

УДК 539.375

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАДИЕНТНОГО КРИТЕРИЯ ПРОЧНОСТИ И МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

А. С. Шеремет, М. А. Леган

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Построен численный алгоритм расчета на прочность плоских элементов конструкций с концентраторами напряжений на основе совместного применения градиентного критерия прочности и метода граничных элементов. В качестве первого тестового расчета проведена оценка хрупкого разрушения пластины с круглым отверстием в условиях растяжения. Для дальнейшего тестирования, а также сравнения результатов расчета с имеющимися в литературе экспериментальными данными рассмотрены симметричные и несимметричные задачи о разрушении стеклянных пластин с узким эллиптическим отверстием в условиях растяжения и сжатия. Для всех задач проведена оценка точности численных результатов путем их сравнения со значениями, полученными на основе аналитических решений. Использование градиентного критерия прочности по сравнению с классическими критериями дает лучшее соответствие теоретических оценок с экспериментальными данными.

1. Постановка задачи. Для ответа на вопрос, где и при какой нагрузке начнется разрушение элемента конструкции с концентратором напряжений, будем использовать градиентный подход: наличие неравномерности напряженного состояния приводит к снижению разрушающей способности напряжения в области максимальных значений, т. е. к снижению его эффективности. Ранее [1, 2] сформулирован двухпараметрический градиентный критерий прочности, согласно которому для определения разрушающей нагрузки сравнивать с пределом прочности материала σ_b нужно не первое главное напряжение σ_1 (принятое в качестве эквивалентного), а некоторое эффективное напряжение $\sigma_e = \sigma_1 / f(g_1, L_1, \beta)$, которое меньше эквивалентного. Знаменатель $f(g_1, L_1, \beta)$ является функцией от величины неравномерности поля напряжений в рассматриваемой точке тела и двух параметров, зависящих от свойств материала. Эффективное напряжение вычисляется по формуле

$$\sigma_e = \sigma_1 / (1 - \beta + \sqrt{\beta^2 + L_1 g_1}). \quad (1.1)$$

Неравномерность напряженного состояния характеризуется относительным градиентом первого главного напряжения $g_1 = |\text{grad } \sigma_1| / \sigma_1$ и находится из упругого решения соответствующей задачи. Параметр L_1 имеет размерность длины и определяется из условия согласования градиентного критерия с линейной механикой разрушения: $L_1 = (2/\pi) K_{Ic}^2 / \sigma_b^2$, где K_{Ic} — критический коэффициент интенсивности напряжений. Безразмерный параметр β , изменяющийся от 0 до 1, учитывает квазихрупкий характер разрушения и вычисляется как отношение предела прочности к модулю упругости и полной деформации в момент разрушения при одноосном равномерном растяжении: $\beta = \sigma_b / (E \epsilon_*)$. Будем считать, что разрушение начинается в точке на контуре концентратора при выполнении условия

$$\sigma_e = \sigma_b \quad (1.2)$$

В работе решается проблема, сформулированная в проекте Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-05-65656).

и распространяется по нормали к контуру.

Для применения предлагаемого критерия прочности не только в демонстрационных, но и в практических задачах необходимо разработать численный алгоритм расчета на прочность конструкций с концентраторами напряжений, используя наиболее подходящий численный метод. В настоящей работе речь идет о применении метода граничных элементов (метода фиктивных нагрузок). При этом основная проблема состоит в том, что в ходе расчетов необходимо определять не только компоненты напряженного состояния, но и их производные по пространственным координатам.

2. Схема решения задачи. Основные проблемы. Наметим схему проведения расчета на прочность пластины с концентратором напряжений с помощью градиентного условия прочности и метода граничных элементов.

