

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДВЕРГАЕМОЙ ДЕЙСТВИЮ МЕХАНИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ НАГРУЗОК, С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

М. Омиди Бидголи, А. Логман, М. Арефи

Университет г. Кашан, Кашан, Иран

E-mails: mostafaomidbidgoli@gmail.com, aloghman@kashanu.ac.ir, arefi63@gmail.com

Исследуется трехмерное термоупругое напряженно-деформированное состояние вращающейся цилиндрической оболочки из функционально-градиентного материала, механические свойства которой изменяются в радиальном направлении по степенному закону. Оболочка подвергается действию внутреннего и внешнего давлений, сдвиговых напряжений, приложенных на ее внешней поверхности, крутящего момента и температуры. При решении задачи используются уравнения теории оболочек, в которых учитываются в первом приближении поперечные деформации сдвига. Система шести дифференциальных уравнений задачи представляет собой уравнения Эйлера для функционала энергии. Получено общее решение системы дифференциальных уравнений. Установлено, что изменение механических свойств материала оболочки в радиальном направлении оказывает существенное влияние на ее напряженно-деформированное состояние.

Ключевые слова: термоупругость, давление, поверхностное трение, температура, функционально-градиентный материал, вращающийся цилиндр, теория оболочек, поперечные сдвиги.

DOI: 10.15372/PMTF20190513

Введение. Как правило, внешние поверхности вращающихся валов или цилиндров контактируют с внешними поверхностями других тел (например, в подшипниках). При этом, несмотря на наличие смазки, вследствие трения на поверхностях контакта возникают значительные деформации и напряжения сдвига. Для того чтобы преодолеть напряжения сдвига, необходимо приложить внешний крутящий момент. В большинстве случаев такие валы и цилиндры работают при повышенных температурах и подвергаются воздействию больших внешних и внутренних давлений. Чтобы избежать разрушения таких конструкций при эксплуатации, при их изготовлении используются функционально-градиентные материалы (ФГМ) [1]. Точное решение задачи о деформировании толстостенного цилиндра из изотропного материала, находящегося под действием внутреннего и внешнего давлений, получено в работе [2]. В [3] эта задача решена с использованием теории оболочек, в которой учитываются деформации поперечного сдвига. В [4] исследована задача о деформировании цилиндра из ФГМ, находящегося под действием температурных

Работа выполнена при финансовой поддержке Университета г. Кашан (грант № 489157/2).

© Омиди Бидголи М., Логман А., Арефи М., 2019

и механических нагрузок. Деформирование длинного цилиндра из ФГМ под действием несимметричных температурных и механических нагрузок изучалось в работе [5]. В [6] решена задача о деформировании под действием термомеханических нагрузок полого цилиндра конечной длины, изготовленного из ФГМ. Цилиндр представлялся в виде набора соосных цилиндров, а полученное решение справедливо только для цилиндров с шарнирно опертыми торцами. Аналитическое решение задачи о деформировании полого цилиндра конечной длины из ФГМ, находящегося под действием температурного поля, внутреннего давления и осевой силы, получено в работе [7]. Магнитотермоупругая задача о деформировании вращающегося сплошного цилиндра из неоднородного анизотропного материала решалась в работе [8]. В [9] аналитически исследовалось деформирование пьезоэлектрического вращающегося цилиндра из ФГМ, используемого в качестве механического сенсора.

В работе [10] с использованием теории оболочек, в которой учитываются поперечные сдвиги в первом приближении, и энергетического метода получены система неоднородных дифференциальных уравнений и ее решение для краевых условий определенного вида. Линейный и нелинейный анализ конструкций из ФГМ проведен в работе [11]. В [12] с учетом деформаций поперечного сдвига выполнен нелинейный анализ деформирования оболочки переменной толщины из ФГМ, находящейся под действием неоднородного давления. В [13] решена термоупругая задача о деформировании полого цилиндра из ФГМ, свойства которого зависят от температуры. Влияние размера частиц карбида кремния на ползучесть вращающегося цилиндра, изготовленного из композита Al-SiC, исследовалось в работе [14].

