РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПЛАНОВОЙ ЗАДАЧИ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ГРУНТОВЫХ ВОД МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

В. Н. Эмих

(Новосибирск)

Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) в настоящее время используется преимущественно для решения задач установившейся фильтрации. Особенно широкое распространение в этом направлении метод получил благодаря работам М. И. Швидлера [1,2]. В работе [3] с помощью метода Монте-Карло решается нестационарная задача нефтяной гидравлики. В данной работе на примере одной модельной задачи плановой неустановившейся фильтрации грунтовых вод со свободной поверхностью отмечаются некоторые особенности и преимущества метода статистических испытаний в применении к подобного рода задачам.

1. Постановка задачи. В области G $(x > 0,\ y > 0,\ t > 0)$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial yx}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right] \tag{1.1}$$

при следующих краевых условиях:

$$h(x, y, 0) = H_0, \qquad h(0, y, t) = h(x, 0, t) = H_1 \tag{1.2}$$

Задача (1.1), (1.2) описывает в гидравлической постановке неустановившийся поток грунтовых вод в безнапорном пласте с горизонтальным непроницаемым водоупором. Область фильтрации представляет квадрант, ограниченный с двух сторон взаимно перпендикулярными каналами, с которыми совмещены положительные полуоси системы координат (x, y). В уравнении (1.1) k и μ — коэффициенты фильтрации и водоотдачи грунта, t — время, h — ордината свободной поверхности грунтовых вод, отсчитываемая от водоупора. Уровень грунтовых вод, равный в момент $t = 0$ величине H_0 во всей области фильтрации, в последующий период изменяется под влиянием мгновенного подъема (спада) уровня в каналах до величины H_1.

При изучении метода Монте-Карло описываемая задача, известная как задача Г. Н. Каменского [4], оказывается удобной с точки зрения возможности сравнения результатов с уже имеющимися данными расчетов по различным конечно-разностным схемам [4,5].

Ввиду того что сейчас метод Монте-Карло разработан лишь для линейных дифференциальных уравнений, исходное нелинейное уравнение (1.1) линеаризуем, полагая в круглых скобках $h = h^*$, где h^* — некоторое среднее значение ординаты свободной поверхности в рассматриваемой области G. Покроем далее область G пространственно-временной сеткой с шагами l по пространственным координатам и τ — по времени так, чтобы узлы с нулевыми индексами приходились на границу области. Аппроксимируя в линеаризованном уравнении производные отношением конечных разностей [6], получим систему уравнений, конкретный вид которых зависит от выбранной схемы.

2. Явная конечно-разностная схема. Имеем вместо (1.1) следующую систему уравнений в узлах сетки:

$$H_{i,j,s} = \left(1 - \frac{4a^2\tau}{l^2}\right)H_{i,j,s-1} + \frac{a^2\tau}{l^2}(H_{i-1,j,s-1} + H_{i+1,j,s-1} + H_{i,j-1,s-1} + H_{i,j+1,s-1}) \tag{2.1}$$

$$\left(a^2 = \frac{kh^*}{\mu};\ i, j, s = 1, 2, \ldots\right)$$

Условия (1.2) принимают вид

$$H_{i,j,0} = H_0, \qquad H_{0,j,t} = H_{i,0,t} = H_1 \tag{2.2}$$

Определение величины $H_{i,j,s}$ по методу Монте-Карло осуществляется [1,2,7] путем реализации процесса блуждания фиктивной частицы из узла (i, j, s). Каждый шаг блуждания представляет переход частицы из данного узла в один из связанных с ним разностной схемой соседних узлов. Переход в тот или иной соседний узел должен выполняться с вероятностью, равной коэффициенту при величине H в этом узле, причем соотношение, связывающее функции H в узлах, следует, подобно (2.1), разрешить относительно значения H в узле отправления. Блуждание прекращается в случае выхода частицы на границу области; одновременно фиксируется «штраф», равный значению функции в точке выхода, и частица вновь начинает блуждать из узла (i, j, s). При многократном повторении блужданий вычисляется статистическая оценка математического ожидания штрафа в узле (i, j, s), которое, как показано, например, в [1,7], равно величине $H_{i,j,s}$, аппроксимирующей функцию h в соответствующей точке области. Этот факт можно выразить следующим равенством:

$$H_{i,j,s} = \sum_{r=1}^{R} b_{i,j,s}^{(r)} H_r \tag{2.3}$$

где H_r — значение H в r-м граничном узле области (сюда причисляются и узлы начального слоя); $b_{i,j,s}^{(r)}$—вероятность попадания частицы в r-й граничный узел из узла (i, j, s).