Будем рассматривать только случай приложения к пластине внешней нагрузки, когда контур концентратора свободен от усилий. Тогда в качестве первого главного напряжения σ_1 на контуре отверстия можно взять тангенциальное (окружное) напряжение σ_t . Таким образом, для рассматриваемой задачи в градиентном критерии прочности (1.1), (1.2)

$$\sigma_1 = \sigma_t; \quad (2.1)$$

$$g_1 = |\text{grad } \sigma_t| / \sigma_t. \quad (2.2)$$

Градиент тангенциального напряжения будем вычислять по формуле

$$|\text{grad } \sigma_t| = \sqrt{(\partial \sigma_t / \partial s)^2 + (\partial \sigma_t / \partial n)^2},$$

где s и n — соответственно касательная и нормаль (внешняя) к контуру.

Для применения критерия (1.1), (1.2) необходимо не только решить упругую задачу о концентрации напряжений, но и найти относительный градиент тангенциального напряжения в любой точке на контуре концентратора. Для решения упругой задачи будем использовать метод граничных элементов в варианте фиктивных нагрузок [3]. Здесь необходимо отметить, что методы граничных элементов требуют разбиения на элементы только границы области тела, не используют аппроксимаций внутри области и содержат меньшее число неизвестных, чем метод конечных элементов, поэтому они потенциально более точны для задач о концентрации напряжений. Повышению точности также способствует то обстоятельство, что среди методов граничных элементов метод фиктивных нагрузок использует аналитическое выражение для σ_t .

С помощью указанного метода можно определить значения σ_t^i на контуре концентратора в центре каждого i -го граничного элемента, а также во внутренних точках области пластины. Производные тангенциального напряжения $\partial \sigma_t / \partial s$ и $\partial \sigma_t / \partial n$ на контуре, необходимые для вычисления градиента, определим, используя конечно-разностные формулы численного дифференцирования.

Подставляя вычисленные по (2.1) и (2.2) значения σ_1 и g_1 для каждой из средних точек граничных элементов в выражение (1.1) для σ_e и определяя точку, где эффективное напряжение максимально, найдем место начала разрушения. Разрушение начнется при таком значении приложенной нагрузки, когда эффективное напряжение достигнет предела прочности материала, т. е. при выполнении условия (1.2).

Итак, схема расчета в основном рассмотрена. Теперь необходимо остановиться более подробно на вопросе вычисления компонент градиента σ_t .

Для вычисления производной $\partial \sigma_t / \partial s$ тангенциального напряжения по касательной s к контуру концентратора воспользуемся трехточечным шаблоном численного дифференцирования с неравными шагами (рис. 1). Тогда производная (центральная) для i -й точки контура

$$\frac{\partial \sigma_t^i}{\partial s} \approx \left[\frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} \sigma_t^{i+1} + \left(\frac{\Delta s_2}{\Delta s_1} - \frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} \right) \sigma_t^i - \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1} \sigma_t^{i-1} \right] / (\Delta s_1 + \Delta s_2),$$

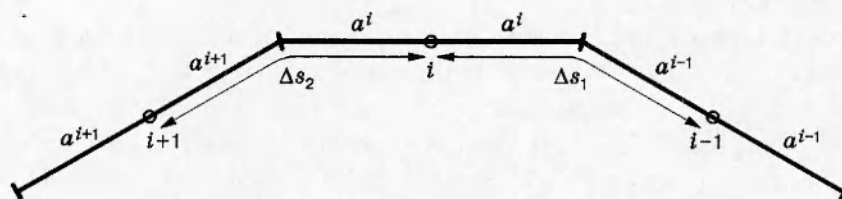


Рис. 1

где $i, i-1, i+1$ — номера средних точек граничных элементов; $\sigma_t^i, \sigma_t^{i-1}, \sigma_t^{i+1}$ — известные из решения упругой задачи значения σ_t в этих точках; $\Delta s_1 = a^{i-1} + a^i$, $\Delta s_2 = a^i + a^{i+1}$ — модули приращений дуговой координаты s , т. е. длины соответствующих дуг; a^i — полу-длина i -го граничного элемента.