В данной работе с использованием уравнений теории оболочек, в которых учитываются деформации сдвига в первом приближении, решается термоупругая задача о деформировании вращающейся цилиндрической оболочки из ФГМ.

Геометрия задачи, нагрузка и краевые условия. Рассматривается вращающаяся оболочка из ФГМ с внутренним радиусом R_i , внешним радиусом R_o и длиной L . На оболочку действуют внутреннее и внешнее давление, сдвиговые напряжения трения, приложенные на внешней поверхности оболочки, внешний крутящий момент и однородное температурное поле. На рис. 1 показаны геометрия оболочки, нагрузки и краевые условия. Начало системы координат находится на срединной поверхности оболочки, ось z совпадает с радиальным направлением, ось x — с продольным, угол θ определяет положение точки в окружном направлении. Свойства ФГМ оболочки изменяются в радиальном направлении

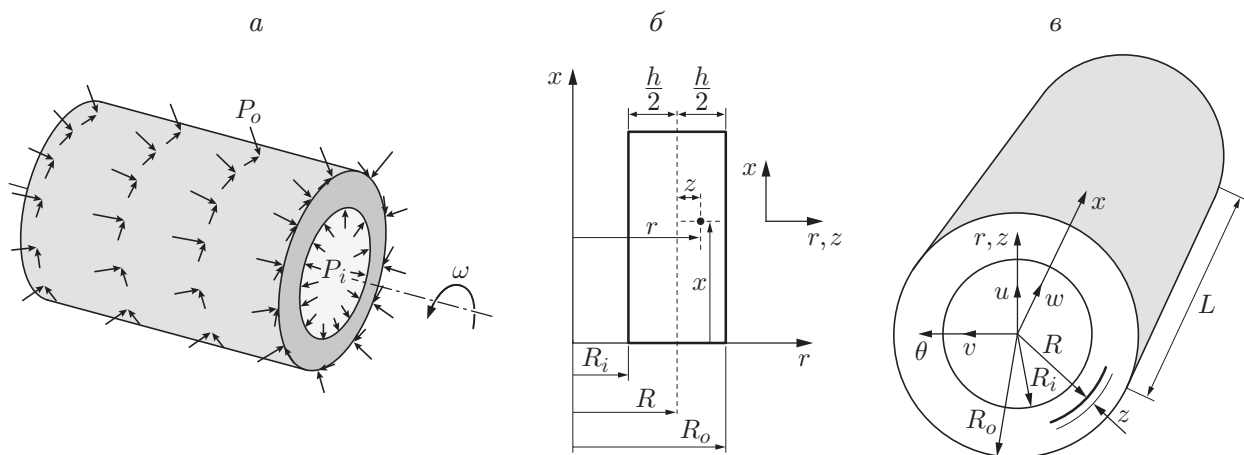


Рис. 1. Общий вид (а) и продольное сечение (б) оболочки, а также цилиндрическая система координат (в)

по степенному закону

$$M = M_i(r/R_i)^\beta,$$

где M_i — модули упругости; β — показатель степени, характеризующий изменение механических свойств оболочки в радиальном направлении.

Постановка задачи и ее решение. В соответствии с теорией сдвиговой деформации первого порядка компоненты вектора смещения во введенной выше системе координат записываются в виде [11]

$$\begin{pmatrix} U_r(x, \theta) \\ W_x(x, \theta) \\ V_\theta(x, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, \theta) \\ w(x, \theta) \\ v(x, \theta) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \varphi_r(x, \theta) \\ \varphi_x(x, \theta) \\ \varphi_\theta(x, \theta) \end{pmatrix},$$

где U_r , W_x , V_θ — радиальная, осевая и окружная компоненты вектора смещения; φ_r , φ_x , φ_θ — компоненты вектора поворота нормали к срединной поверхности.