Выбор шагов l и τ производится с учетом условия устойчивости явной схемы, которое в данном случае имеет вид ([6], гл. 1, § 11)

$$a^2\tau / l^2 \leqslant {}^1/_4 \tag{2.4}$$

Положим (ср. с [4])

$$a^2\tau / l^2 = {}^1/_4 \tag{2.5}$$

тогда уравнения (2.1) приведутся к виду

$$H_{i,j,s} = {}^1/_4 (H_{i-1,j,s-1} + H_{i+1,j,s-1} + H_{i,j-1,s-1} + H_{i,j+1,s-1}); \quad i, j, s = 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

В соответствии с (2.6) блуждающая частица на каждом шаге должна переходить с вероятностью $^1/_4$ из данного узла в один из четырех узлов предыдущего временного слоя и после s-го шага окажется на начальном слое, если до этого не выйдет на один из каналов. Таким образом, при использовании явной разностной схемы блуждание частицы, начатое из точки s-го временного слоя, заведомо завершается не позже чем через s шагов.

Заметим, что нарушение условия (2.4) в терминах описанной теоретико-вероятностной схемы выражается в том, что вероятность перехода блуждающей частицы из данного узла в расположенный непосредственно под ним узел оказывается отрицательной.

Процесс блужданий практически осуществлялся следующим образом. Отрезок [0, 1[был разбит на четыре отрезка, каждый из которых соответствует определенному событию — переходу блуждающей частицы из данного узла в один из четырех соседних. Длина каждого отрезка равна вероятности соответствующего события; в данном случае эта вероятность для всех событий составляет $^1/_4$. Частица перейдет в тот или иной соседний узел в зависимости от того, в каком отрезке оказывается случайное число η $(0 < \eta < 1)$, выработанное датчиком, обращение к которому происходит на каждом шаге блуждания. Для того чтобы при многократном розыгрыше блуждания частота попаданий из данного узла в соседний соответствовала вероятности этого события, случайные числа, вырабатываемые датчиком, должны равномерно распределяться в интервале (0; 1). Использованная в качестве датчика программа псевдослучайных чисел № 1 для ЭВМ М-20 ([8], гл. V, § 8) достаточно хорошо удовлетворяет этому требованию, как это видно из табл. 1.

Таблица 1

(Δ — частичные интервалы, n — общее количество псевдослучайных чисел, выработанных ЭВМ)

Δ	$n = 10$	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
0—0.1	1	11	98	958	10025	99849
0.1—0.2	0	8	86	981	10057	100747
0.2—0.3	0	10	128	1088	10135	99929
0.3—0.4	1	11	101	1037	9901	100196
0.4—0.5	0	8	95	978	10005	99915
0.5—0.6	2	6	86	980	10118	100109
0.6—0.7	2	8	94	996	9926	100048
0.7—0.8	1	10	94	979	9881	99739
0.8—0.9	1	13	100	1044	10036	99480
0.9—1.0	2	15	122	959	9916	99988

Задача (2.6), (2.2) решалась при тех же значениях параметров, что и в [4]: $k = 5$ *м*/сутки, $\mu = 0.06$, $h^* = H_0 = 30$ *м*, $H_1 = 40$ *м*, $l = 1000$ *м*, $\tau = 100$ суткам (шаги l и τ приняты в соответствии с (2.5)).