Для вычисления производной $\partial\sigma_t/\partial n$ тангенциального напряжения по нормали n к контуру концентратора воспользуемся простейшим двухточечным шаблоном численного дифференцирования. Тогда производная для i -й точки контура

$$\frac{\partial\sigma_t^i}{\partial n} \approx \frac{\sigma_t^i - \sigma_t^j}{\Delta n},$$

где σ_t^i, σ_t^j — значения σ_t в точках i и j , причем точка i является центром i -го граничного элемента, а точка j расположена внутри области тела и удалена от точки i по нормали к контуру на расстояние Δn , которое берем одинаковым для всех точек контура.

На данном этапе и возникает основная проблема в расчетах, которая заключается в следующем. Метод граничных элементов позволяет вычислять напряжения как на контуре концентратора (в средних точках граничных элементов), так и во внутренних точках области тела. На первый взгляд задача решена. Однако напряжения для внутренних точек могут быть найдены при условии, что эти точки «не будут лежать «слишком близко» к границе. Эмпирически установлено, что решение становится в целом ненадежным в точках внутри круга с радиусом, равным длине $2a$ одного элемента, с центром в средней точке граничного элемента, за исключением, конечно, самой этой средней точки» [3, с. 78, 79]. К сказанному выше необходимо добавить, что точность результатов для внутренних точек, даже удовлетворяющих обозначенному условию, остается на один-два порядка меньше точности результатов для средних точек граничных элементов, причем на достаточно больших расстояниях от контура концентратора.

Следовательно, необходимо разработать численный алгоритм, позволяющий повысить точность вычисления напряжений во внутренних точках области тела, особенно вблизи границы.

3. Разработка численного алгоритма. В данной работе численный алгоритм построен следующим образом. В теле на малом расстоянии Δn от граничных элементов на контуре концентратора (основной контур) проводим некоторым образом новую гранично-элементную сетку, образующую вспомогательный контур. Используя уравнения равновесия бесконечно малого элемента на контуре концентратора, определяем приближенно граничные условия для вспомогательного контура через известные значения напряжений на основном контуре и их производных по касательной к контуру. Применяя метод граничных элементов к задаче о вспомогательном контуре и вычисляя напряжения в центре каждого граничного элемента, мы фактически находим напряжения для внутренних точек исходной задачи, но уже с более высокой степенью точности.

Построение вспомогательного контура. Для построения вспомогательного контура проводим внутри области тела прямые линии параллельно каждому из граничных элемен-

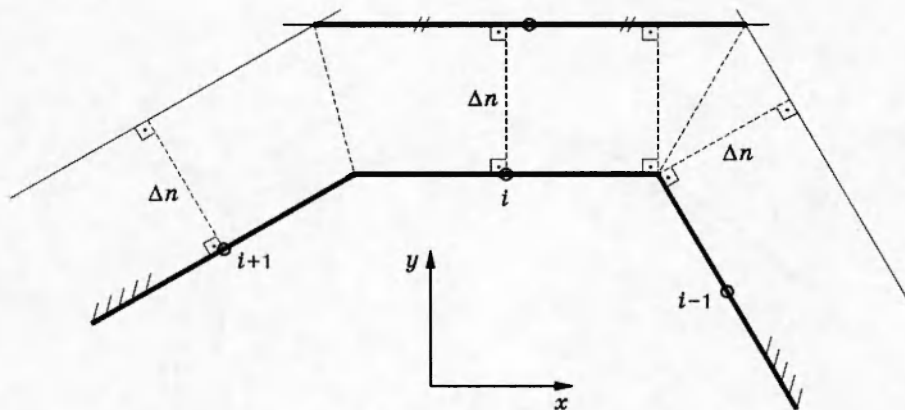


Рис. 2

тов основного контура на расстояниях Δn от них; пересечения соседних линий считаем за концы элементов вспомогательного контура (если же, например, две линии совпали — когда исходные граничные элементы лежат на одной прямой — переносим общую точку таких элементов на новый контур по нормали на расстояние Δn); средние точки полученных вспомогательных элементов находим делением соответствующих отрезков пополам (рис. 2).