Линейные соотношения между деформациями и смещениями представляются в следующем виде [11]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial z} + z \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial z} \varphi_z = \varphi_z, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} (u + z\varphi_z) = \frac{u}{R+z} + z \frac{\varphi_z}{R+z}, \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial w}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} - \frac{v_\theta}{r} = \varphi_\theta - \frac{v}{r} - z \frac{\varphi_\theta}{r}, \\ \gamma_{rx} &= \frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_z}{\partial x}, \quad \gamma_{x\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial w_x}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1)$$

Соотношения обобщенного закона Гука имеют вид [11]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{xx}) - (1+\nu)\alpha T], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta} + \nu(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{xx}) - (1+\nu)\alpha T], \\ \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) - (1+\nu)\alpha T], \\ \tau_{r\theta} &= G\gamma_{r\theta}, \quad \tau_{rx} = G\gamma_{rx}, \quad \tau_{\theta x} = G\gamma_{\theta x}, \quad G = K \frac{E}{2(1+\nu)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где G — модуль сдвига; K — корректирующий множитель.

С учетом (1), (2) выражение для энергии деформации в единице объема цилиндрической оболочки из ФГМ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)(\varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\theta\theta}^2 + \varepsilon_{xx}^2) + 2\nu(\varepsilon_{rr}\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{rr}\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{\theta\theta}\varepsilon_{xx}) - \\ &\quad - (1+\nu)\alpha T(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{xx}) + K(1-2\nu)(\gamma_{r\theta}^2 + \gamma_{rx}^2 + \gamma_{\theta x}^2)/2]. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (1) в (3) и интегрируя по объему оболочки, получаем выражение для энергии деформации цилиндрической оболочки

$$\begin{aligned}
U = \pi \int_0^L \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \left\{ (1-\nu) \left[(R+z)\varphi_z^2 + \frac{1}{R+z} (u^2 + 2uz\varphi_z + z^2\varphi_z^2) + \right. \right. \\
+ (R+z) & \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right)^2 + 2z \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \right] + 2\nu \left[u\varphi_z + z\varphi_z^2 + (R+z) \left(\varphi_z \frac{\partial w}{\partial x} + z\varphi_z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) + \right. \\
+ u \frac{\partial w}{\partial x} + zu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + z\varphi_z \frac{\partial w}{\partial x} + z^2\varphi_z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} & \left. \right] - (1+\nu)\alpha T \left[(R+z)\varphi_z + u + z\varphi_z + (R+z) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \right] + \\
+ \frac{K(1-2\nu)}{2} & \left[(R+z)\varphi_\theta + \frac{v^2}{R+z} + \frac{z^2\varphi_\theta^2}{R+z} + (R+z)\varphi_x^2 + (R+z) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (R+z)z^2 \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} + \right. \\
+ (R+z) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + (R+z)z^2 \left(\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} \right)^2 & - 2v\varphi_\theta - 2z\varphi_\theta^2 + \frac{2}{R+z} zv\varphi_\theta + 2(R+z)z \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + \\
+ (R+z) \left(2\varphi_x \frac{\partial u}{\partial x} + 2z\varphi_x \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} + 2z \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right) & \left. \right] \left. \right\} dz dx.
\end{aligned}$$

С учетом краевых условий полная энергия представляется в виде двух слагаемых — механической энергии и тепловой энергии:

$$U = \int_0^L [U_S(x) - U_T(x)] dx,$$

$$U_S(x) = \sum_{i=1}^9 A_i(x) f_i(x) \rightarrow f_i(x) = f_i(u, w, v, \varphi_z, \varphi_x, \varphi_\theta),$$

$$U_T(x) = \sum_{i=1}^9 B_i(x) g_i(x) \rightarrow g_i(x) = g_i(u, w, v, \varphi_z, \varphi_x, \varphi_\theta).$$

Здесь $A_i(x)$, $B_i(x)$, $f_i(x)$, $g_i(x)$ — функции u , w , v , φ_z , φ_x , φ_θ и характеристик материала.

