной неустойчивости в магнитной гидродинамике. Магнитная гидродинамика, 1965, № 3.
8. Саночкин Ю. В. О перегревной неустойчивости плазмы. Ж. техн. физ. 1965, т. 35, № 6.
9. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. Изд. иностр. лит., 1958.
10. Michael D. H. The Stability of the Plane-parallel Flow of an Electrically Conductive Fluid. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1953, vol. 49 p. 1.
11. Галеев А. А. Теория устойчивости неоднородной разреженной плазмы в сильном магнитном поле. Ж. Эксперим. и теор. физ., 1963, т. 44, № 6.