Определение новых граничных условий. Для определения граничных условий (σ_s, σ_n) на вспомогательном контуре рассмотрим в полярной системе координат (ρ, φ) напряжения, действующие на бесконечно малый элемент на границе отверстия в пластине. Присвоим основному контуру индекс 1, а вспомогательному — индекс 2.

Граница отверстия в пластине свободна от внешних нагрузок:

$$\sigma_s|_1 = 0, \quad \sigma_n|_1 = 0, \tag{3.1}$$

поэтому

$$\sigma_s|_2 = \sigma_s|_1 + \frac{\partial \sigma_s}{\partial \rho} \dot{a}\rho = \frac{\partial \sigma_s}{\partial \rho} d\rho, \quad \sigma_n|_2 = \sigma_n|_1 + \frac{\partial \sigma_n}{\partial \rho} \dot{a}\rho = \frac{\partial \sigma_n}{\partial \rho} \dot{a}\rho. \tag{3.2}$$

Определим входящие в (3.2) производные через известные ранее величины. Дифференциальные уравнения равновесия указанного элемента в полярной системе координат запишутся в форме

$$\sigma_n + \rho \frac{\partial \sigma_n}{\partial \rho} - \frac{\partial \sigma_s}{\partial \varphi} - \sigma_t = 0, \quad \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} - \rho \frac{\partial \sigma_s}{\partial \rho} - 2\sigma_s = 0.$$

Отсюда, учитывая (3.1), находим

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \sigma_t, \quad \frac{\partial \sigma_s}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi}.$$

Подставляя найденные значения производных в (3.2) и осуществляя переход к системе координат (s, n) ($\Delta n = d\rho, \partial s = \rho \partial \varphi$), для рассмотренного элемента определим σ_s и σ_n на контуре 2:

$$\sigma_s|_2 = \frac{\partial \sigma_t}{\partial s} \Delta n, \quad \sigma_n|_2 = \frac{1}{\rho} \sigma_t \Delta n. \tag{3.3}$$

Пусть $k = 1/\rho$ — кривизна контура 1 в рассматриваемой точке. Для определения кривизны воспользуемся численной схемой, приведенной на рис. 3. Здесь введены следующие