Весьма существенным будет вопрос о выборе числа блужданий N, который должна произвести частица из некоторого узла (i, j, s), для того чтобы величина $H_{i, j, s}$ была определена с достаточной точностью и вместе с тем без излишних затрат времени. Оптимальное значение N в каждом конкретном случае, по-видимому, следует определять путем экспериментирования, однако, для первого представления можно воспользоваться имеющимися теоретическими оценками. Известно (см., например, [7], гл. V, § 2), что число испытаний N, при котором погрешность вычисления математического ожидания $M\xi$ независимой случайной величины ξ с вероятностью 0.997 не превышает ε, определяется равенством

$$N = 9D\xi \,/\, \varepsilon^2$$

где $D\xi$ — дисперсия величины ξ. В рассматриваемой задаче ξ принимает два значения: $\xi_1 = 30$ *м* и $\xi_2 = 40$ *м*. Нетрудно показать, что максимум дисперсии соответствует величине $M\xi = 35$ *м*; при этом события $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$ равновероятны $p(\xi_1) = p(\xi_2) = 0.5$. Имеем

$$\max D\xi = (30\,м - 35\,м)^2\,0.5 + (40\,м - 35\,м)^2\,0.5 = 25\,м^2$$

Ориентируясь на $\max D\xi$ (тем самым оценка для N производится с запасом) и задаваясь, например, значением $\varepsilon = 0.5$ *м*, найдем

$$N = \frac{9 \cdot 25\,м^2}{0.25\,м^2} = 900 \tag{2.7}$$

По программе для ЭВМ М-20 при указанных выше числовых данных был выполнен расчет величины H в задаче Г. Н. Каменского в диагональных точках сеточной области для нескольких моментов. В табл. 2 приведены результаты вычислений при $t = 1500$ суткам. В последней строке таблицы фигурируют значения H, вычисленные по формуле

$$H(x, y, t) = H_1 - (H_1 - H_0)\,\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\Phi\left(\frac{y}{2a\sqrt{t}}\right) \qquad \left(\Phi(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\zeta} e^{-u^2}\,du\right) \tag{2.8}$$

которая представляет точное решение уравнения (1.1) после его линеаризации.

Таблица 2

Значения H в *м* в диагональных узлах $\{i, i\}$ области при $t = 1500$ суткам; верхние две трети таблицы (при $N = 10^3, 10^4$) — по явной схеме, следующая треть (при $N = 10^3$) — по неявной (в скобках указана абсолютная величина отклонения решения от соответствующего результата по схеме Г. Н. Каменского (2.4) в процентах к этому результату)

N	l *м*	τ сутки	{1.1}	{2.2}	{3.3}	{4.4}	{5.5}	{6.6}	{7.7}
10^3	1000	100	39.22 (0.023)	37.27 (0.035)	34.94 (0.198)	32.60 (0.616)	31.38 (0.045)	30.55 (0.199)	30.15 (0.294)
	500	25	39.32	37.13	34.64	32.70	31.27	—	—
	250	6.25	39.10	37.10	34.74	32.16	31.11	—	—
10^4	1000	100	39.221 (0.020)	37.165 (0.247)	34.940 (0.198)	32.750 (0.159)	31.396 (0.006)	30.583 (0.091)	30.213 (0.086)
	500	25	39.139	37.215	34.614	32.640	31.345	—	—
	250	6.25	39.151	37.191	—	—	—	—	—
10^3	1000	100	39.09	36.76	34.46	32.86	31.50	30.72	30.35
	1000	300	38.94	36.76	34.51	32.49	31.63	30.78	30.29
	1000	700	38.70	36.43	33.85	32.57	31.50	30.89	30.47
	1000	1500	38.10	36.18	33.43	32.20	31.44	30.87	30.50
(2.4)	1000	100	39.229	37.257	34.871	32.802	31.394	30.611	30.239
(2.8)			39.199	37.138	34.721	32.673	31.314	30.552	30.219

Обратимся к той части таблицы, в которой собраны результаты расчетов с использованием явной схемы[1].

Отклонение от точного решения (2.8) величин H, найденных путем вычислений непосредственно по схеме Г. Н. Каменского (2.4) и приведенных в предпоследней строке табл. 2, представляет погрешность аппроксимации линеаризованного дифференциального уравнения системой конечноразностных уравнений (2.4). В остальных же данных таблицы эта погрешность переплетается с ошибкой метода статистических испытаний; для выявления последней тот или иной результат для $l = 1000$ *м* и $\tau = 100$ суткам сравнивается с соответствующим решением по схеме Г. Н. Каменского.