Внешняя энергия есть сумма работ внешнего и внутреннего давлений, сил инерции вращения и сил трения. Выражение для работы внутреннего и внешнего давлений записывается в следующем виде:

$$W_1 = \int_0^L \left\{ 2\pi \left[P_i(x) \left(R - \frac{h}{2} \right) - P_o(x) \left(R + \frac{h}{2} \right) \right] u + 2\pi \frac{h}{2} \left[-P_i(x) \left(R - \frac{h}{2} \right) - P_o(x) \left(R + \frac{h}{2} \right) \right] \varphi_z \right\} dx.$$

Выражение для работы центробежных сил имеет вид

$$W_2 = \int_0^L \left[2\pi\rho_0\omega^2 \left(R^4h + \frac{R^2h^3}{2} + \frac{h^5}{80} \right) u + 2\pi\rho_0\omega^2 \left(\frac{R^2h^3}{3} + \frac{Rh^5}{40} \right) \varphi_z \right] dx.$$

Работа сил инерции вычисляется по формуле

$$W_3 = \int_0^L \left(-2\pi\mu P_o(x)v + -2\pi \frac{h}{2} \mu P_o(x)\varphi_\theta \right) dx.$$

Полная энергия представляет собой сумму механической, тепловой энергии и работы внешних сил:

$$U = \int_0^L (U_S - U_T) dx - (W_1 + W_2 + W_3) = \int_0^L F(u, w, v, \varphi_z, \varphi_x, \varphi_\theta) dx. \quad (4)$$

Уравнения Эйлера для функционала (4) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial (\partial w / \partial x)} \right) &= 0, & \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial (\partial \varphi_x / \partial x)} \right) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial (\partial v / \partial x)} \right) &= 0, & \frac{\partial F}{\partial \varphi_\theta} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial (\partial \varphi_\theta / \partial x)} \right) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial (\partial u / \partial x)} \right) &= 0, & \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial (\partial \varphi_z / \partial x)} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Дифференциальные уравнения (5) можно записать в матричной форме

$$[G_1] \frac{d^2}{dx^2} \{X\} + [G_2] \frac{d}{dx} \{X\} + [G_3] \{X\} = \{F\}, \quad \{X\} = (u, \varphi_z, w, \varphi_x, v, \varphi_\theta)^T, \quad (6)$$

где

$$G_1 = \begin{bmatrix} 2\mu A_1 & 2\mu A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu A_2 & 2\mu A_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu)A_1 & 2(1-\nu)A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu)A_2 & 2(1-\nu)A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu A_1 & 2\mu A_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu A_2 & 2\mu A_3 \end{bmatrix},$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\nu A_4 & 2\mu A_1 - 2\nu A_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\nu(A_1 + A_6) & 2\mu A_2 - 2\nu(A_2 + A_9) & 0 & 0 \\ 2\nu A_4 & 2\nu(A_1 + A_6) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\mu A_1 + 2\nu A_6 & -2\mu A_2 + (2\nu)(A_2 + A_9) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} -2(1-\nu)A_5 & -(2\nu A_4 + 2(1-\nu)A_7) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(2\nu A_4 + 2(1-\nu)A_7) & 2(1-\nu)(A_1 + A_8) + 4\nu A_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\mu A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\mu A_5 & -2\mu(A_4 - A_7) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\mu(A_4 - A_7) & -2\mu(A_1 + A_8 - 2A_6) \end{bmatrix}.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений. Общее решение системы дифференциальных уравнений равно сумме общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы:

$$\{X\} = \{X\}_h + \{X\}_p.$$

Общее решение однородной системы представляется в виде

$$\{X\}_h = \sum_{i=1}^{10} c_i \{v\}_i e^{m_i x} + c_{11}x + c_{12}.$$

Наличие линейного слагаемого обусловлено наличием двух нулевых корней характеристического уравнения. Частное решение неоднородной системы имеет вид

$$\{X\}_p = \{X\}_{p_1} + \{X\}_{p_2} + \{X\}_{p_3},$$

где $\{X\}_{p_1}$, $\{X\}_{p_2}$, $\{X\}_{p_3}$ — слагаемые, соответствующие тепловой и механической нагрузкам. Полагая внутреннее и внешнее давления постоянными, представим искомые функции в виде