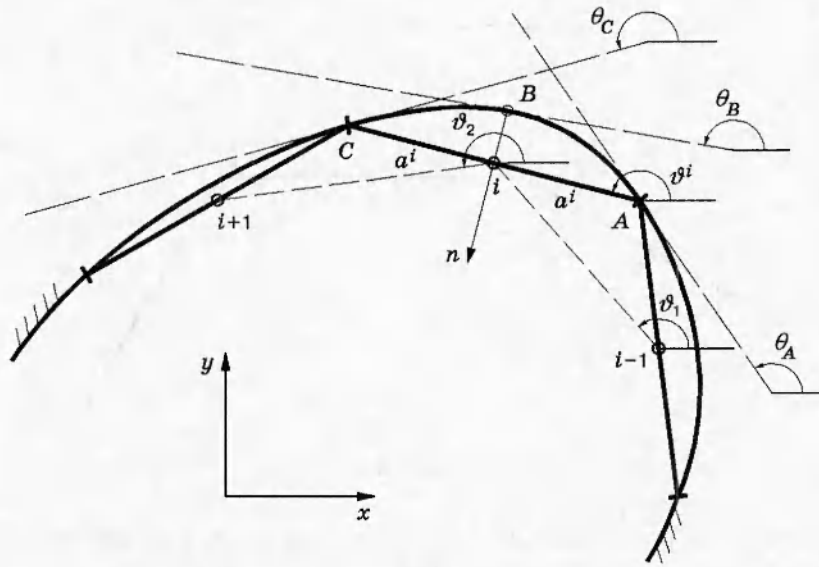


Рис. 3

обозначения: A, C — начальная и конечная точки i -го граничного элемента; B — точка, лежащая на истинном контуре концентратора и удаленная по нормали n от средней точки i -го граничного элемента; $\theta_A, \theta_B, \theta_C$ — углы между касательными к истинному контуру концентратора и осью x в точках A, B, C ; ϑ^i — угол наклона i -го граничного элемента; ϑ_1, ϑ_2 — углы между осью x и линиями, соединяющими средние точки $(i-1)$ -го и i -го, а также i -го и $(i+1)$ -го граничных элементов; k_1, k_2 — кривизны дуг AB и BC ; $\psi_1 = \vartheta^i - \vartheta_1$, $\psi_2 = \vartheta_2 - \vartheta^i$. Принимая $\vartheta_1 = \theta_A$, $\vartheta^i = \theta_B$, $\vartheta_2 = \theta_C$, $k_1 = \psi_1/a^i$, $k_2 = \psi_2/a^i$, получаем приближенную формулу для кривизны в i -й точке контура концентратора $k^i \approx (k_1 + k_2)/2$.

Окончательно граничные условия (3.3) для i -го граничного элемента на вспомогательном контуре запишутся в виде

$$\sigma_s^i \Big|_2 = \frac{\partial \sigma_s^i}{\partial s} \Delta n, \quad \sigma_n^i \Big|_2 = k^i \sigma_s^i \Delta n.$$

4. Примеры расчета. Оценка результатов. В качестве первой тестовой задачи выбрана задача об одноосном растяжении пластины с круглым отверстием. В целях дальнейшего тестирования, а также сравнения результатов расчетов с имеющимися в литературе экспериментальными данными [4] рассмотрены симметричные и несимметричные задачи о разрушении стеклянных пластин с узким эллиптическим отверстием в условиях растяжения и сжатия.

Для всех задач принято $\beta = 1$ (хрупкое разрушение). Ниже приведены результаты пяти задач.

Круглое отверстие в пластине. Рассмотрим задачу 1 об одноосном растяжении бесконечной пластины с круглым отверстием диаметра d (рис. 4) при $d/L_1 = 10$. Параметр L_1 равен критическому размеру дефекта типа трещины Гриффитса [1].

Численное решение найдено при разбиении границы отверстия на 60 и 360 граничных элементов. Гранично-элементная сетка строилась так, чтобы на пересечении с осями симметрии задачи находились средние точки элементов. Вычисления проводились при $\Delta n/L_1 = 10^{-3}$. Уменьшение либо увеличение Δn в 10 раз не влияло на результаты.

Эллиптическое отверстие в пластине. Рассмотрим несколько задач об одноосном растяжении или сжатии на бесконечности пластины с узким эллиптическим отверстием (рис. 5):

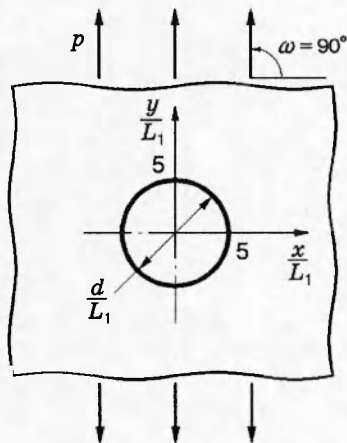


Рис. 4

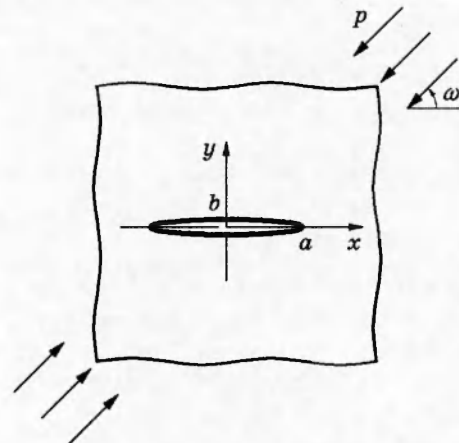


Рис. 5

- растяжение под углом $\omega = 90^\circ$ с большей осью эллипса (задача 2);
- сжатие под углом $\omega = 0$ с большей осью эллипса (задача 3);
- сжатие под углом $\omega = 30^\circ$ с большей осью эллипса (задача 4);
- сжатие под углом $\omega = 45^\circ$ (задача 5).