При рассмотрении таблицы обнаруживается, что уже при значении $N = 1000$, согласующемся с оценкой (2.7), погрешность метода Монте-Карло не превышает 0.62%, а по абсолютному значению — величины 0,2 *м*, т. е. вполне укладывается в рамки, установленные выше при выборе N. Для $N = 10000$ при общей тенденции к уменьшению погрешности вычислений по сравнению со значением $N = 1000$ в отдельных случаях (для второго и третьего узлов) наблюдаются отклонения от этой закономерности — явление, присущее вероятностным процессам.

Измельчение разностной сетки, проводившееся с сохранением равенства (2.5), несколько повышает точность вычислений, как это видно из сопоставления соответствующих данных таблицы с точным решением. Однако из-за наличия вероятностной ошибки не удается выявить «в чистом виде» зависимость погрешности аппроксимации от шагов сетки; эта погрешность будет, как известно [6], величиной порядка $l^2 + \tau$.

Для получения решения в одной точке при $t = 1500$ суткам, $l = 1000$ *м*, $\tau = 100$ суткам в среднем затрачивалось около 10 *сек* машинного времени (время счета несколько возрастает при удалении точки от границ). При вычислении же непосредственно по разностным схемам это время исчисляется минутами, ибо для получения значения уровня в некоторой точке области для данного момента необходимо произвести расчет для всех предыдущих временных слоев. Это обстоятельство позволяет рекомендовать метод Монте-Карло в тех случаях, когда прогноз режима грунтовых вод требуется сделать на продолжительный срок вперед в отдельных точках области. Что же касается величин l, τ и N, то при их выборе следует руководствоваться соображениями обеспечения требуемой точности результатов и экономии машинного времени. С этой точки зрения дальнейшее увеличение числа блужданий и измельчение сетки в рассмотренном примере будет, по-видимому, неоправданным.

3. Неявная конечно-разностная схема. Используя для аппроксимации уравнения (1.1) простейшую неявную схему [6], приведем (1.1) к системе уравнений

$$H_{i,\,j,\,s} = b_\tau H_{i,\,j,\,s-1} + b_l\,(H_{i-1,\,j,\,s} + H_{i+1,\,j,\,s} + H_{i,\,j-1,\,s} + H_{i,\,j+1,\,s}) \quad (i,\,j,\,s = 1,\,2,\ldots) \tag{3.1}$$

Здесь

$$b_\tau = \left(1 + \frac{4kh^*\tau}{\mu l^2}\right)^{-1}, \qquad b_l = b_\tau \frac{kh^*\tau}{\mu l^2} \tag{3.2}$$

Структура неявной схемы налагает особенности на характер процесса блужданий. В отличие от случая явной схемы, блуждающая частица, находящаяся в некотором узле s-го временного слоя, при очередном розыгрыше может, в частности, перейти в один из четырех соседних узлов того же слоя. Вероятность этого равна $4b_l$, вероятность же «сползания» на предыдущий временной слой составляет b_l.

Ввиду того что рассматриваемая область фильтрации представляет в плане квадрант и, таким образом, в двух направлениях блуждание частицы ничем не ограничено, а переход ее на предыдущий временной слой будет лишь одним из нескольких возможных событий, может возникнуть опасение: не слишком ли затянется в отдельных случаях блуждание?

Как отмечалось выше, характер распределения псевдослучайных чисел, определяющих ход блуждания, таков, что относительная частота их попадания в интервал отрезка (0; 1), соответствующий сползанию на предыдущий слой, примерно согласуется с длиной этого интервала. Следовательно, частице, начинающей путь из некоторого узла s-го временного слоя, предопределено попасть на начальный слой (либо до этого выйти на одну из границ) по свершении некоторого числа γ шагов, математическое ожидание которого M_γ выражается следующим образом:

$$M\gamma = s \,/\, b_\tau$$

Пусть t_s — момент, соответствующий слою s. Тогда $s = t_s \,/\, \tau$. Учитывая (3.2), имеем

$$M\gamma = t_s\,(1 + a^2\tau \,/\, l^2) \,/\, \tau \tag{3.3}$$

[1] Все вычисления по задаче производились дипломанткой Новосибирского ун-та Л. У. Колнер.