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^u \sin(\zeta_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^u \cos(\zeta_n x) + c^u + D^u + E^u, \\ \varphi_z &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\varphi_z} \sin(\zeta_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{\varphi_z} \cos(\zeta_n x) + c^{\varphi_z} + D^{\varphi_z} + E^{\varphi_z}, \\ w &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^w \sin(\zeta_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^w \cos(\zeta_n x) + c^w + D^w + E^w, \\ \varphi_x &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\varphi_x} \sin(\zeta_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{\varphi_x} \cos(\zeta_n x) + c^{\varphi_x} + D^{\varphi_x} + E^{\varphi_x}, \\ v &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^v \sin(\zeta_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^v \cos(\zeta_n x) + c^v + D^v + E^v, \\ \varphi_\theta &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\varphi_\theta} \sin(\zeta_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{\varphi_\theta} \cos(\zeta_n x) + c^{\varphi_\theta} + D^{\varphi_\theta} + E^{\varphi_\theta}. \end{aligned}$$

В этих представлениях первые два слагаемых соответствуют тепловой нагрузке, последние три — механическим нагрузкам. Подставляя частное решение в систему дифференциальных уравнений (6), получаем

$$\begin{aligned} -\zeta_n^2 [G_1] (\{A_n\} \sin(\zeta_n x) + \{B_n\} \cos(\zeta_n x)) + \zeta_n [G_2] (\{A_n\} \cos(\zeta_n x) - \{B_n\} \sin(\zeta_n x)) + \\ + [G_3] (\{A_n\} \sin(\zeta_n x) + \{B_n\} \cos(\zeta_n x)) = \\ = \left(\frac{\partial B_1(x)}{\partial x}, \frac{\partial B_1(x)}{\partial x}, 0, 0, -B_3(x), -B_1(x) - B_4(x) \right). \end{aligned}$$

Краевые условия используются для определения произвольных констант. В данной работе принимаются следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi_z}{dx} = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi_x}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi_\theta}{dx} = 0, \\ x = l: \quad u = 0, \quad \varphi_z = 0, \quad w = 0, \quad \varphi_x = 0, \quad v = 0, \quad T = \int r \tau_{x\theta} dA = (\mu P_o A) R_o. \end{aligned}$$