Для сравнения с экспериментальными результатами [4] параметр L_1 определен приближенно следующим образом. Из выражений градиентного критерия прочности (1.1), (1.2) для момента начала разрушения имеем соотношение (при $\beta = 1$)

$$\sigma_b = \sigma_t^* / \sqrt{1 + L_1 g_1}, \tag{4.1}$$

где σ_t^* — окружное напряжение в точке начала разрушения, которое можно вычислить, зная номинальное напряжение в момент начала разрушения p^* и коэффициент концентрации α в этой точке:

$$\sigma_t^* = p^* \alpha. \tag{4.2}$$

Подставляя (4.2) в (4.1), после некоторых преобразований получим уравнение для L_1

$$L_1 = \left(\left(\alpha \frac{p^*}{\sigma_b} \right)^2 - 1 \right) / g_1. \tag{4.3}$$

При растяжении стеклянной пластины под углом $\omega = 90^\circ$ к большой оси эллипса (рис. 5) в [4, с. 199, 200] экспериментально определено $p^*/\sigma_b = 1/15$. Разрушение начинается в вершине эллипса, где коэффициент концентрации $\alpha = 1 + 2a/b = 21$. Здесь $a = 6,35$ мм и $b = 0,635$ мм — большая и малая полуоси эллипса. Относительный градиент g_1 в вершине вычисляется по формуле [1]: $g_1 = (\alpha - 1)^2 (1 + 1/(2\alpha)) / (2a) = 32,246 \text{ мм}^{-1}$. Подставив все необходимые величины в (4.3), вычислим значение L_1 : $L_1 = 0,029771$ мм.

Численное решение задачи найдено при разбиении границы отверстия на 360 и 600 граничных элементов. Гранично-элементная сетка строилась так, чтобы на пересечении с осями эллипса находились средние точки элементов. Расчеты проводились при $\Delta n = 0,001$ мм. При уменьшении Δn в 10 раз результаты вычисления предельной нагрузки изменились не более чем на 0,12%.

Анализ полученных результатов. При анализе результатов нас будут интересовать:

- направление разрушения, за которое принимается угол φ между большей осью эллипса и нормалью к контуру в точке начала разрушения;

№		φ , град	p^*/σ_b	α	g_1 , мм ⁻¹
1	Аналитическое решение	0	0,40369	3,0	0,46667
	Численное решение (60 элементов)	0	0,40304	2,9999	0,46191
	(погрешность, %)	(0)	(0,16)	(0,003)	(1,02)
	Численное решение (360 элементов)	0	0,40367	3,0000	0,46654
	(погрешность, %)	(0)	(0,005)	(0,000)	(0,03)
	Классическое условие	0	0,33333	3,0	—
2	Аналитическое решение	0	0,06667	21,0	32,246
	Численное решение (360 элементов)	0	0,06554	20,985	29,945
	(погрешность, %)	(0)	(1,70)	(0,07)	(7,14)
	Численное решение (600 элементов)	0	0,06611	20,995	31,118
	(погрешность, %)	(0)	(0,84)	(0,02)	(3,50)
	Экспериментальные данные	0	0,06667	—	—
	Классическое условие	0	0,04762	21,0	—
3	Аналитическое решение	0	-1,5812	-1,0	50,394
	Численное решение (360 элементов)	0	-1,5398	-0,99864	45,835
	(погрешность, %)	(0)	(2,62)	(0,14)	(9,05)
	Численное решение (600 элементов)	0	-1,5613	-0,99955	48,219
	(погрешность, %)	(0)	(1,26)	(0,05)	(4,32)
	Экспериментальные данные	0	-1,75	—	—
	Классическое условие	0	-1,0	-1,0	—
4	Аналитическое решение	59,144	-0,38856	-2,9510	10,575
	Численное решение (360 элементов)	60,441	-0,39208	-2,9103	10,143
	(погрешность, %)	(2,19)	(0,91)	(1,38)	(4,09)
	Численное решение (600 элементов)	59,407	-0,39004	-2,9437	10,689
	(погрешность, %)	(0,44)	(0,38)	(0,25)	(1,08)
	Экспериментальные данные	58,47	-0,55	—	—
	Классическое условие	55,087	-0,33257	-3,0069	—
5	Аналитическое решение	67,248	-0,40020	-2,7347	6,6446
	Численное решение (360 элементов)	66,580	-0,40282	-2,7498	7,6252
	(погрешность, %)	(0,99)	(0,66)	(0,55)	(14,8)
	Численное решение (600 элементов)	66,909	-0,40148	-2,7428	7,1402
	(погрешность, %)	(0,50)	(0,32)	(0,30)	(7,46)
	Экспериментальные данные	78,05	-0,57	—	—
	Классическое условие	64,645	-0,36141	-2,7670	—