Рассматриваемая неявная схема будет абсолютно устойчивой, поэтому отпадает необходимость соблюдения условия (2.4) при выборе шагов сетки. С увеличением шага τ по времени происходит согласно (3.2) перераспределение вероятностей b_l и b_τ, причем первая характеристика возрастает. В данном случае это, однако, не означает, что с увеличением τ частица быстрее достигнет границ, ибо при блуждании по слою она может и удалиться от них. Более определенно можно заключить из равенства (3.3) об увеличении возможности выхода на начальный слой с ростом τ; при этом убывание b_τ с избытком компенсируется уменьшением числа временных слоев между данным и начальным. Таким образом при возрастании τ уменьшается время вычислений. Однако выигрыш обесценивается потерей точности в результате увеличения ошибки аппроксимации.

Последняя закономерность отражена в результатах определения величин H по схеме (3.1) методом Монте-Карло, приведенных в табл. 2 для диагональных узлов сеточной области. Среднее время расчетов по неявной схеме при $\tau = 100$ суток, $N = 1000$, по первым семи узлам составляет для одного узла около 30 *сек*. Это превышает время вычислений по явной схеме, которая к тому же обеспечивает более высокую точность и, следовательно, в данном случае заслуживает предпочтения.

4. Учет гидравлической связи с соседними горизонтами, влияния скважин и неоднородности грунтов. Принципиальные основы применения метода статистических испытаний с учетом указанных факторов также развиты в работах [1,2] для стационарных потоков и могут быть перенесены на случай неустановившейся фильтрации.

При наличии гидравлической связи рассматриваемого горизонта с нижележащим напорным слоем через прослойку, мощность которой равна m, а коэффициент фильтрации k_1, уравнение для h отличается от уравнения (1.1) присутствием в правой части последнего слагаемого $k_1 / \mu m\ (H_2 - h)$, где H_2 — напор в нижележащем слое. Используя явную схему, получим следующую систему конечно-разностных уравнений

$$H_{i,j,s} = \left(1 - \frac{4a^2\tau}{l^2} - \omega\tau\right) H_{i,j,s-1} + \frac{a^2\tau}{l^2}(H_{i-1,j,s-1} + H_{i+1,j,s-1} + H_{i,j-1,s-1} + H_{i,j+1,s-1}) + \omega\tau H_2 \qquad (4.1)$$

$$(\omega = k_1 / \mu m,\ i, j, s = 1, 2, \ldots)$$

На каждом шаге блуждания частицы наряду с возможностями перехода ее в один из соседних узлов предыдущего временного слоя теперь разыгрывается еще одно событие — попадание частицы в нижележащий горизонт с вероятностью $\omega\tau$. Аналогичная ситуация рассмотрена в [1,2] для случая нахождения частицы в узле-скважине, на которой задан напор.

Приводим значения H, вычисленные в нескольких диагональных узлах сетки $\{i, i\}$ при $H_2 = H_0 = 30$ *м*, $N = 1000$, $t \approx 1500$ суток; остальные параметры и краевые условия те же, что и в задаче Г. Н. Каменского; величина k_1 / m принимает для первой, второй и третьей строк соответственно значения $4 \cdot 10^{-3}$, $4 \cdot 10^{-4}$ и $4 \cdot 10^{-5}$ сутки$^{-1}$.

	{1,1}	{2,2}	{3,3}	{4,4}	{5,5}	{6,6}	{7,7}	{8,8}
H*м* =	30.83	30.01	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0
H*м* =	33.62	32.15	30.21	30.07	30.0	30.0	30.0	30.0
H*м* =	38.06	36.37	33.17	31.64	30.89	30.47	30.15	30.02

Точные значения t несколько различаются между собой в каждом варианте, будучи кратными шагу τ, который для упрощения расчетной схемы (4.1) выбирается из соотношения

$$1 - 4a^2\tau / l^2 - \omega\tau = 0$$

Рассмотрим далее задачу, отличающуюся от задачи Г. Н. Каменского наличием в некоторой точке области фильтрации скважины с заданным дебитом. Распределим равномерно дебит по квадратной ячейке площади l^2, в центре которой находится узел $\{i, j\}$, близлежащий к скважине. Тогда, используя явную схему и выбирая шаги в соответствии с (2.5), имеем для узла $\{i, j\}$, который, следуя [1,2], будем называть особым

$$H_{i,j,s} = {}^1\!/_4 (H_{i-1,j,s-1} + H_{i+1,j,s-1} + H_{i,j-1,s-1} + H_{i,j+1,s-1}) - (\tau / \mu l^2) Q \quad (s = 1, 2, \ldots)$$

Для остальных узлов выполняются уравнения вида (2.6).