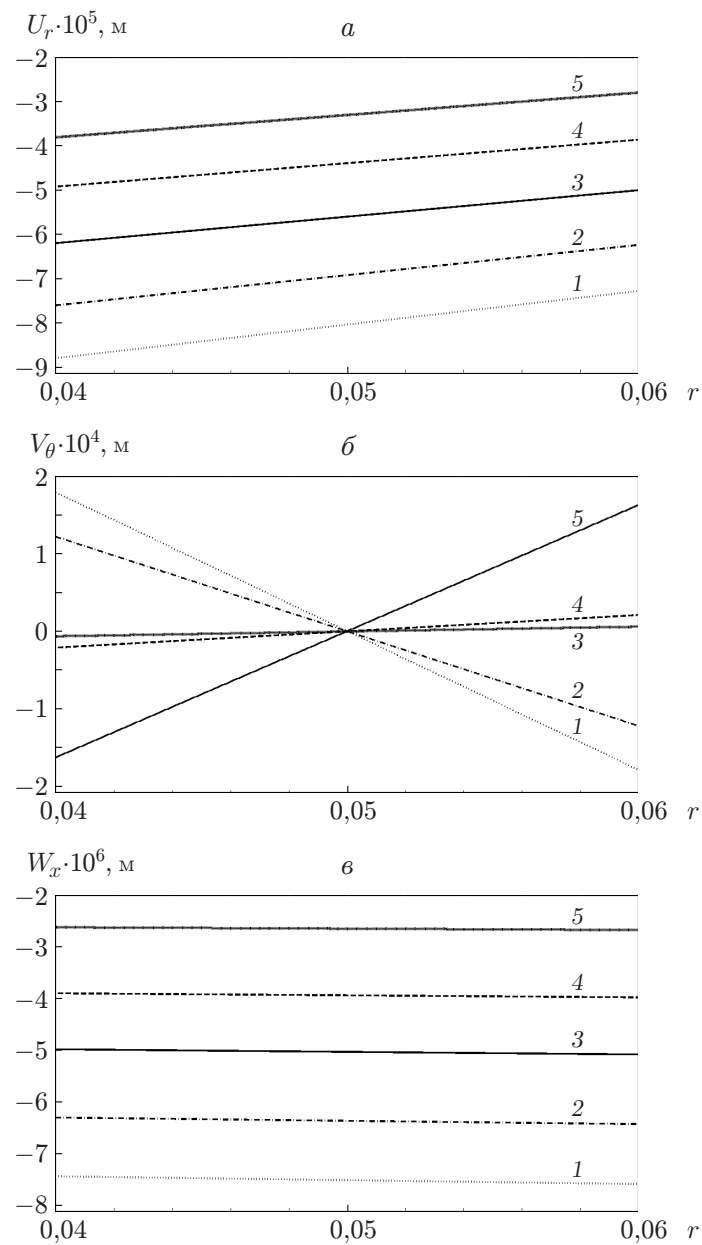


Рис. 2. Распределения радиального (а), окружного (б) и продольного (в) смещений по координате r при различных значениях параметра β :
 1 — $\beta = -2$, 2 — $\beta = -1$, 3 — $\beta = 0$, 4 — $\beta = 1$, 5 — $\beta = 2$

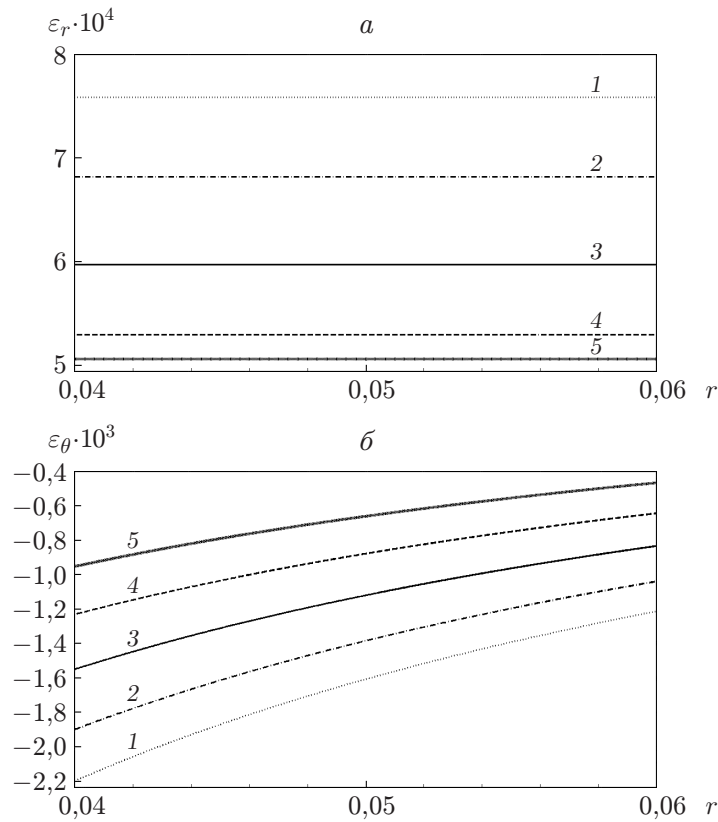


Рис. 3. Распределения радиальной (а) и окружной (б) деформации по координате r при различных значениях параметра β :
 1 — $\beta = -2$, 2 — $\beta = -1$, 3 — $\beta = 0$, 4 — $\beta = 1$, 5 — $\beta = 2$