Примечание. Экспериментальные данные представляют собой среднее значение по всем опытам.

— отношение номинальной разрушающей нагрузки к пределу прочности материала p^*/σ_b ;

— коэффициент концентрации напряжений в точке начала разрушения α ;

— относительный градиент тангенциального напряжения в точке начала разрушения g_1 .

Указанные величины, найденные численным методом, сравним с их значениями, полученными на основе аналитических решений; определим относительные погрешности (в процентах) вычисления каждой величины. Теоретические оценки, найденные с помощью градиентного критерия прочности, сравним также с экспериментальными данными [4]. Кроме того, с экспериментальными данными интересно сравнить результаты, полученные с использованием классического условия прочности $\sigma_t^{\max} = \sigma_b$ и аналитических решений. Для этого все результаты сведены в таблицу.

Сравнение полученных численных результатов со значениями, найденными из аналитических решений, показывает, что погрешность вычисления предельной нагрузки при 360 граничных элементах не превышает 3%, что вполне допустимо, учитывая различия между теоретическими и экспериментальными значениями. Из таблицы также следует, что с увеличением числа элементов вычислительные погрешности уменьшаются.

Надо отметить, что использование градиентного критерия прочности дает теоретические оценки, более близкие к экспериментальным результатам, чем применение классического условия прочности $\sigma_t^{\max} = \sigma_b$.

Достигнутая точность вычисления относительного градиента окружного напряжения всегда уступает точности вычисления этого напряжения.

Заметим также, что в несимметричных задачах погрешности, приведенные в таблице, во многом обусловлены несовпадением средней точки любого из граничных элементов с той точкой на контуре отверстия, где согласно аналитическому решению следует ожидать начала разрушения. Например, если в задаче 5 гранично-элементную сетку построить так, чтобы направление нормали к одному из 360 граничных элементов совпадало с ранее определенным на основе аналитического решения направлением разрушения $\varphi = 67,248^\circ$, то в результате численного расчета коэффициент концентрации напряжений $\alpha = -2,7354$ и относительный градиент $g_1 = 7,1028 \text{ мм}^{-1}$. Эти значения по сравнению с аналогичными величинами из таблицы находятся ближе к полученным ранее с помощью аналитического решения результатам.

Заключение. С использованием градиентного критерия прочности и метода граничных элементов, а именно метода фиктивных нагрузок, разработан численный алгоритм расчета на прочность плоских элементов конструкций с концентраторами напряжений, который позволяет применять градиентный критерий не только в демонстрационных, но и в практических задачах с достаточной для этого степенью точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леган М. А. О взаимосвязи градиентных критериев локальной прочности в зоне концентрации напряжений с линейной механикой разрушения // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 4. С. 146–154.
2. Леган М. А. Определение разрушающей нагрузки, места и направления разрыва с помощью градиентного подхода // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 117–124.
3. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987.
4. Cotterell В. Brittle fracture in compression // Intern. J. Fract. Mech. 1972. V. 8, N 2. P. 195–208.

Поступила в редакцию 24/XI 1997 г.