Особенность процесса блужданий в данном случае состоит в том, что при попадании частицы в особый узел из общей суммы накопленного «штрафа» вычитается величина $(\tau / \mu l^2)\ Q = Q / 600$ *м* и блуждание продолжается до выхода на границу или начальный слой.

Ниже приводятся значения H, вычисленные в диагональных узлах при $N = 1000$ для случаев, когда скважина, расположенная в узле $\{3,5\}$, работает с дебитом, равным 1000 $м^3$ / сутки (первая строка) и 10 000 $м^3$ / сутки (вторая строка).

	{1,1}	{2,2}	{3,3}	{4,4}	{5,5}	{6,6}	{7,7}	{8,8}	{9,9}
Нм =	39.132	36.982	34.356	32.220	30.846	30.343	30.077	30.034	30.028
Нм =	38.712	35.116	29.460	24.437	24.955	27.941	29.419	29.880	30.023

Наконец, в случае неоднородных грунтов вероятности попадания частицы из данного узла в соседние, будучи связанными с коэффициентом фильтрации k в окрестности рассматриваемого узла, изменяются при переходе в зону иной проводимости, что усложняет вычисления. При использовании явной схемы, шаги l и τ следует согласно (2.4) выбирать, ориентируясь на максимальное значение k.

5. Заключение. Исходя из предыдущего изложения, отметим некоторые особенности метода статистических испытаний в применении его к задачам неустановившейся фильтрации.

1. Метод статистических испытаний разработан для линейных дифференциальных уравнений. Поэтому возможность использования этого метода при решении задач безнапорной фильтрации зависит от того, будет ли приемлемой линеаризация соответствующих уравнений.

2. С точки зрения выигрыша во времени, метод статистических испытаний имеет значительное преимущество перед известными конечноразностными методами в случаях, когда требуется долгосрочный прогноз режима фильтрации для отдельных точек области.

3. Совершая из некоторого узла $\{i, j, s\}$ достаточно большое число блужданий и фиксируя частоту попадания частицы из этого узла в r-й граничный узел, можно статистически определить вероятность $b_{i,j,s}^{(r)}$ этого события, зависящую от шагов сетки, гидрогеологических параметров пласта и средней мощности потока. Наличие значений $b_{i,j,s}^{(r)}$ для всех граничных узлов позволяет, пользуясь формулой (2.3), вычислить величину $H_{i,j,s}$ при различных граничных значениях H_r, если средняя мощность потока h^* не изменяется при варьировании величин H_r. На возможность подобного использования соотношения (2.3) в качестве фундаментального решения указал М. И. Швидлер ([2], § 13).

Поступила 12 I 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Швидлер М. И. Решение плоских фильтрационных задач методом Монте-Карло. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 1.
2. Швидлер М. И. Фильтрационные течения в неоднородных средах, М., Гостоптехиздат, 1963.
3. Исякаев В. А. Решение одной задачи пространственной фильтрации методом статистических испытаний. ПМТФ, 1967, № 2.
4. Каменский Г. Н. Методика прогноза изменений режима грунтовых вод и развитие подтопления в зоне подпора. Сб. статей по гидрогеологии. Тр. лабор. гидрогеологич. проблем им. Ф. П. Саваренского, 1958, т. 20.
5. Плешакова Л. М., Пряжинская В. Г. О некоторых методах численного решения одной задачи пространственной неустановившейся фильтрации. ПМТФ, 1965, № 2.
6. Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз, 1960.
7. Бусленко Н. П., Голенко Д. И., Соболь И. М., Срагович В. Г., Шрейдер Ю. А. Метод статистических испытаний. М., Физматгиз, 1962.
8. Ляшенко В. Ф. Программирование для цифровых вычислительных машин М-20, БЭСМ-3М, БЭСМ-4, М-220, М., Изд-во Сов. радио, 1967.