Результаты исследования и их обсуждение. Используя полученное решение, можно определить напряженно-деформированное состояние оболочки. Ниже приведены значения параметров задачи (геометрических параметров оболочки, механических констант материала оболочки, механических и тепловых нагрузок), при которых выполнены расчеты: модуль упругости $E_0 = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, коэффициент теплового расширения $\alpha_0 = 1,2 \cdot 10^6$ $1/^\circ\text{C}$, внутренний радиус оболочки $R_i = 0,04$ м, внешний радиус оболочки $R_o = 0,06$ м, внутреннее давление $P_i = 80$ МПа, внешнее давление $P_o = 30$ МПа, температура внутренней поверхности оболочки $T_i = 150$ $^\circ\text{C}$, температура внешней поверхности оболочки $T_o = 70$ $^\circ\text{C}$, коэффициент трения $\mu = 0,01$, скорость вращения оболочки $\omega = 3200$ об/мин.

На рис. 2–4 приведены распределения смещений, деформаций и напряжений по радиусу оболочки при различных значениях показателя изменения механических свойств материала оболочки по радиусу β . Минимальное значение величины радиального смещения имеет место при $\beta = -2$, максимальное — при $\beta = 2$. Толщина оболочки при деформировании увеличивается, поскольку смещение внутренней поверхности больше смещения внешней. Радиальные деформации ε_r являются положительными (деформации растяжения), а окружные деформации ε_θ — отрицательными (деформации сжатия) (см. рис. 3). Окружное смещение во внешней (по отношению к срединной поверхности) части оболочки положительное, во внутренней — отрицательное (см. рис. 2,б). Такое распределение окружного смещения обусловлено увеличением толщины оболочки и действием крутящего момента. Смещение в продольном направлении практически постоянно по толщине обо-

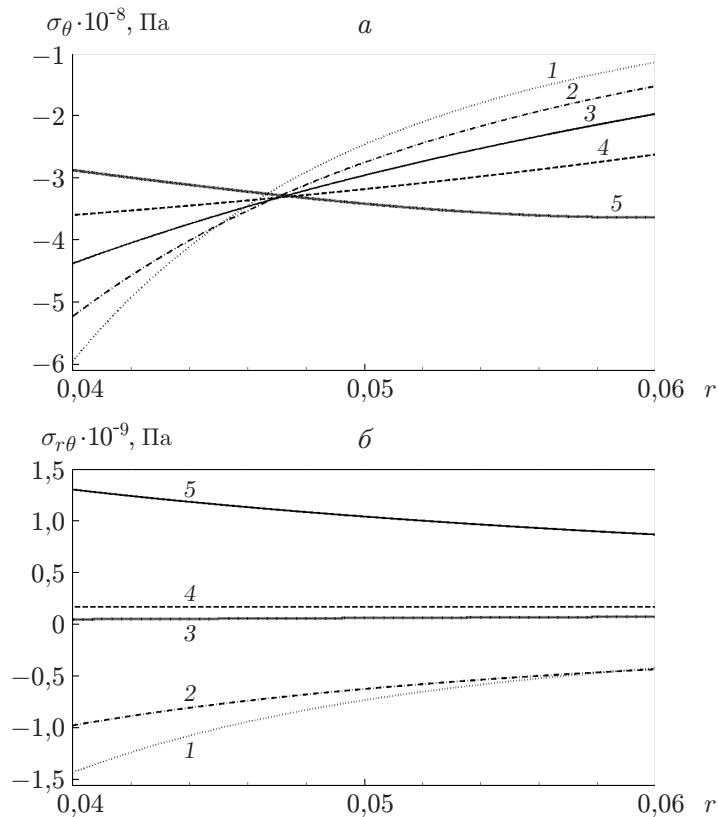


Рис. 4. Распределения окружного (а) и сдвигового (б) напряжений по координате r при различных значениях параметра β :

1 — $\beta = -2$, 2 — $\beta = -1$, 3 — $\beta = 0$, 4 — $\beta = 1$, 5 — $\beta = 2$

лочки (см. рис. 2, в). Это означает, что деформированное состояние оболочки конечной длины близко к состоянию, соответствующему обобщенной плоской деформации.

В случае цилиндрической оболочки окружные напряжения в срединной поверхности оболочки имеют практически одно и то же значение при всех значениях показателя β (см. рис. 4, а). Экстремальные значения окружных напряжений имеют место при $\beta = 2$ и $\beta = -2$. При $\beta = 2$ максимальные окружные напряжения достигаются на внутренней поверхности, минимальные — на внешней. При $\beta = -2$ максимальные значения окружных напряжений имеют место на внешней поверхности оболочки, минимальные — на внутренней. Напряжения сдвига $\sigma_{r\theta}$ существенно больше других напряжений (см. рис. 4, б).

Из приведенных результатов следует, что показатель изменения механических свойств в радиальном направлении β оказывает существенное влияние на распределение деформаций и напряжений по толщине оболочки.

Заключение. С использованием теории сдвиговых деформаций первого порядка исследовано трехмерное термоупругое состояние вращающейся цилиндрической оболочки из функционально-градиентного материала, находящейся под действием внутреннего и внешнего давлений, сдвиговых напряжений трения, приложенных на внешней поверхности оболочки, температурного поля и внешнего крутящего момента. Установлено, что изменение механических свойств оболочки в радиальном направлении существенно влияет на ее напряженно-деформированное состояние.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Proceedings** of the 1st International symposium on functionally gradient materials, Sendai (Japan), 8–9 Oct. 1990 / Ed. by M. Yamanouchi, M. Koizumi, I. Shiota. Tokyo: S. n., 1990.
2. **Timoshenko S. P.** Strength of materials: Pt 2. Advanced theory and problems. 3rd ed. N. Y.: Van Nostrand Reinhold Co, 1976.
3. **Mirsky I., Hermann G.** Axially motions of thick cylindrical shells // J. Appl. Mech. 1958. V. 25. P. 97–102.
4. **Tarn J. Q.** Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads // Intern. J. Solids Structures. 2001. V. 38. P. 8189–8206.
5. **Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M. R.** Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2002. V. 79. P. 493–497.
6. **Shao Z. S.** Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2005. V. 82. P. 155–163.
7. **Hosseini Kordkheili S. A., Naghdabadi R.** Thermoelastic analysis of functionally graded cylinders under axial loading // J. Thermal Stresses. 2007. V. 31, N 1. P. 1–17.
8. **Abd-Alla A. M., Fahmy M. A., El-Shahat T. M.** Magneto-thermo-elastic problem of a rotating nonhomogeneous anisotropic solid cylinder // Arch. Appl. Mech. 2008. V. 78, N 2. P. 135–148.
9. **Rahimi G. H., Arefi M., Khoshgoftar M. J.** Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads // Appl. Math. Mech. 2011. V. 32, N 8. P. 997–1008.
10. **Akbari Alashti R., Khorsand M., Tarahhomi M. H.** Three-dimensional asymmetric thermo-elastic analysis of a functionally graded rotating cylindrical shell // J. Theor. Appl. Mech. 2013. V. 51, N 1. P. 143–158.
11. **Arefi M., Rahimi G. H.** Comprehensive thermoelastic analysis of a functionally graded cylinder with different boundary conditions under internal pressure using first order shear deformation theory // Mechanika. 2012. V. 18, N 1. P. 5–13.
12. **Mahboubi Nasrekani F., Eipakchi H.** Nonlinear analysis of cylindrical shells with varying thickness and moderately large deformation under nonuniform compressive pressure using the first-order shear deformation theory // J. Engng Mech. 2014. V. 141, N 5. P. 1–11.
13. **Arefi M.** Nonlinear thermal analysis of a hollow functionally graded cylinder with temperature-variable material properties // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2015. V. 56, N 2. P. 267–273.
14. **Loghman A., Hammami M., Loghman E.** Effect of the silicon-carbide micro- and nanoparticle size on the thermo-elastic and time-dependent creep response of a rotating Al-SiC composite cylinder // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2017. V. 58, N 3. P. 443–453.

*Поступила в редакцию 18/XII 2018 г.,
после доработки — 22/IV 2019 г.
Принята к публикации 27/V 2019 г.*